

# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вектор – это направленный отрезок. Если  $A$  – начало вектора, а  $B$  – его конец, то вектор обозначается  $\overrightarrow{AB}$  или  $\vec{AB}$ . Вектор  $\overrightarrow{BA}$  называется противоположным вектору  $\overrightarrow{AB}$ . Вектор, противоположный вектору  $\vec{a}$ , обозначается  $-\vec{a}$ .

Длиной или модулем вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка и обозначается  $|\overrightarrow{AB}|$ . Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым вектором и обозначается  $\vec{0}$ . Нулевой вектор направления не имеет. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором и обозначается через  $\vec{e}$ . Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , называется ортом вектора  $\vec{a}$  и обозначается  $\vec{e}_a$ .

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записываются  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются равными ( $\vec{a} = \vec{b}$ ), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трёх векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

## Операции с векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Для суммы двух векторов есть правило треугольника, а также правило параллелограмма.

Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется вектор  $\lambda\vec{a}$  или  $(\vec{a}\lambda)$ , который имеет длину  $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ , коллинеарен вектору  $\vec{a}$ , имеет направление вектора  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$  и противоположное направление, если  $\lambda < 0$ .

Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) если  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ , то  $|\vec{a}| = |\lambda| |\vec{b}|$ . Наоборот, если  $|\vec{a}| = |\lambda| |\vec{b}|$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ), то при некотором  $\lambda$  верно равенство  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ;

2)  $\vec{e}_i = |\vec{e}_i| \vec{e}_i^0$ , т.е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

$$1. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$2. (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

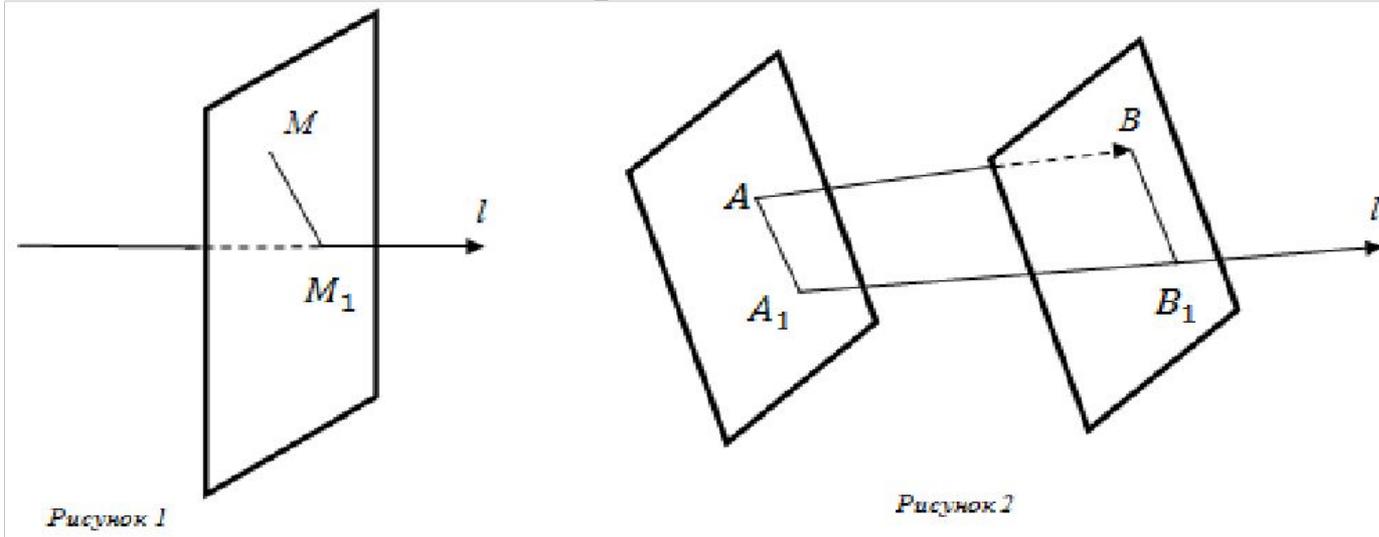
$$3. \lambda_1 (\lambda_2 \vec{a}) = \lambda_1 \lambda_2 \vec{a}$$

$$4. (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$$

$$5. \lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

## ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в пространстве задана ось  $l$ . Проекцией точки  $M$  на ось  $l$  называется основание  $M_1$  перпендикуляра  $MM_1$ , опущенного из точки на ось (см. рис. 1)



Проекцией вектора  $\vec{a}$  на ось  $l$  называется положительное число  $|\vec{a}| \cos \alpha$ , если вектор  $\vec{a}$  и ось  $l$  одинаково направлены и отрицательное число  $-|\vec{a}| \cos \alpha$ , если вектор  $\vec{a}$  и ось  $l$  противоположно направлены (см. рис. 2).

