ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вектор – это направленный отрезок. Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. Вектор $\overline{BA}$ называется противоположным вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

<u>Длиной</u> или <u>модулем</u> вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется <u>нулевым</u> вектором и обозначается $\bar{0}$. Нулевой вектор направления не имеет. Вектор, длина которого равна единице, называется <u>единичным</u> вектором и обозначается через $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется <u>ортом</u> вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^0$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записываются $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными ($\vec{a} = \vec{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трёх векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

Операции с векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Для суммы двух векторов есть правило треугольника, а также правило параллелограмма.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda \cdot \vec{a}$ или $(\vec{a} \cdot \lambda)$, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) если $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, то $\vec{b} \parallel \vec{a}$. Наоборот, если $\vec{b} \parallel \vec{a}$, $(\vec{a} \neq \vec{0})$, то при некотором λ верно равенство $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$;

2) $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, т.е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{a}$,
4. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a}$,
5. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$.

ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в пространстве задана ось l. Проекцией точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опушенного из точки на ось (см. рис. 1)

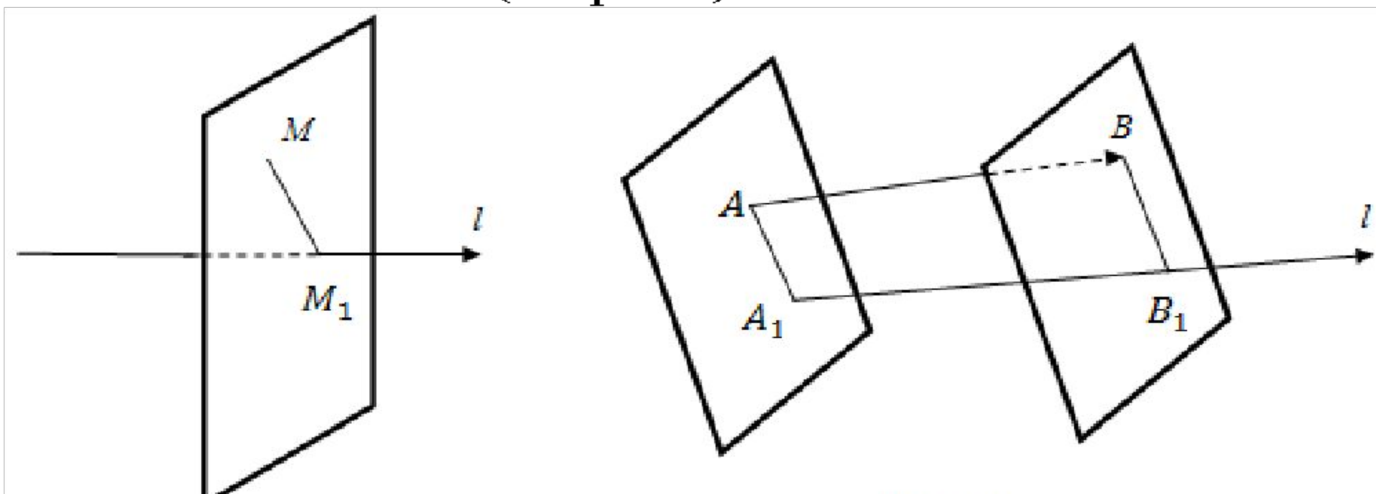

Рисунок 1

Рисунок 2

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены (см. рис. 2).

Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\overline{A_1B_1}=0$), то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается так: пр$_l\overline{AB}$. Если $\overline{AB}=0$ или $\overline{AB}\perp l$, то пр$_l\overline{AB}=0$.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОЕКЦИИ

Свойство 1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е.

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Следствие 1. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если угол – прямой.

Следствие 2. Проекция равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Свойство 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось, т.е. $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b} + \text{пр}_l \vec{c}$.

Свойство 3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т.е. $\text{пр}_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \vec{a}$.

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

Разложение вектора по ортам координатных осей

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные векторы (орты), обозначаемые $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно (см. рис. 3).

