

Численное интегрирование

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

для некоторой заданной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$.

Формула Ньютона-
Лейбница:

$$I = F(b) - F(a), \text{ где}$$

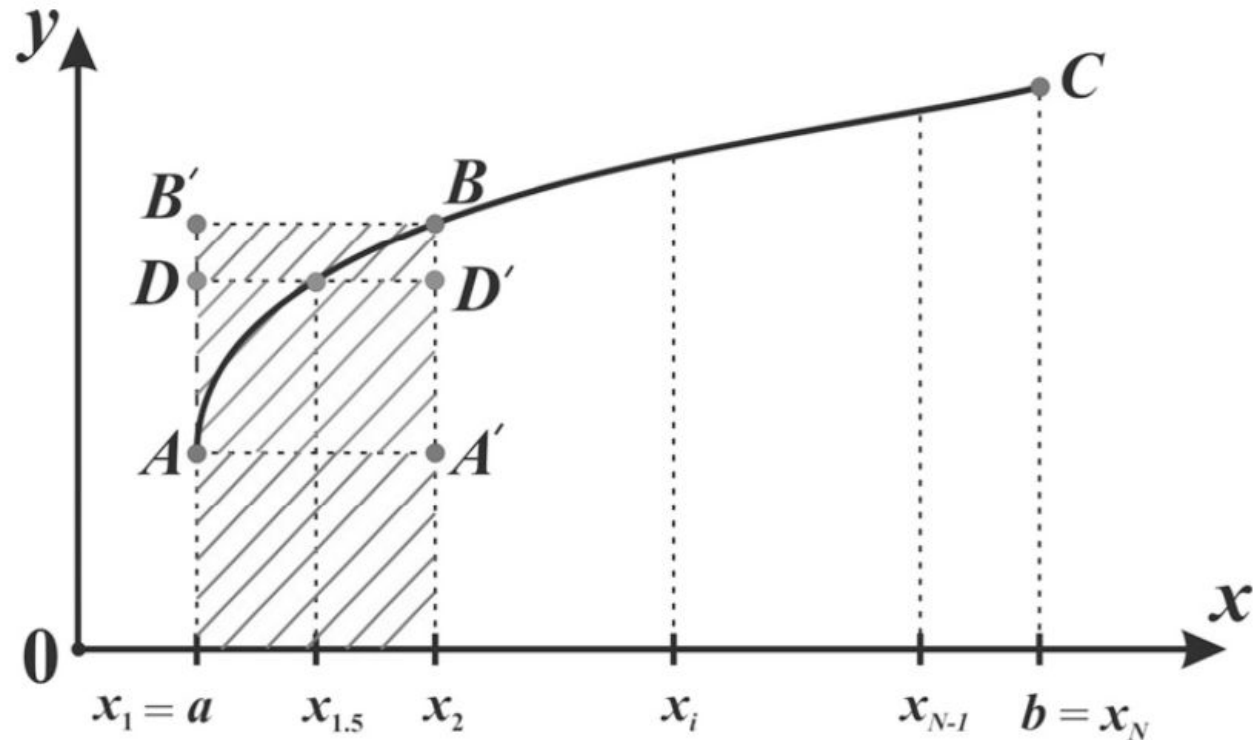
$F(x)$ – некоторая первообразная для данной функции $f(x)$.

Не существование
первообразной:

$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{\ln(x)} \quad \text{и т.д.}$$

Формула прямоугольников

Предположим, что $f(x)$ имеет следующий график.



отрезок $[a, b]$ разбивают на несколько частей $(N-1)$, т.е.

вводят разбиение, состоящее из N узлов: $x_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad x_1 = a, \dots, x_N = b.$

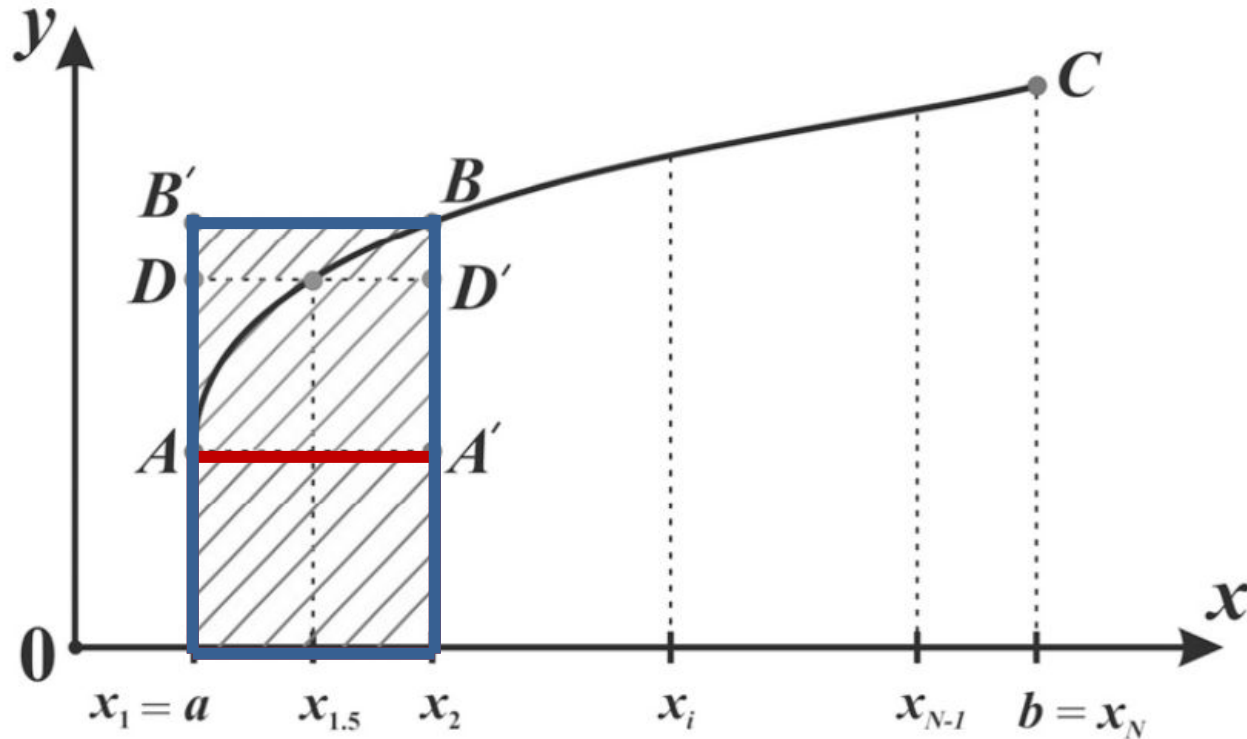
Будем считать узлы равноотстоящими: $h = \frac{b-a}{N-1}$.