Если точки  $M_1$  и  $M_1$  совпадают ( $\vec{a} \perp l$ ), то проекция вектора  $\vec{a}$  равна 0.

Проекция вектора  $\vec{a}$  на ось  $l$  обозначается так:  $\text{pr}_l \vec{a}$ . Если  $\vec{a} = \vec{0}$  или  $\vec{a} \perp l$ , то  $\text{pr}_l \vec{a} = 0$ .

## ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОЕКЦИИ

Свойство 1. Проекция вектора  $\vec{a}$  на ось  $OX$  равна произведению модуля вектора  $\vec{a}$  на косинус угла  $\varphi$  между вектором и осью, т.е.

$$\text{пр}_{OX} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi.$$

Следствие 1. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если угол – прямой.

Следствие 2. Проекция равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

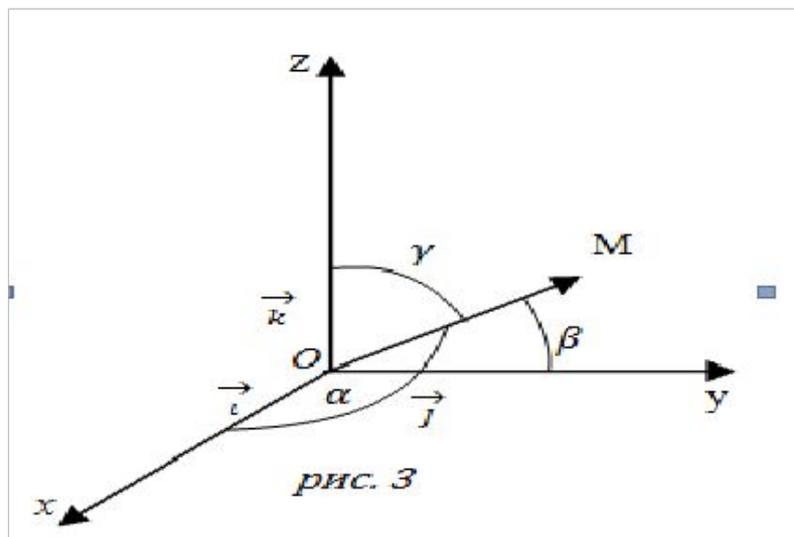
Свойство 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось, т.е.  $\text{пр}_{OX} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_{OX} \vec{a} + \text{пр}_{OX} \vec{b} + \text{пр}_{OX} \vec{c}$

Свойство 3. При умножении вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  его проекция на ось также умножается на это число, т.е.  $\text{пр}_{OX} (k\vec{a}) = k \text{пр}_{OX} \vec{a}$

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

## Разложение вектора по ортам координатных осей

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат  $Oxyz$ . Выделим на координатных осях  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  единичные векторы (орты), обозначаемые  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  соответственно (см. рис. 3).



Выберем произвольный вектор  $\vec{M} = \overrightarrow{OM}$ . Обозначим проекции вектора  $\vec{M} = \overrightarrow{OM}$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно через  $x_M$ ,  $y_M$  и  $z_M$ .

Тогда получаем

$$\vec{M} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}, \quad (3.2.1).$$

Эта формула называется разложением вектора по ортам координатных осей. Числа  $x_M$ ,  $y_M$  и  $z_M$  называются координатами вектора  $\vec{M}$ .

На основе теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда получаем

$$|\mathbf{h}_1|^2 = h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 \quad (3.2.2).$$

Отсюда получим

$$|\mathbf{h}_1| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \quad (3.2.3).$$

(3.2.3) – это формула для вычисления модуля (длины) вектора  $\mathbf{h}_1 = h_x \mathbf{i} + h_y \mathbf{j} + h_z \mathbf{k}$ .

