Численное интегрирование

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

для некоторой заданной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$.

Формула Ньютона-Лейбница:

$I = F(b) - F(a)$, где

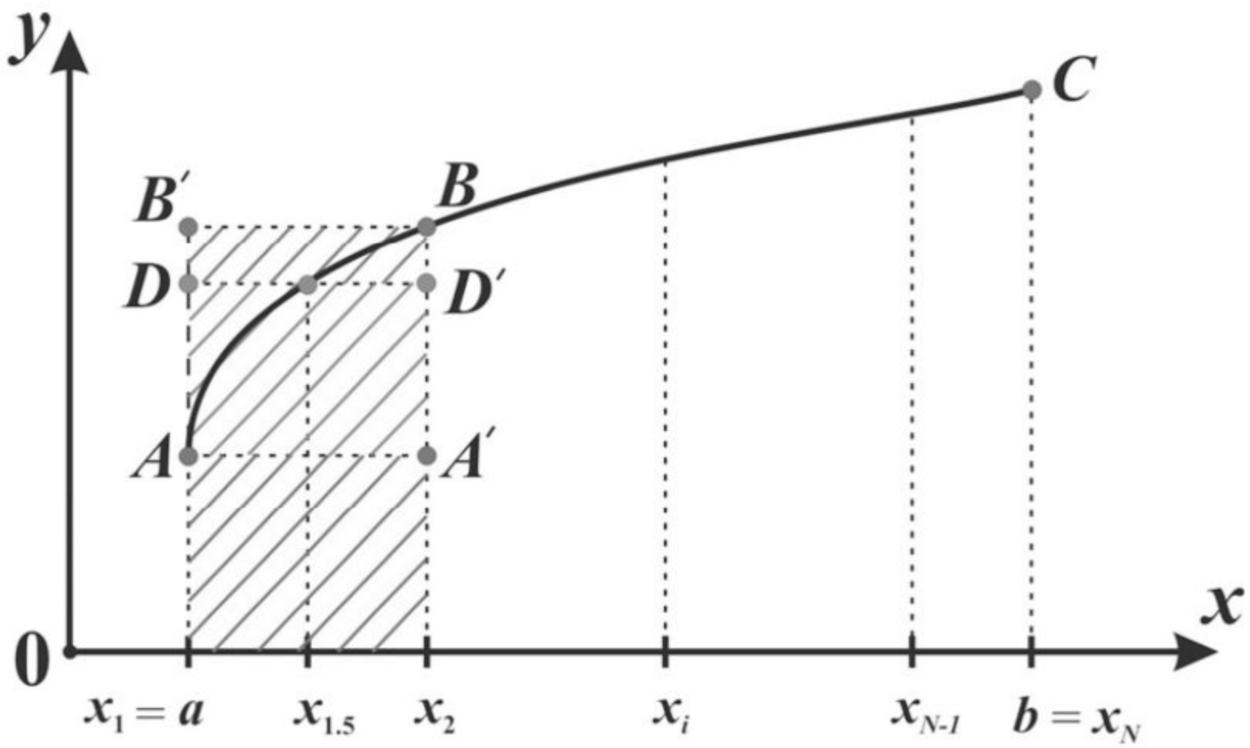
$F(x)$ – некоторая первообразная для данной функции $f(x)$.

Не существование первообразной:

$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{\ln(x)} \quad \text{и т.д.}$$

Формула прямоугольников

Предположим, что $f(x)$ имеет следующий график.