Рассматриваем
прямоугольники:

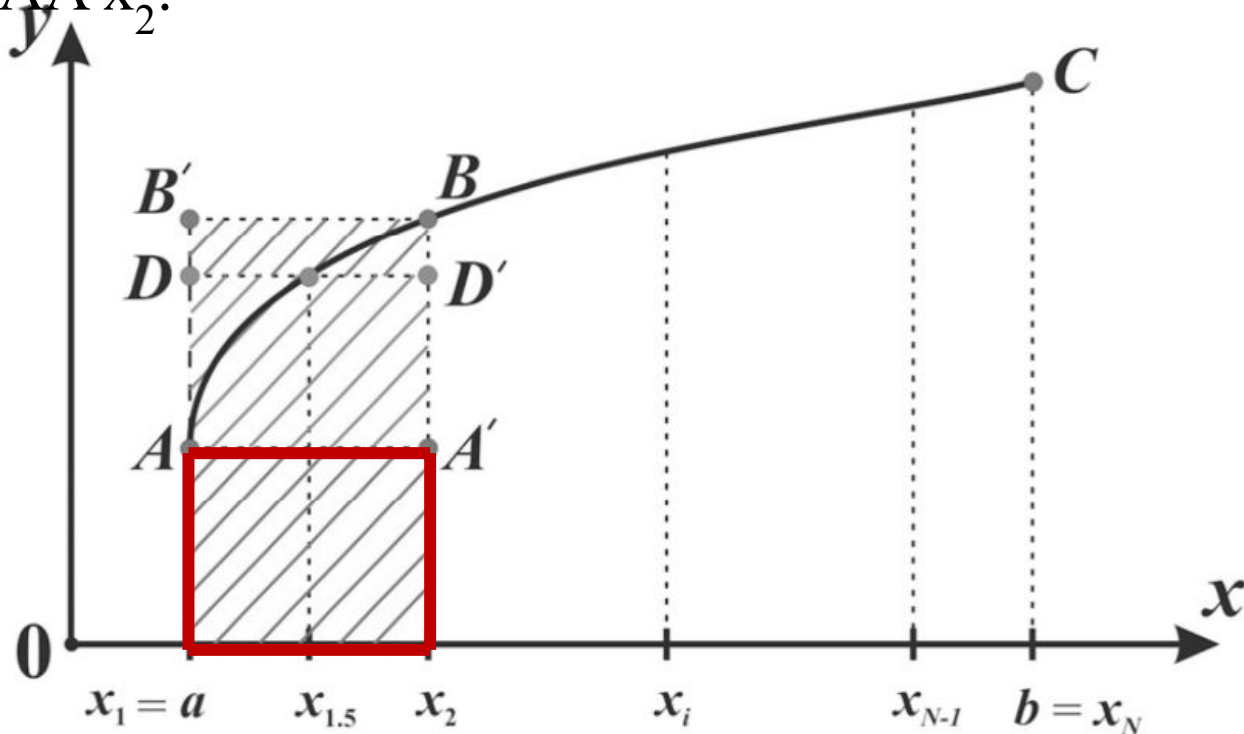
или вводим промежуточный
узел:

$x_1x_2A'A$, или x_1x_2BB'

$$x_{1.5} = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \frac{h}{2}.$$



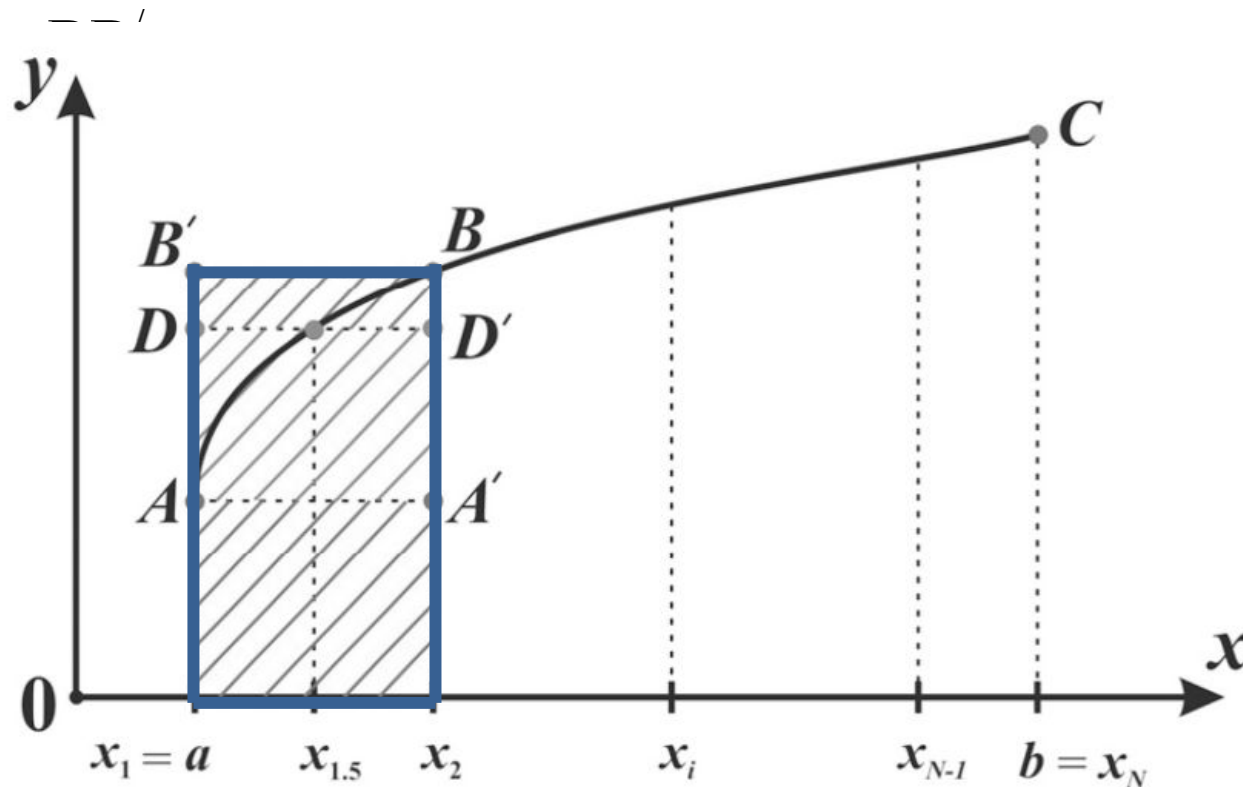
Если рассматриваем
прямоугольник $x_1 A A' x_2$:



Формула левых
прямоу.

$$I = \int_a^b f(x) dx = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + \dots + h \cdot f(x_{N-1}) = h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i).$$

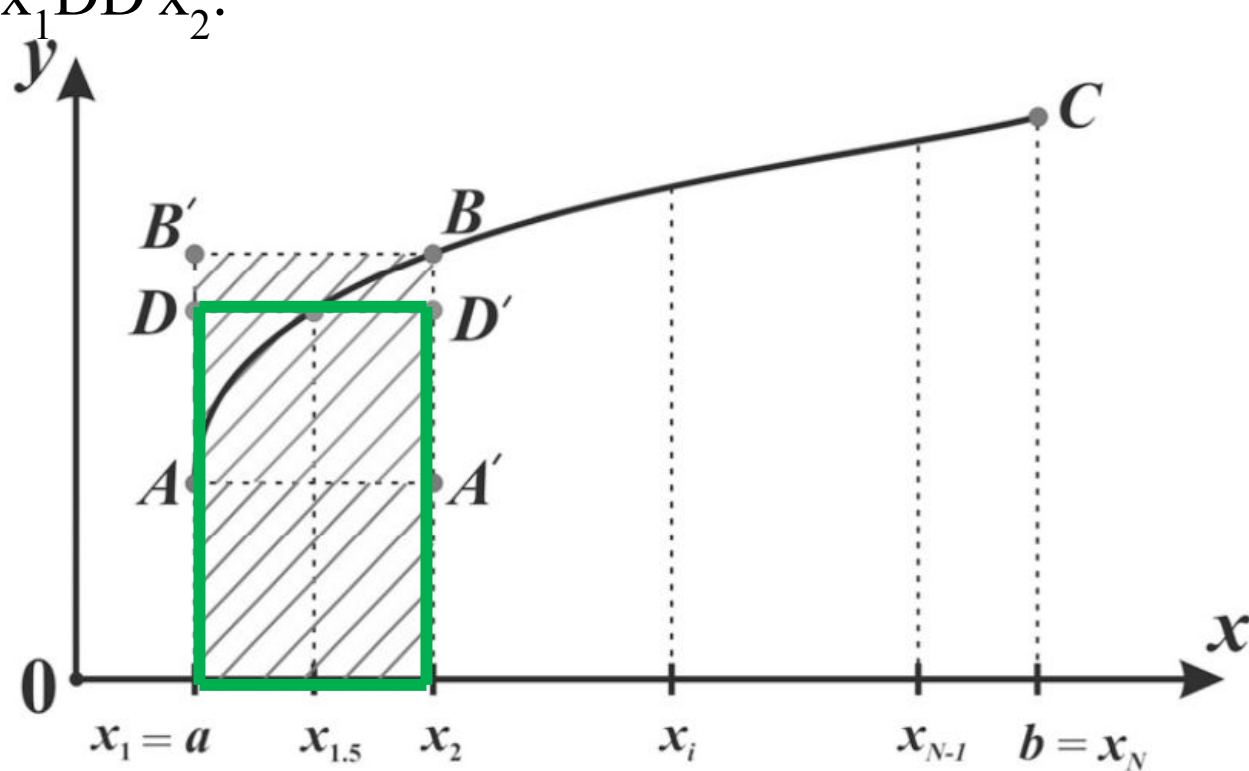
Если рассматриваем
прямоугольни



Формула правых
прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x) dx = h \cdot f(x_2) + h \cdot f(x_3) + \dots + h \cdot f(x_N) = h \sum_{i=2}^N f(x_i).$$

Если рассматриваем
прямоугольник $x_1DD'x_2$:

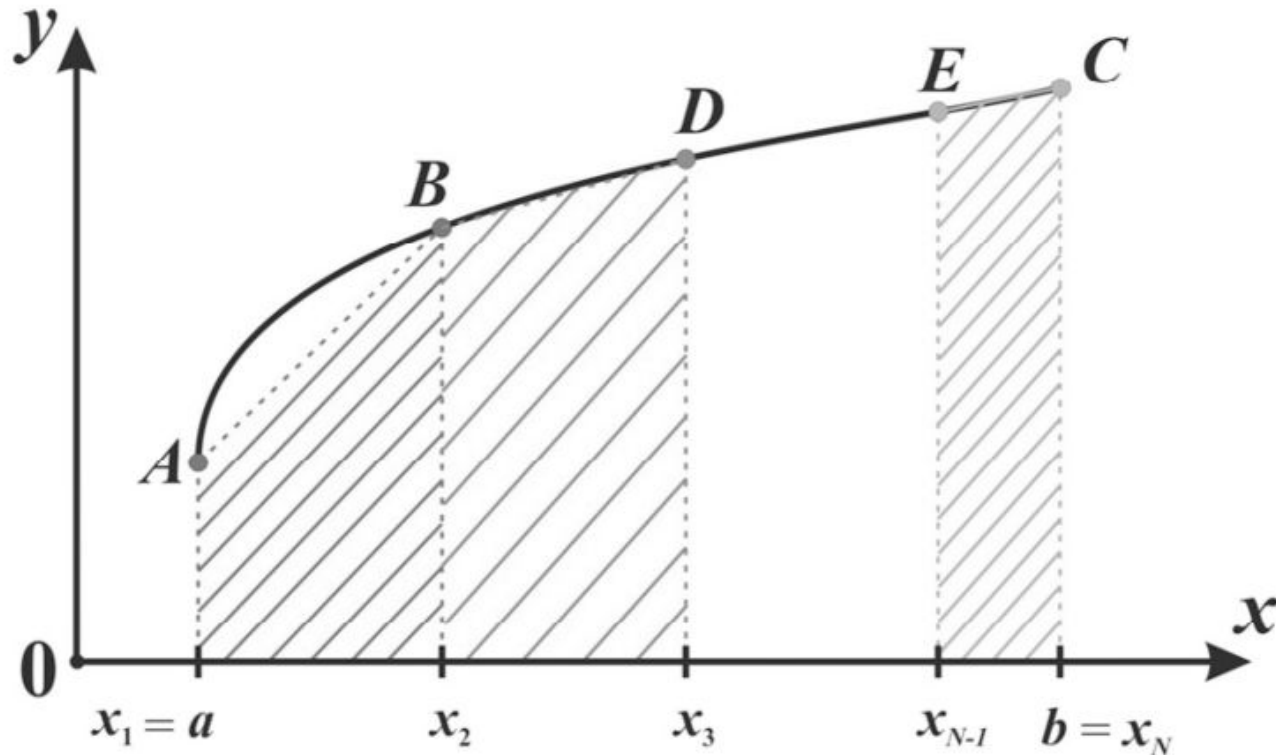


Формула средних
прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x) dx = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) + \dots + h \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h}{2}\right) = h \sum_{i=1}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