Пусть углы вектора  $\mathbf{h}_1$  с осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно равны  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$h_x = |\mathbf{h}_1| \cos \alpha, \quad h_y = |\mathbf{h}_1| \cos \beta, \quad h_z = |\mathbf{h}_1| \cos \gamma \quad (3.2.4)$$

Из формул (3.2.4) вытекает, что

$$\cos \alpha = \frac{h_x}{|\mathbf{h}_1|}, \quad \cos \beta = \frac{h_y}{|\mathbf{h}_1|}, \quad \cos \gamma = \frac{h_z}{|\mathbf{h}_1|}.$$

Числа  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  называются направляющими косинусами вектора  $\mathbf{h}_1$ .

## СЛОЖЕНИЕ, УМНОЖЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ВЕКТОРА

Подставим выражения (3.2.4) в равенство (3.2.2), получаем

$$|\mathbf{B}_1|^2 = |\mathbf{B}|^2 \cos^2 \alpha + |\mathbf{B}|^2 \cos^2 \beta + |\mathbf{B}|^2 \cos^2 \gamma.$$

Сократив на  $|\mathbf{B}|^2 \neq 0$ , получим соотношение

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Заметим, что координатами единичного вектора  $\mathbf{E}$  являются числа  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ , т.е.  $\mathbf{E} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ .

$$\text{Пусть } \mathbf{B}_1 = B_{1x} \mathbf{e}_x + B_{1y} \mathbf{e}_y + B_{1z} \mathbf{e}_z, \mathbf{B}_2 = B_{2x} \mathbf{e}_x + B_{2y} \mathbf{e}_y + B_{2z} \mathbf{e}_z.$$

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можем записать:

$$\begin{aligned} 1. \mathbf{B}_1 \pm \mathbf{B}_2 &= (B_{1x} \pm B_{2x}) \mathbf{e}_x + \\ &+ (B_{1y} \pm B_{2y}) \mathbf{e}_y + (B_{1z} \pm B_{2z}) \mathbf{e}_z \Leftrightarrow \mathbf{B}_1 \pm \mathbf{B}_2 = (B_{1x} \pm B_{2x}; B_{1y} \pm B_{2y}; B_{1z} \pm B_{2z}). \end{aligned}$$

Т.е. при сложении (вычитании) векторов их одноимённые координаты складываются (вычитаются).

$$\lambda \mathbf{B} = \lambda B_x \mathbf{e}_x + \lambda B_y \mathbf{e}_y + \lambda B_z \mathbf{e}_z \Leftrightarrow \lambda \mathbf{B} = (\lambda B_x; \lambda B_y; \lambda B_z).$$

Т.е. при умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это число.

## РАВЕНСТВО И КОЛЛИНЕАРНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны ( $\vec{a} = \vec{b}$ ) тогда и только тогда, когда выполняются равенства:  $a_x = b_x$ ,  $a_y = b_y$ ;  $a_z = b_z$ .

Выясним условия коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  заданных своими координатами.

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}$ , где  $\lambda$  – некоторое число.

Следовательно

$$\lambda a_x + \lambda a_y + \lambda a_z = \lambda (a_x + a_y + a_z) = \lambda a_x + \lambda a_y + \lambda a_z$$

Отсюда получим

$$\lambda a_x = \lambda a_x, \lambda a_y = \lambda a_y, \lambda a_z = \lambda a_z,$$

т.е.

$$\frac{\lambda a_x}{\lambda} = a_x, \frac{\lambda a_y}{\lambda} = a_y, \frac{\lambda a_z}{\lambda} = a_z \text{ или } \frac{a_x}{a_x} = \frac{a_y}{a_y} = \frac{a_z}{a_z}.$$

Таким образом, проекции коллинеарных векторов пропорциональны.

## Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается одним из символов  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  или  $(\vec{a}, \vec{b})$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha, \quad (3.3.1)$$

где  $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$ .