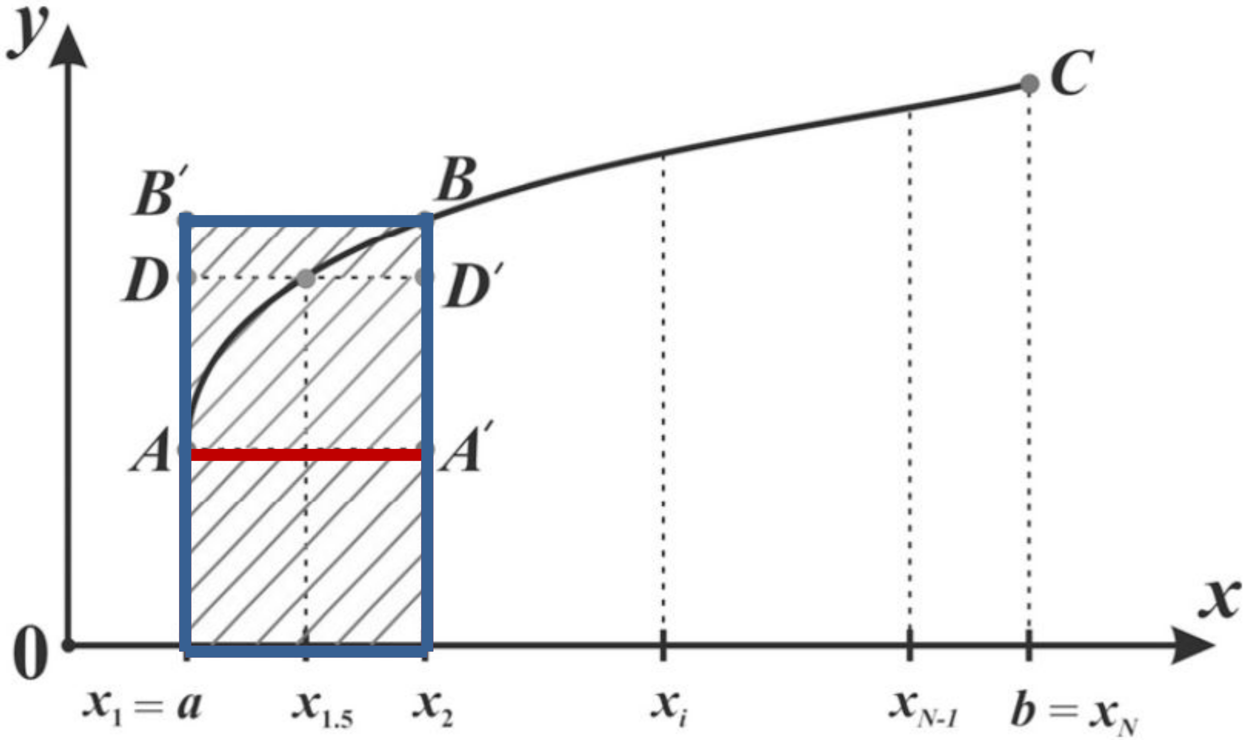
отрезок $[a, b]$ разбивают на несколько частей (N-1), т.е.

вводят разбиение, состоящее из N узлов: $x_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad x_1 = a, \ldots, x_N = b.$