Формула трапеций

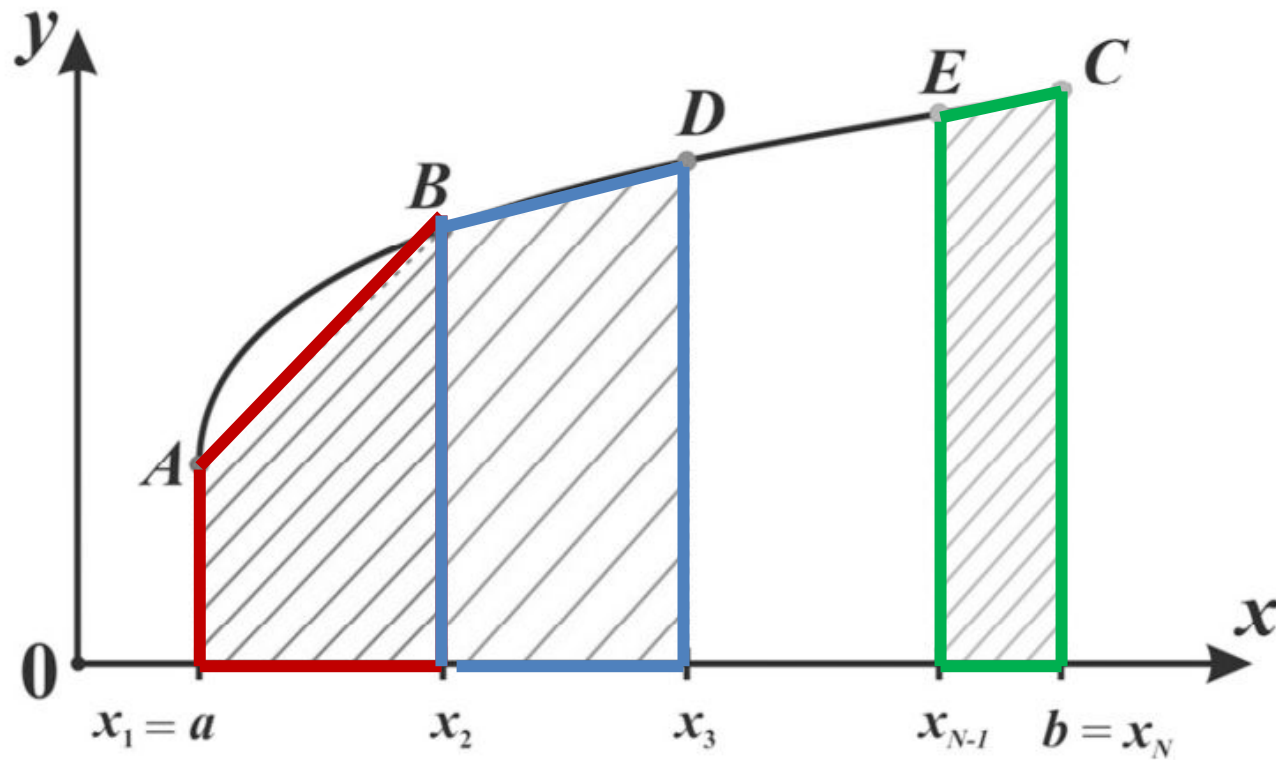
Предположим, что $f(x)$ имеет следующий график.



отрезок $[a, b]$ разбивают на $(N-1)$ частей, т.е. вводят разбиение,

состоящее из N узлов: x_i , $i = \overline{1, N}$; $x_1 = a, \dots, x_N = b$, $h = \frac{b-a}{N-1}$.

Рассматриваем трапеции: $aABx_2$, x_2BDx_3 , $x_{N-1}ECb$.



$$S_{aABx_2} = h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{h}{2} \cdot (f_1 + f_2);$$

$$S_{x_2BDx_3} = \frac{h}{2} \cdot (f_2 + f_3);$$

.....

$$S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} \cdot (f_{N-1} + f_N);$$

$$I = S_{aABx_2} + S_{x_2BDx_3} + \dots + S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} \cdot (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{N-1} + f_N).$$

В общем виде $\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=2}^{N-1} f_i \right).$

Формула Симпсона(метод парабол):

Найдем площадь криволинейной трапеции,
ограниченной сверху $y = ax^2 + bx + c$,

графиком параболы:

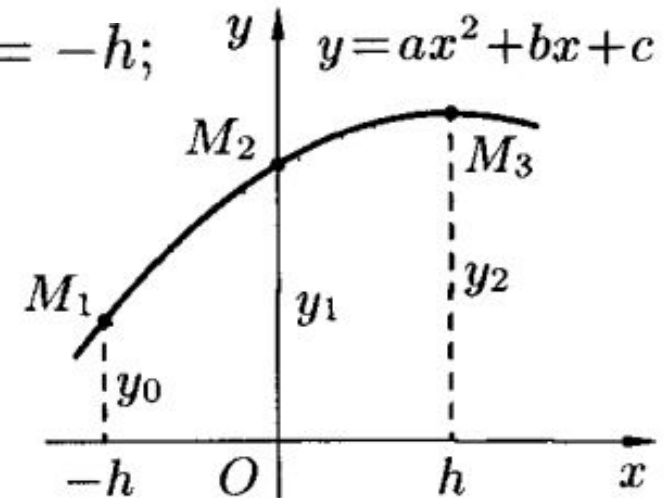
сбоку прямыми: $x = -h, x = h$ снизу — отрезком $[-h; h]$.

$$M_1(-h; y_0), M_2(0; y_1), M_3(h; y_2)$$

$y_0 = ah^2 - bh + c$ — ордината параболы в точке $x = -h$;