Так как  $|\vec{a}| \cdot \cos \alpha = \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$  (см. рис. 5),

$$|\vec{b}| \cdot \cos \alpha = \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}, \quad \text{то}$$

получаем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$$

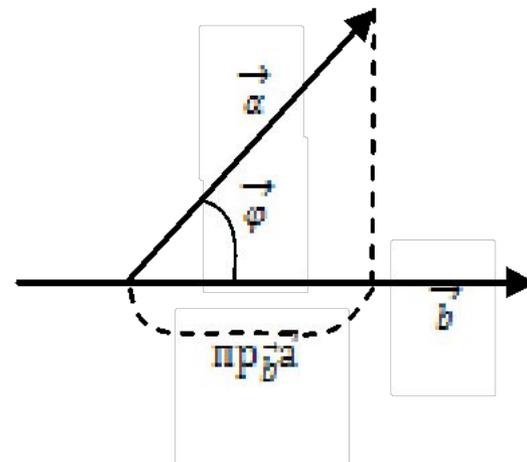


Рис. 5.

Свойства скалярного произведения:

1.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  (свойство переместительности);
2.  $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b})$  (свойство сочетательности);
3.  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  (свойство распределительности);
4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ . В частности:  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ .

5. Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т.е. если  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , то  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . Справедливо и обратное утверждение: если  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  и  $\mathbf{a} \neq 0$ ,  $\mathbf{b} \neq 0$ , то  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

**Пример 1.** Найти длину вектора  $\vec{a} = 4\vec{b} + 5\vec{c}$ , если  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 4$ ,  $(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{1}{3}$ .

Решение:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{(4\vec{b} + 5\vec{c})^2} = \sqrt{16\vec{b}^2 + 40\vec{b}\vec{c} + 25\vec{c}^2} =$$

$$\sqrt{16 \cdot 9 + 40 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot 16} = \sqrt{784} = 28$$

Векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , скалярные произведения которых равно нулю, называются ортогональными.

Если векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  заданы своими координатами  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$ , то

$$|\vec{b}\vec{c}| = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z \quad (3.3.3).$$

Формула (3.3.3) легко выводится из свойств скалярного произведения.

**Пример 2.** Показать, что четырёхугольник с вершинами  $A(-5; 3; 4)$ ,  $B(-1; -7; 5)$ ,  $C(6, -5, -3)$ ,  $D(2; 5; -4)$  есть квадрат.

Решение. Находим векторы.

$\vec{AB} = (4; -10; 1)$ ,  $\vec{BC} = (7; 2; -8)$ ,  $\vec{CD} = (4; -10; 1)$ ,  $\vec{DA} = (7; 2; -8)$ .

Сравнивая координаты этих векторов, заключаем, что

$$\vec{AB} = \vec{CD}, \vec{BC} = \vec{DA}$$

Так как

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117}, \quad |\vec{BC}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{117},$$

то

$$|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CD}| = |\vec{DA}|.$$

А поскольку

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 4 \cdot 7 + (-10) \cdot 2 + 1 \cdot (-8) = 0,$$

то  $\vec{AB} \perp \vec{BC}$

Следовательно, четырёхугольник  $ABCD$  есть квадрат.

Найдём проекцию вектора  $\vec{AB}$  на направление, заданное вектором  $\vec{BC}$ . Из формул (3.3.2), (3.3.3), и (3.2.3) следует, что

$$\text{пр}_{\vec{BC}} \vec{AB} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BC}|} \left( \text{пр}_{\vec{BC}} \vec{BC} = \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} \right), \text{ т.е. } \text{пр}_{\vec{BC}} \vec{AB} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{BC}}{\sqrt{BC_x^2 + BC_y^2 + BC_z^2}} \quad (3.3.4).$$

Пример 3. Даны векторы  $\vec{a}_1 = (3; -6; -1)$ ;  $\vec{a}_2 = (1; 4; -5)$ ;  $\vec{a}_3 = (3; -4; 12)$ .

Найти  $\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{a}_2$ ,  $\text{pr}_{\vec{a}_1} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$ .

Решение. Применим формулу (3.3.4)