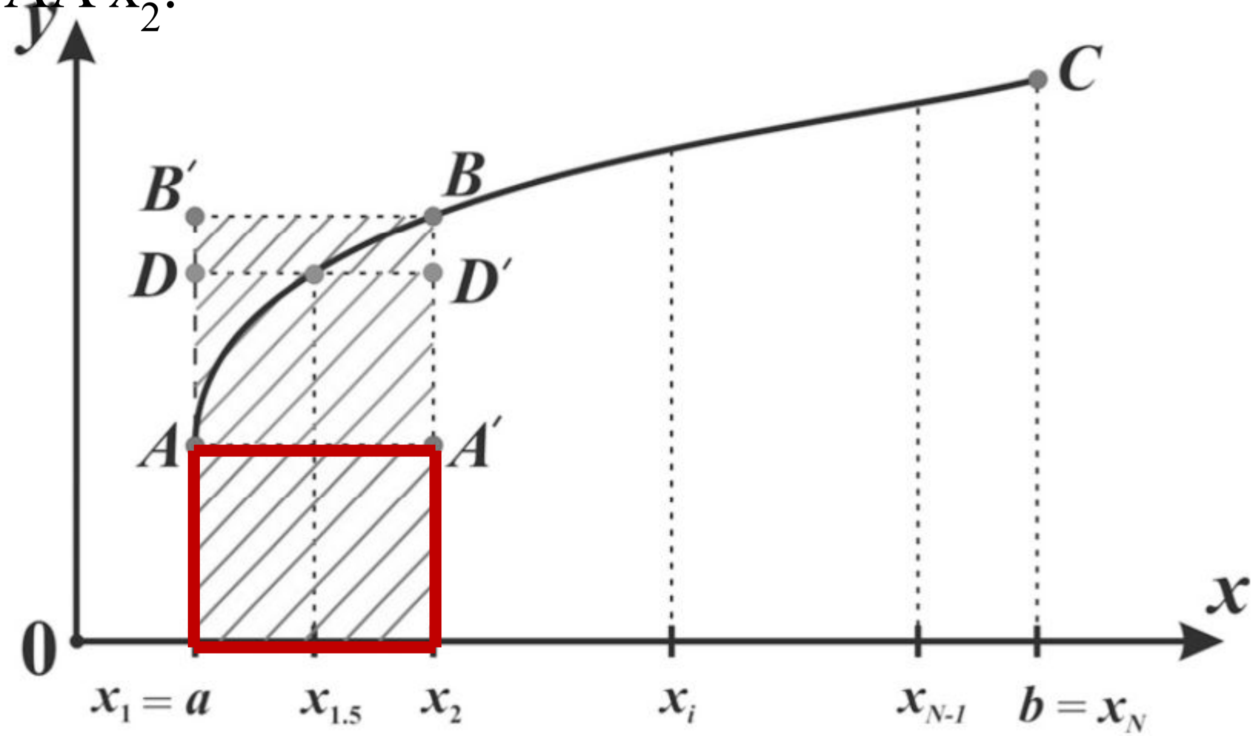
Будем считать узлы равноотстоящими: $h = \dfrac{b-a}{N-1}$.

Рассматриваем прямоугольники: $x_1 x_2 A'A$, или $x_1 x_2 BB'$

или вводим промежуточный узел: $x_{1.5} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \dfrac{h}{2}$.



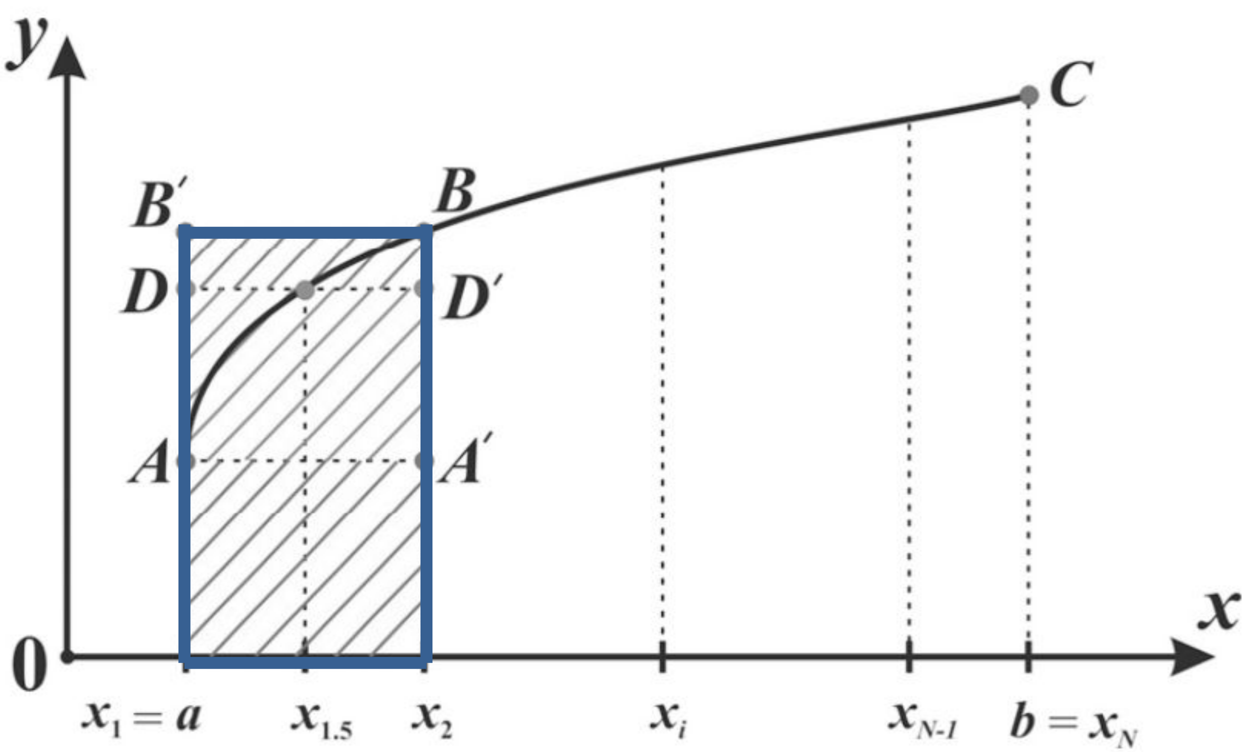
Если рассматриваем прямоугольник $x_1AA^/x_2$:



Формула левых прямоу

$$I=\int_a^b f(x)dx=h\cdot f(x_1)+h\cdot f(x_2)+\ldots+h\cdot f(x_{N-1})=h\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\,.$$

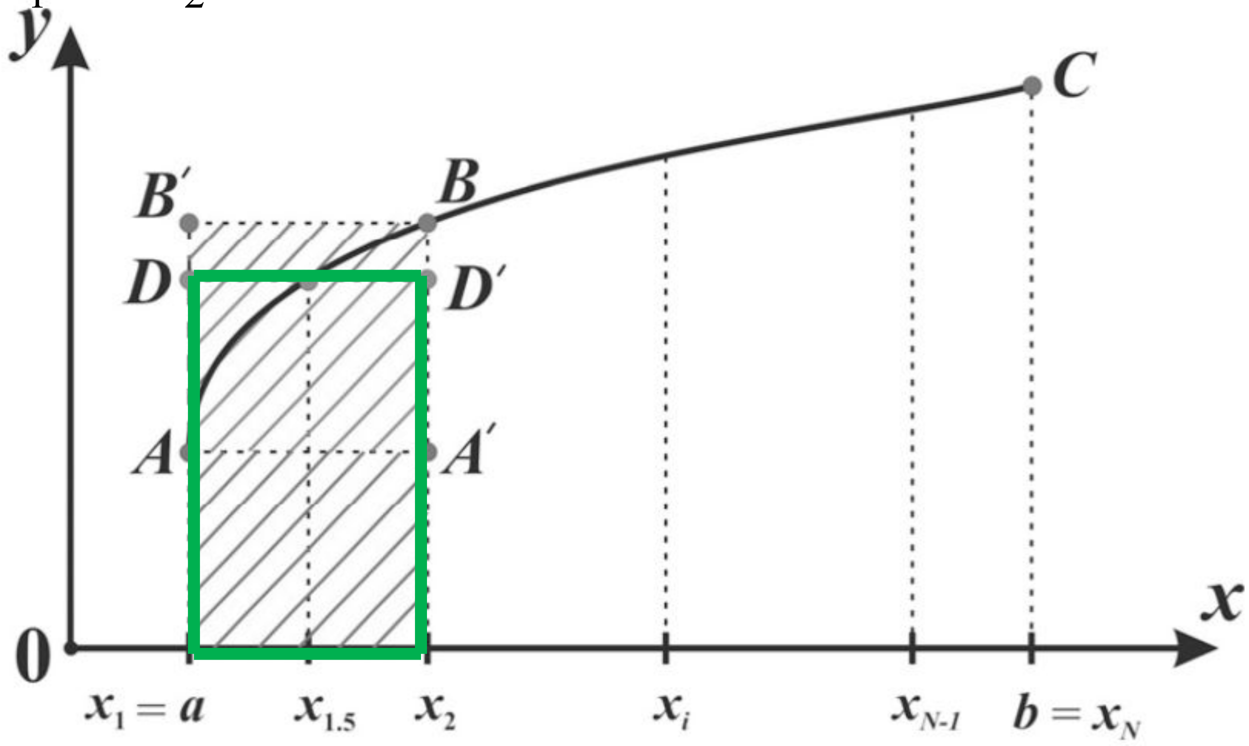
Если рассматриваем
прямоугольн



Формула правых прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f(x_2) + h \cdot f(x_3) + \ldots + h \cdot f(x_N) = h\sum_{i=2}^{N} f(x_i).$$