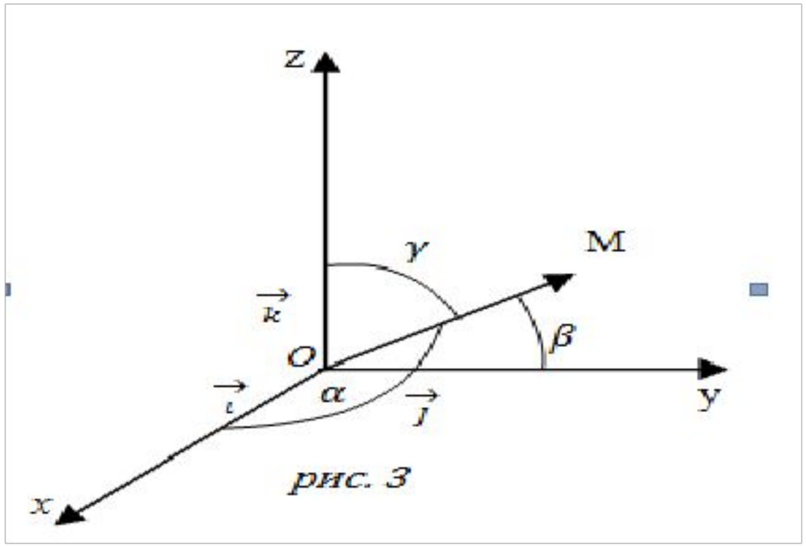

рис. 3

Выберем произвольный вектор $\vec{a} = \overline{OM}$. Обозначим проекции вектора $\vec{a} = \overline{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно через a_x, a_y и a_z.

Тогда получаем

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, (3.2.1).

Эта формула называется разложением вектора по ортам координатных осей. Числа a_x, a_y и a_z называются координатами вектора $\vec{a}$.

На основе теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда получаем

$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ (3.2.2).

Отсюда получим

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (3.2.3).

(3.2.3) – это формула для вычисления модуля (длины) вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем

$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha,\ a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta,\ a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$ (3.2.4)

Из формул (3.2.4) вытекает, что

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}.$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

СЛОЖЕНИЕ, УМНОЖЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ВЕКТОРА

Подставим выражения (3.2.4) в равенство (3.2.2), получаем

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cos^2\alpha + |\bar{a}|^2 \cos^2\beta + |\bar{a}|^2 \cos^2\gamma.$$

Сократив на $|\bar{a}|^2 \neq 0$, получим соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Заметим, что координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т.е. $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Пусть $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$.

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можем записать:

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k} \Leftrightarrow \bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$.

Т.е. при сложении (вычитании) векторов их одноимённые координаты складываются (вычитаются).

2. $\lambda\bar{a} = \lambda a_x \bar{i} + \lambda a_y \bar{j} + \lambda a_z \bar{k} \Leftrightarrow \lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$.

Т.е. при умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это число.

РАВЕНСТВО И КОЛЛИНЕАРНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны ($\vec{a} = \vec{b}$) тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$; $a_z = b_z$.

Выясним условия коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами.

$\vec{a} \parallel \vec{b} <=> \vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ – некоторое число. Следовательно

$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \lambda(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \lambda b_x\vec{i} + \lambda b_y\vec{j} + \lambda b_z\vec{k}.$$

Отсюда получим

$a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$,

т.е.

$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda,\ \frac{a_y}{b_y} = \lambda,\ \frac{a_z}{b_z} = \lambda \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Таким образом, проекции коллинеарных векторов пропорциональны.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается одним из символов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \qquad (3.3.1)$$

где $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$.