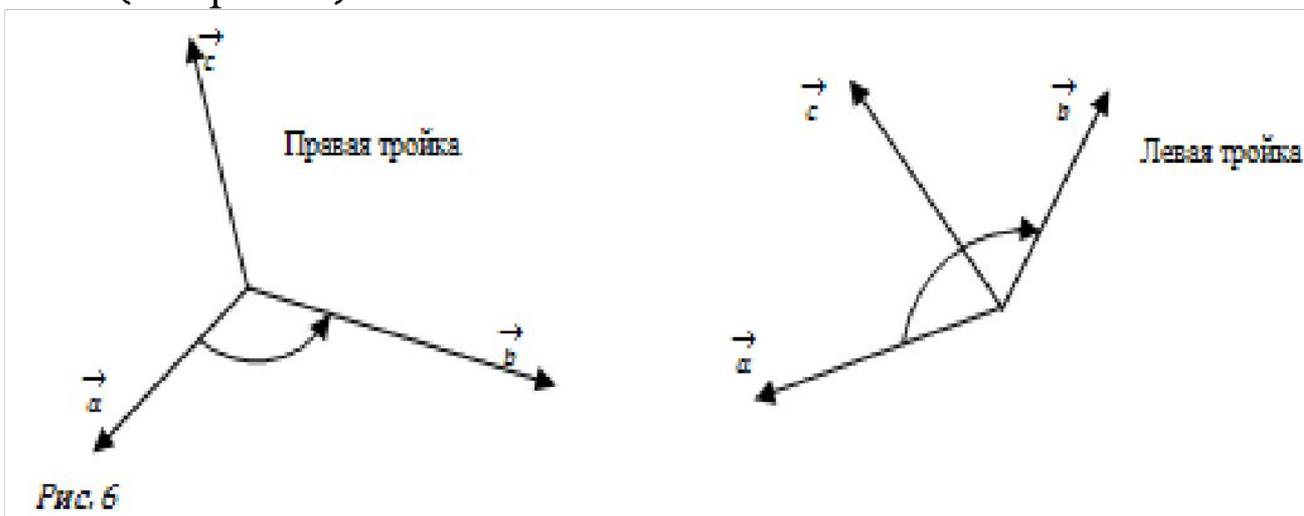
$$\text{pr}_{\vec{a}_1} \vec{a}_2 = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1|} = \frac{3 \cdot 1 + (-6) \cdot 4 + (-1) \cdot (-5)}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-1)^2}} = -\frac{16}{\sqrt{46}}$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (4; -2; -6)$$

$$\text{pr}_{\vec{a}_1} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_1 + \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1|} = \frac{3 \cdot 4 + (-6) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-6)}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-1)^2}} = -4.$$

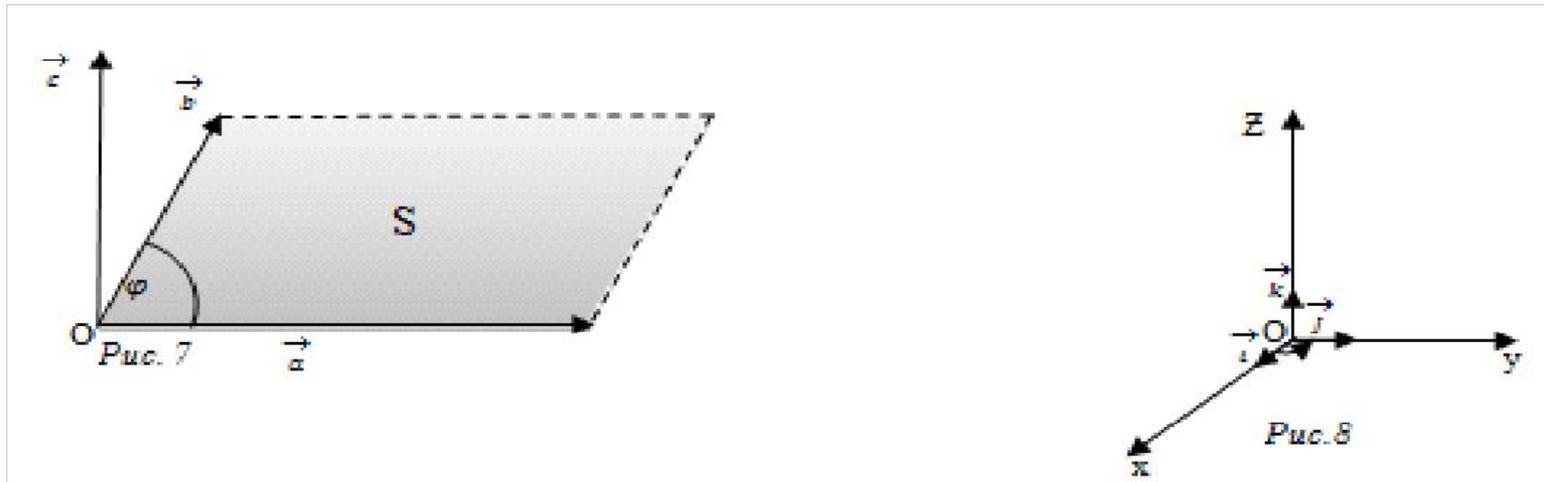
# Векторное произведение векторов и его свойства

Три некопланарных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора  $\vec{c}$  кратчайший поворот от первого вектора  $\vec{a}$  ко второму вектору  $\vec{b}$  виден совершающимся против часовой стрелки, и левую, если по часовой (см. рис. 6).