$y_1 = c$ — ордината параболы в точке $x = 0$

$y_2 = ah^2 + bh + c$ — ордината параболы в точке
 $x = h$



$$S = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left(a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch.$$

Выразим эту площадь через h , y_0 , y_1 , y_2 .

$$c = y_1, \quad a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3}h^3 \cdot \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 = \\ &= \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned}$$

Получим теперь формулу парабол для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

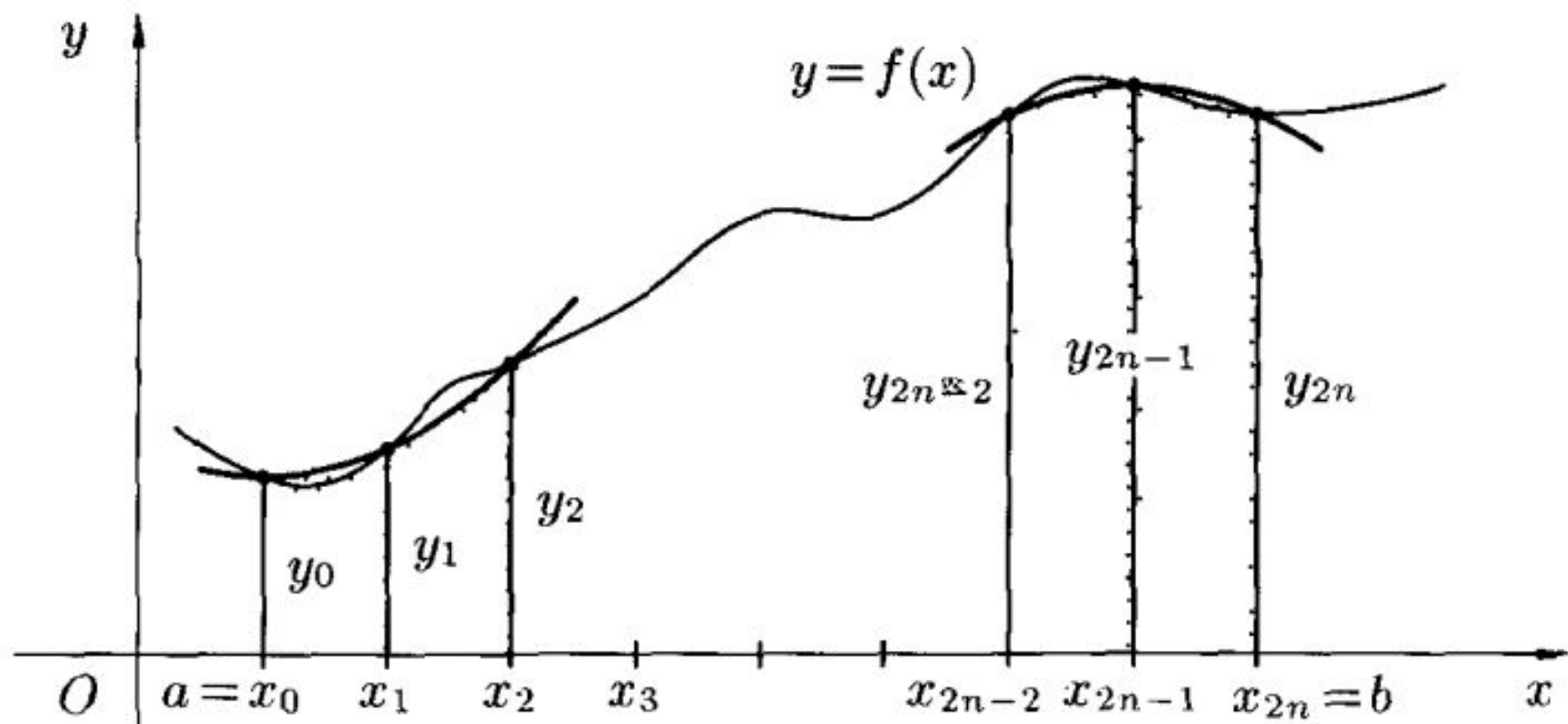
отрезок $[a; b]$ разобьем на $2n$ равных частей (отрезков)

длиной $h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 2n$).

$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$

$f(x): y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$, где $y_i = f(x_i)$

:



$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Аналогично находим

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4), \dots,$$

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + \right. \\ \left. + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \right).$$

Примеры вычисления определенного интеграла:

Дано: $f(x) = 2x - 1, \quad x \in [1, 5]$.

Вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ с использованием формул

прямоугольников, трапеций и Симпсона при $N = 5$ (N – число узлов).

Проанализировать результат при изменении числа узлов.

Решение.

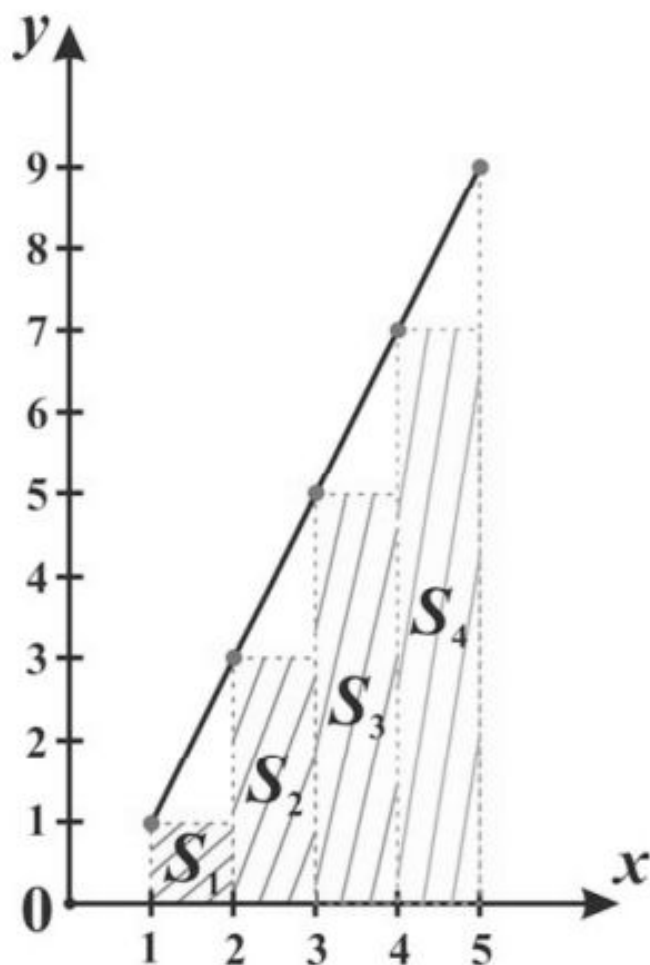
Сначала проведем вычисление интеграла аналитически на основе формулы