Так как $|\vec{a}|\cdot\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ (см. рис. 5),

$|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, то получаем:

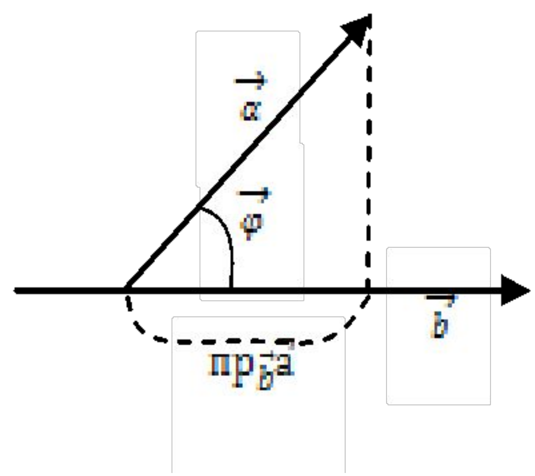

Рис. 5.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = = |\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\bar a \cdot \bar b = \bar b \cdot \bar a$ (свойство переместительности);
2. $\lambda(\bar a \cdot \bar b) = (\lambda \bar a) \cdot \bar b = \bar a \cdot (\lambda \bar b)$ (свойство сочетательности);
3. $\bar a \cdot (\bar b + \bar c) = \bar a \cdot \bar b + \bar a \cdot \bar c$ (свойство распределительности);
4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\bar a \cdot \bar a = |\bar a|^2$. В частности: $\bar i^2 = \bar j^2 = \bar k^2 = 1$.
5. Если векторы $\bar a$ и $\bar b$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т.е. если $\bar a \perp \bar b$, то $\bar a \cdot \bar b = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\bar a \cdot \bar b = 0$ и $\bar a \neq 0$, $\bar b \neq 0$, то $\bar a \perp \bar b$.

Пример 1. Найти длину вектора $\vec{c} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(4\vec{a} + 5\vec{b})^2} = \sqrt{16\vec{a}^2 + 40\vec{a}\vec{b} + 25\vec{b}^2} =$$

$$= \sqrt{16 \cdot 9 + 40 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot 16} = \sqrt{784} = 28$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, скалярные произведения которых равно нулю, называются ортогональными.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (3.3.3).$$

Формула (3.3.3) легко выводится из свойств скалярного произведения.

*Пример 2.*Показать,что четырёхугольник с вершинами *A* (-5; 3; 4), *B* (-1; -7; 5), *C* (6, -5, -3), *D* (2; 5; -4) есть квадрат.

Решение. Находим векторы.

[illegible] = (4; - 10; 1), [illegible] = (7; 2; -8), [illegible] = (4; -10; 1), [illegible] = (7; 2; -8).

Сравнивая координаты этих векторов, заключаем, что

[illegible] = [illegible], [illegible] = [illegible].

Так как

$|$ [illegible] $| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117}$, $|$ [illegible] $| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{117}$,

то

| [illegible] | = | [illegible] | = | [illegible] | = | [illegible] |.

А поскольку

[illegible] [illegible] $= 4 \cdot 7 + (-10) \cdot 2 + 1 \cdot (-8) = 0$,

то [illegible] ⊥ [illegible]

Следовательно, четырёхугольник *ABCD* есть квадрат.

Найдём проекцию вектора [illegible] на направление, заданное вектором [illegible]. Из формул (3.3.2), (3.3.3), и (3.2.3) следует, что

пр[illegible] = [illegible] (пр[illegible] = [illegible]), т.е. пр[illegible] = [illegible] (3.3.4).

Пример 3. Даны векторы $\vec{a} = (3; -6; -1)$; $\vec{b} = (1; 4; -5)$; $\vec{c} = (3; -4; 12)$.

Найти $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$; $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

Решение. Применим формулу (3.3.4)

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{3\cdot 1 + (-6)\cdot 4 + (-1)\cdot(-5)}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-1)^2}} = -\frac{16}{\sqrt{46}}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (4; -2; -6)$$

$$\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\vec{c}(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{c}|} = \frac{3\cdot 4 + (-4)\cdot(-2) + 12\cdot(-6)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = -4.$$

Векторное произведение векторов и его свойства

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся противчасовой стрелки, и левую, если по часовой (см. рис. 6).