Векторным произведением вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , определяемый условиями:

- 1) Вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т.е.  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;
- 2) Длина вектора  $\vec{c}$  равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  как на сторонах (см. рис. 7), т.е.  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ ,  $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ ; (3.4.1).
- 3) Векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют правую тройку.



Векторное произведение обозначается  $\vec{a} \times \vec{b}$  или  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  (см. рис. 8):

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Свойства векторного произведения:

1.  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$  (антиперестановочность);

2.  $\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b}$  (сочетательность по отношению к скалярному множителю);

3.  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$  (распределительность).

4. Два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т.е.  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

В частности,  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$ .

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  заданы своими координатами

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ , то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ или } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 & a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ - & - & - \end{vmatrix} \quad (3.4.2).$$

Для вычисления площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  применяется формула  $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$  (3.4.3), которая вытекает из формулы (3.4.1). Следовательно, площадь треугольника, построенного на этих векторах, выражается формулой

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

*Пример 4.* Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$  и  $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$  где  $|\vec{e}_1| = 4$ ,  $|\vec{e}_2| = 3$ ,  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{3}{4}\pi$ .

Решение. По формуле (3.4.3) получаем

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Согласно свойствам векторного произведения получаем:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \times (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \\ &= 6\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 - 3\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + 4\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 \\ &= 4\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 - 3\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = 7\vec{e}_2 \times \vec{e}_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |7(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)| = 7 |\vec{e}_2 \times \vec{e}_1| = 7 |\vec{e}_2| |\vec{e}_1| \sin \frac{3}{4}\pi = 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}.$$

$$4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}.$$

Ответ:  $42\sqrt{2}$ .

## Смешанное произведение векторов

Рассмотрим произведение векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$ , составленное следующим образом:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ . Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется векторно-скалярным, или смешанным произведением трёх векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Геометрически смешанное произведение интерпретируется как число, равное объёму параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  как на ребрах. Смешанное произведение векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  положительно, если данные векторы образуют правую тройку, и отрицательно – если левую.

Свойства смешанного произведения:

1.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$  т.е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов.

2.  $(\alpha \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ , т.е. смешанное произведение не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения. *Замечание:* это позволяет записывать смешанное произведение векторов  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  в виде  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$  без знаков векторного, скалярного умножения.

3.  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b} = -\vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a}$  т.е. смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов – сомножителей.

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Пусть векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  заданы своими координатами  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$ . Найдём их смешанное произведение, используя формулу (3.4.2) и свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \\
 &= \left( \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right) \cdot \\
 & (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \\
 & + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z
 \end{aligned}$$

Воспользуясь свойствами определителей, полученную формулу можно записать и так:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (3.5.1).$$

Векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, т.е. когда  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ,  $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{c} \neq 0$ .

Нетрудно показать, что объём параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  вычисляется как  $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ , а объём треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах равен  $V = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ .

*Пример 5.* Показать, что точки  $A(3; -4; 1)$ ,  $B(2; -3; 7)$ ;  $C(1; -4; 3)$ ,  $D(4; -3; 5)$  лежат в одной плоскости.

Решение. Если точки

$$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3), \\ D(x_0; y_0; z_0)$$

лежат в одной плоскости, то объём тетраэдра  $ABCD$  равен нулю. Из формулы (3.5.2) получаем необходимое и достаточное условие компланарности четырёх точек:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя координаты точек  $A, B, C, D$  в определитель, стоящий в правой части формулы, получаем

$$\begin{vmatrix} 3 - 4 & -4 - (-3) & 1 - 3 \\ 2 - 4 & -3 - (-3) & 7 - 3 \\ 1 - 4 & -4 - (-3) & 3 - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$