Ньютона-Лейбница: $I = \int_1^5 (2x - 1) dx = (x^2 - x) \Big|_1^5 = 20.$

определим шаг интегрирования:

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{5-1} = 1.$$

a) МЕТОД ЛЕВЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_1 \cdot h = 1;$$

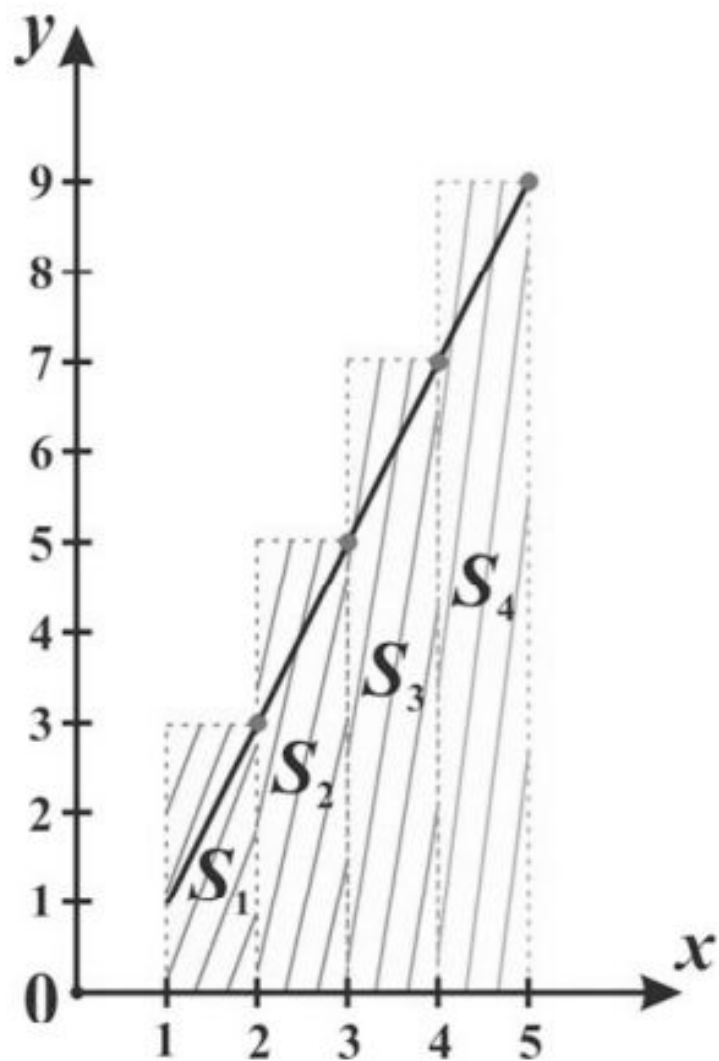
$$S_2 = y_2 \cdot h = 3;$$

$$S_3 = y_3 \cdot h = 5;$$

$$S_4 = y_4 \cdot h = 7;$$

$$I = \sum_i S_i = 16.$$

b) метод правых прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_2 \cdot h = 3;$$

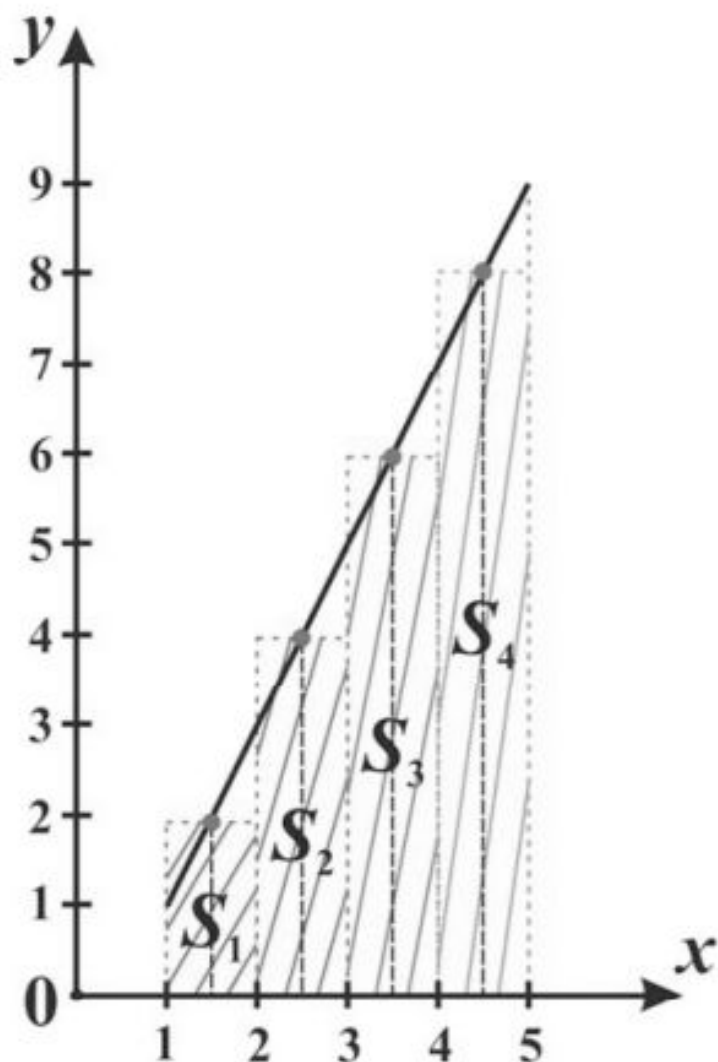
$$S_2 = y_3 \cdot h = 5;$$

$$S_3 = y_4 \cdot h = 7;$$

$$S_4 = y_5 \cdot h = 9;$$

$$I = \sum_i S_i = 24.$$

с) метод средних прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1.5	2.5	3.5	4.5
y_i	2	4	6	8