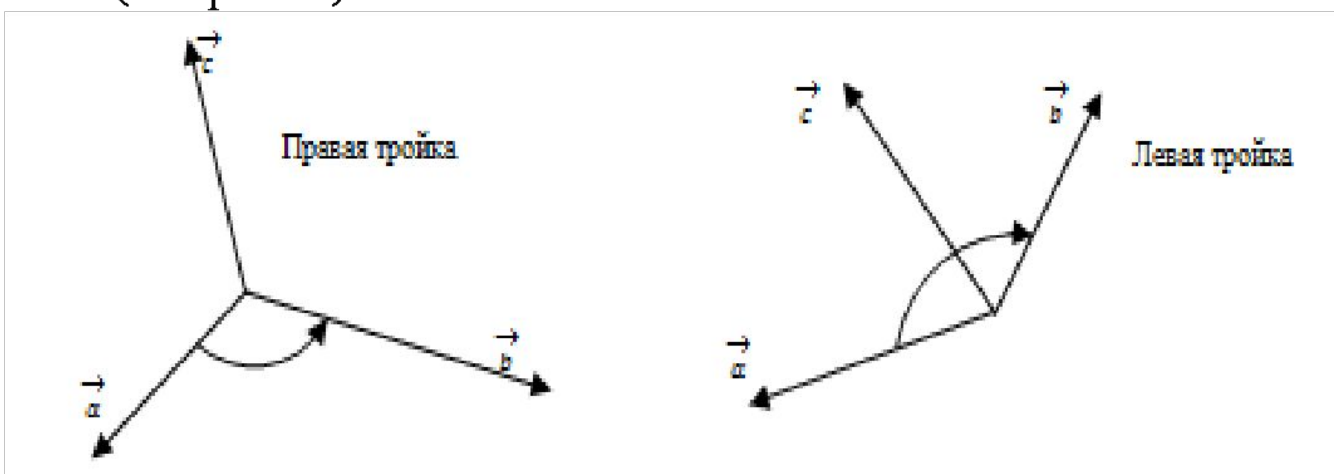

Рис. 6

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый условиями:

1) Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) Длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (см. рис. 7), т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$; (3.4.1).

3) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

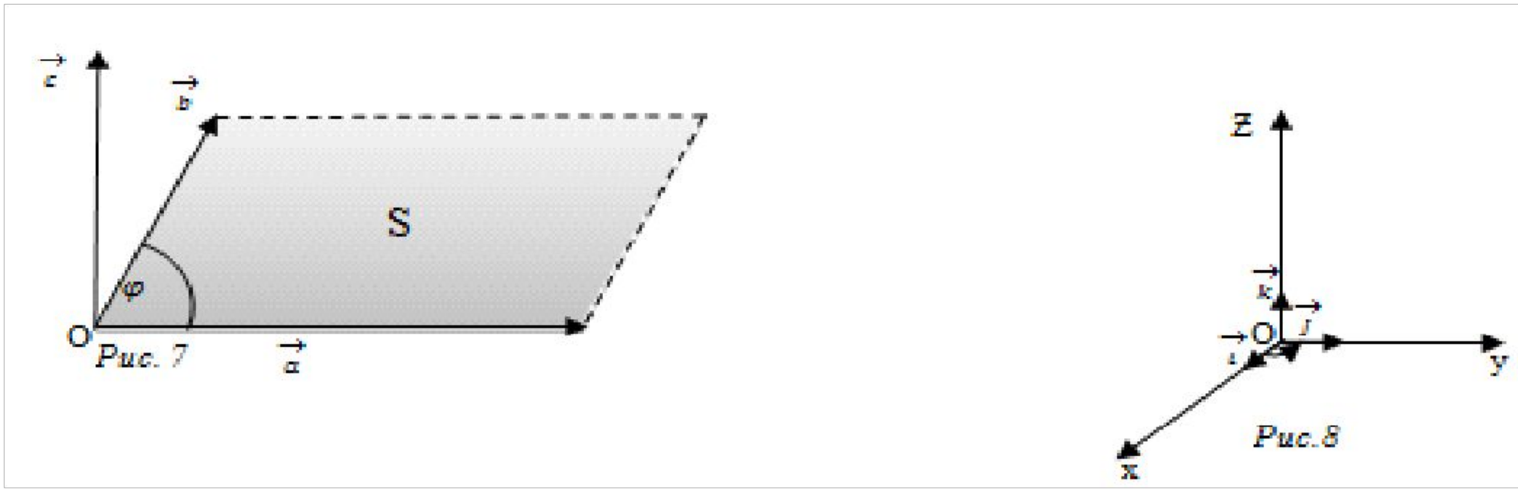

Рис. 7

Рис.8

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ (см. рис. 8):

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

Свойства векторного произведения:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ (антиперестановочность);

2. $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю);

3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (распределительность).

4. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т.е. $\bar{a} \parallel \bar{b} <=> \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

В частности, $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами

$\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \text{ или } \bar{a} \times \bar{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) \quad (3.4.2).$$

Для вычисления площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяется формула $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$ (3.4.3), которая вытекает из формулы (3.4.1). Следовательно, площадь треугольника, построенного на этих векторах, выражается формулой

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Пример 4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, где $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{3}{4}\pi$.

<u>Решение</u>. По формуле (3.4.3) получаем

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Согласно свойствам векторного произведения получаем:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3\vec{p} + 2\vec{q}) \times (2\vec{p} - \vec{q})$$
$$= 6(\vec{p} \times \vec{p}) - 3(\vec{p} \times \vec{q}) + 4(\vec{q} \times \vec{p}) - 2(\vec{q} \times \vec{q})$$
$$= 4(\vec{q} \times \vec{p}) - 3(\vec{p} \times \vec{q}) = 7(\vec{q} \times \vec{p}).$$

Следовательно,

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |7(\vec{q} \times \vec{p})| = 7 \cdot |\vec{q} \times \vec{p}| = 7 \cdot |\vec{q}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\frac{3}{4}\pi = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}.$$

Ответ: $42\sqrt{2}$.

Смешанное произведение векторов

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется векторно-скалярным, или смешанным произведением трёх векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Геометрически смешанное произведение интерпретируется как число, равное объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ как на ребрах. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ положительно, если данные векторы образуют правую тройку, и отрицательно – если левую.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\bar a \times \bar b)\cdot\bar c = (\bar b \times \bar c)\cdot\bar a = (\bar c \times \bar a)\cdot\bar b$, т.е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов.

2. $(\bar a \times \bar b)\cdot\bar c = \bar a\cdot(\bar b \times \bar c)$, т.е. смешанное произведение не меняется при перестановке знаков векторного и скалярного умножения. *Замечание:* это позволяет записывать смешанное произведение векторов $(\bar a \times \bar b)\cdot\bar c$ в виде $\bar a\bar b\bar c$ без знаков векторного, скалярного умножения.

3. $\bar a\bar b\bar c = -\bar a\bar c\bar b = -\bar b\bar a\bar c = -\bar c\bar b\bar a$, т.е. смешанное произведение меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух векторов – сомножителей.

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ равны нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$. Найдём их смешанное произведение, используя формулу (3.4.2) и свойства скалярного произведения:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right) \cdot$$

$$(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z$$

Воспользуясь свойствами определителей, полученную формулу можно записать и так:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (3.5.1).$$

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, т.е. когда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ ($\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, $\vec{c} \neq 0$).

Нетрудно показать, что объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется как $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, а объём треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах равен $V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Пример 5. Показать, что точки *A* (3; -4; 1), *B* (2; -3; 7); *C* (1; -4; 3), *D* (4; -3; 5) лежат в одной плоскости.

Решение. Если точки

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_2; y_3; z_3)$, $D(x_0; y_0; z_0)$

лежат в одной плоскости, то объём тетраэдра *ABCD* равен нулю. Из формулы (3.5.2) получаем необходимое и достаточное условие компланарности четырёх точек:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя координаты точек *A, B, C, D* в определитель, стоящий в правой части формулы, получаем

$$\begin{vmatrix} 3-4 & -4-(-3) & 1-5 \\ 2-4 & -3-(-3) & 7-5 \\ 1-4 & -4-(-3) & 3-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$