$$S_1 = f(x_{1.5}) \cdot h = 2;$$

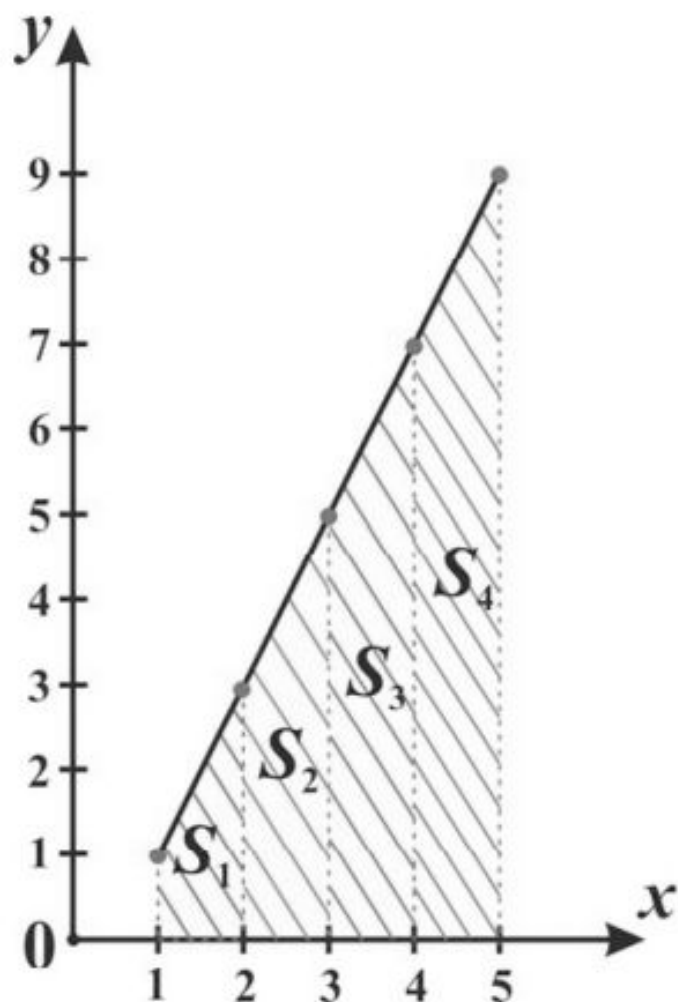
$$S_2 = f(x_{2.5}) \cdot h = 4;$$

$$S_3 = f(x_{3.5}) \cdot h = 6;$$

$$S_4 = f(x_{4.5}) \cdot h = 8;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

d) метод трапеций



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) = 2;$$

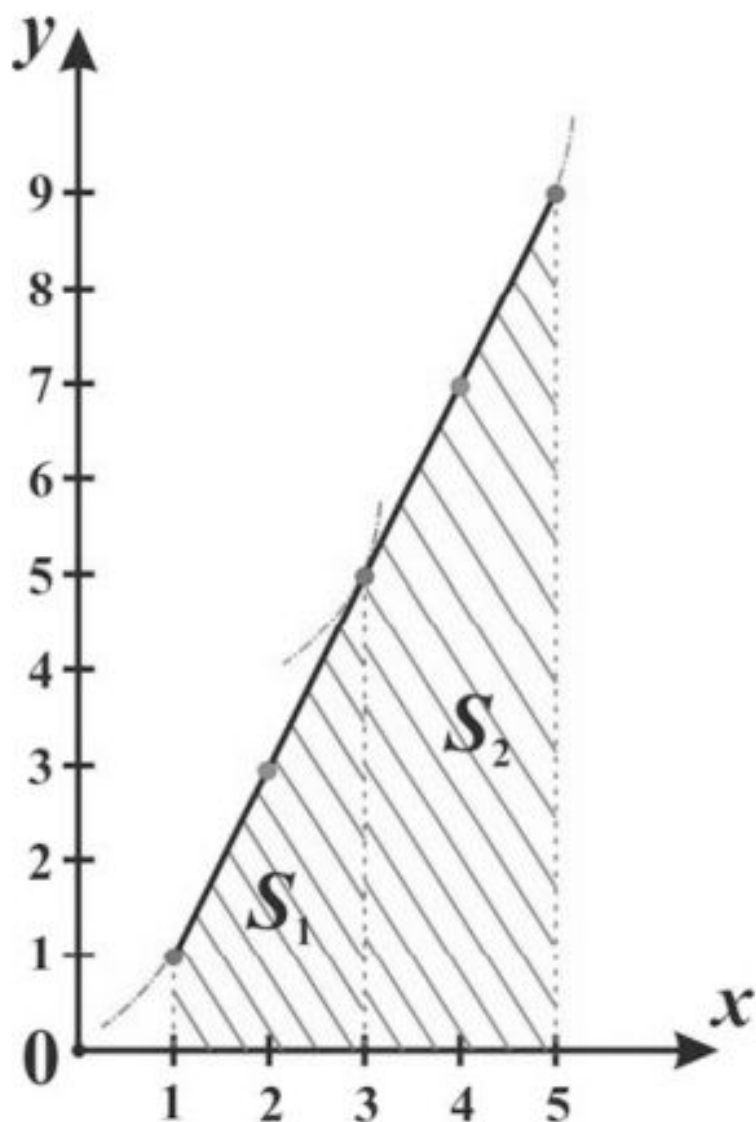
$$S_2 = \frac{h}{2}(f_2 + f_3) = 4;$$

$$S_3 = \frac{h}{2}(f_3 + f_4) = 6;$$

$$S_4 = \frac{h}{2}(f_4 + f_5) = 8;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

е) метод Симпсона (метод парабол)



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{3}(f_1 + 4f_2 + f_3) = 6;$$

$$S_2 = \frac{h}{3}(f_3 + 4f_4 + f_5) = 14$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

Увеличим число узлов до $N = 11$: $h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{11-1} = 0.4$.

x_i	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8	4.2	4.6	5.0
y_i	1.0	1.8	2.6	3.4	4.2	5.0	5.8	6.6	7.4	8.2	9.0

По формуле левых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} y_i = 18.4.$$

По формуле правых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=2}^N f(x_i) = h \cdot \sum_{i=2}^N y_i = 21.6.$$

Увеличение количества узлов приводит к уточнению значения определенного интеграла.

Полиномиальная интерполяция

Задача аппроксимации функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ состоит в построении для заданной функции $f(x)$ такой функции $\varphi(x)$, что

$$f(x) \approx \varphi(x)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть в точках x_0, x_1, \dots, x_n таких, что $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ($x_i, i = \overline{1, n}$ – узлы) известны значения функции $y = f(x)$, т.е. на отрезке $[a, b]$ задана табличная (сеточная) функция

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей или интерполяционной для $f(x)$ на $[a, b]$, если ее значения $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ в заданных точках x_0, x_1, \dots, x_n , называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями функции $f(x)$, т.е. с y_0, y_1, \dots, y_n :

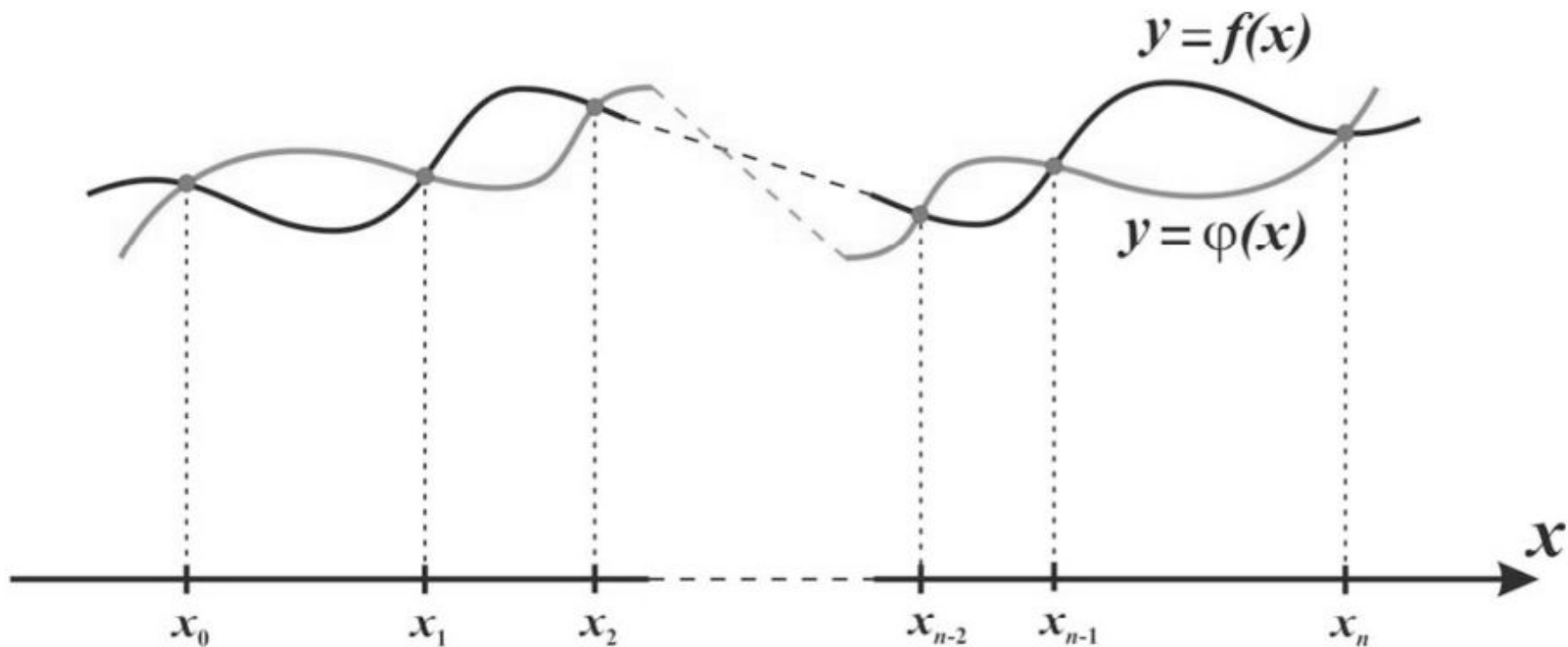
$$\varphi(x_0) = y_0,$$

$$\varphi(x_1) = y_1,$$

.....

$$\varphi(x_n) = y_n$$

Геометрически факт интерполирования означает, что график функции $\varphi(x)$ проходит так, что, по меньшей мере, в $n+1$ заданных точках он пересекает или касается графика функции $f(x)$.



задача полиномиальной интерполяции формулируется так:

для функции $f(x)$, заданной таблицей (1) найти многочлен $P_n(x)$

такой, что выполняется совокупность условий интерполяции

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

найти его $n+1$ коэффициент a_0, a_1, \dots, a_n .

Коэффициенты многочлена
должны удовлетворять
условию:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ \text{-----} \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n. \end{array} \right.$$

Данный подход
малоэффективен

Другой подход:

Будем строить многочлен n -й степени $L_n(x)$ в виде линейной комбинации $\sum_{i=0}^n c_i l_i(x)$ многочленов n -й степени $l_i(x)$ (i – номер многочлена).

чтобы такой многочлен был интерполяционный для функции $f(x)$

достаточно зафиксировать в качестве коэффициентов c_i этой линейной комбинации заданные в таблице (1) значения $y_i = f(x_i)$

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad \left| \forall i, j = \overline{1, n} \right.$$

В таком случае для многочлена

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

в каждом узле x_j ($j = \overline{1, n}$)

$$\begin{aligned} L_n(x_j) &= l_0(x_j) \cdot y_0 + \dots + l_{j-1}(x_j) \cdot y_{j-1} + l_j(x_j) \cdot y_j + l_{j+1}(x_j) \cdot y_{j+1} + \dots + l_n(x_j) \cdot y_n = \\ &= 0 + \dots + 0 + y_j + 0 + \dots + 0 = y_j \end{aligned}$$

т.е. выполняется условие интерполирования

$$l_i(x) = A_i(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n),$$

а коэффициент A_i этого представления легко получается из требования $l_i(x) = 1$

Подставляя в выражение для $l_i(x)$ значения $x = x_i$ и приравнявая результат к единице, получим:

$$A_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}.$$

Таким образом, базисные многочлены Лагранжа имеют вид:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)},$$

а искомый интерполяционный многочлен Лагранжа примет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)} y_i$$

запишем интерполяционные многочлены Лагранжа
первой и второй степени.

При $n = 1$ (x_0, y_0) и (x_1, y_1)

Многочлен Лагранжа
записывается с помощью
двух базисных
Многочленов первой
степени

$(l_0(x)$ и $l_1(x))$

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1.$$

При $n = 2$ по трехточечной таблице

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

три базисных многочлена ($l_0(x)$, $l_1(x)$ и $l_2(x)$)

интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \cdot y_2.$$

Приближенные равенства

$$f(x) \approx L_1(x) \text{ и } f(x) \approx L_2(x)$$

называют соответственно формулами линейной и квадратичной интерполяции.