Если рассматриваем прямоугольник $x_1DD'x_2$:

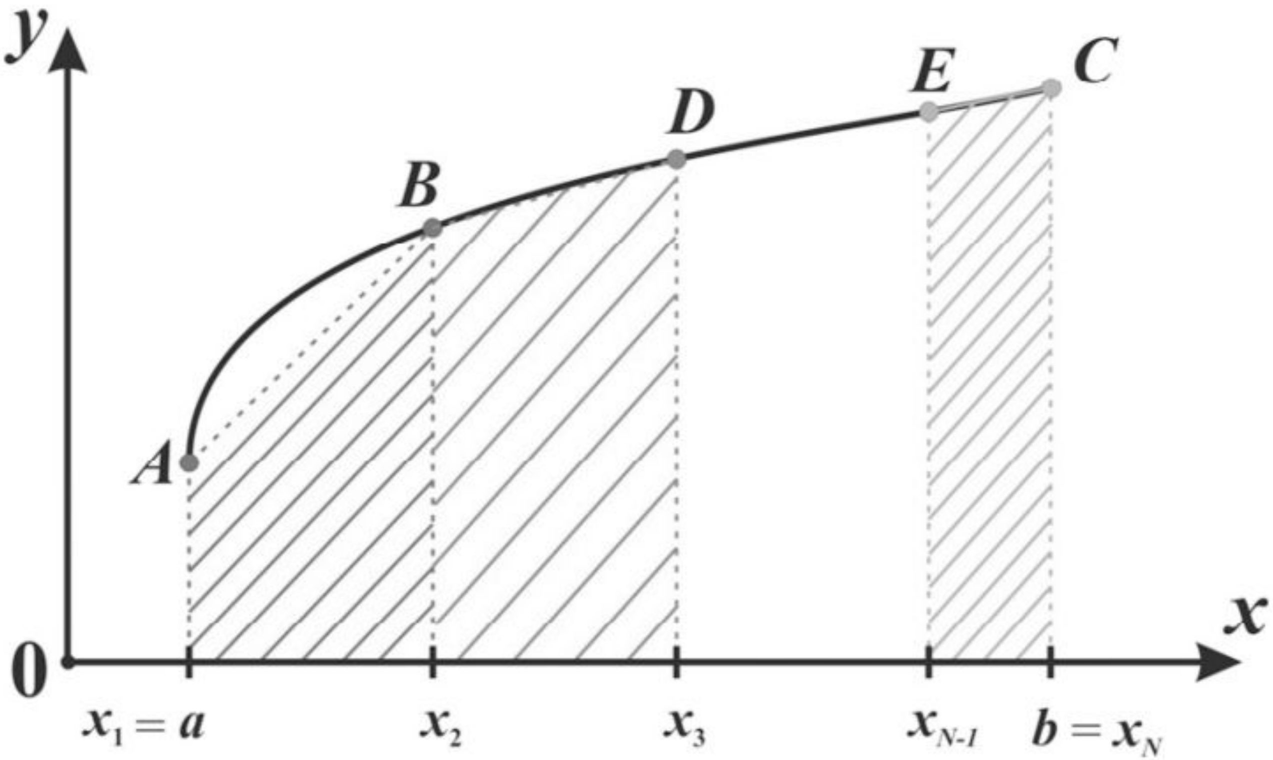


Формула средних прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) + \ldots + h \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h}{2}\right) = h\sum_{i=1}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

Формула трапеций

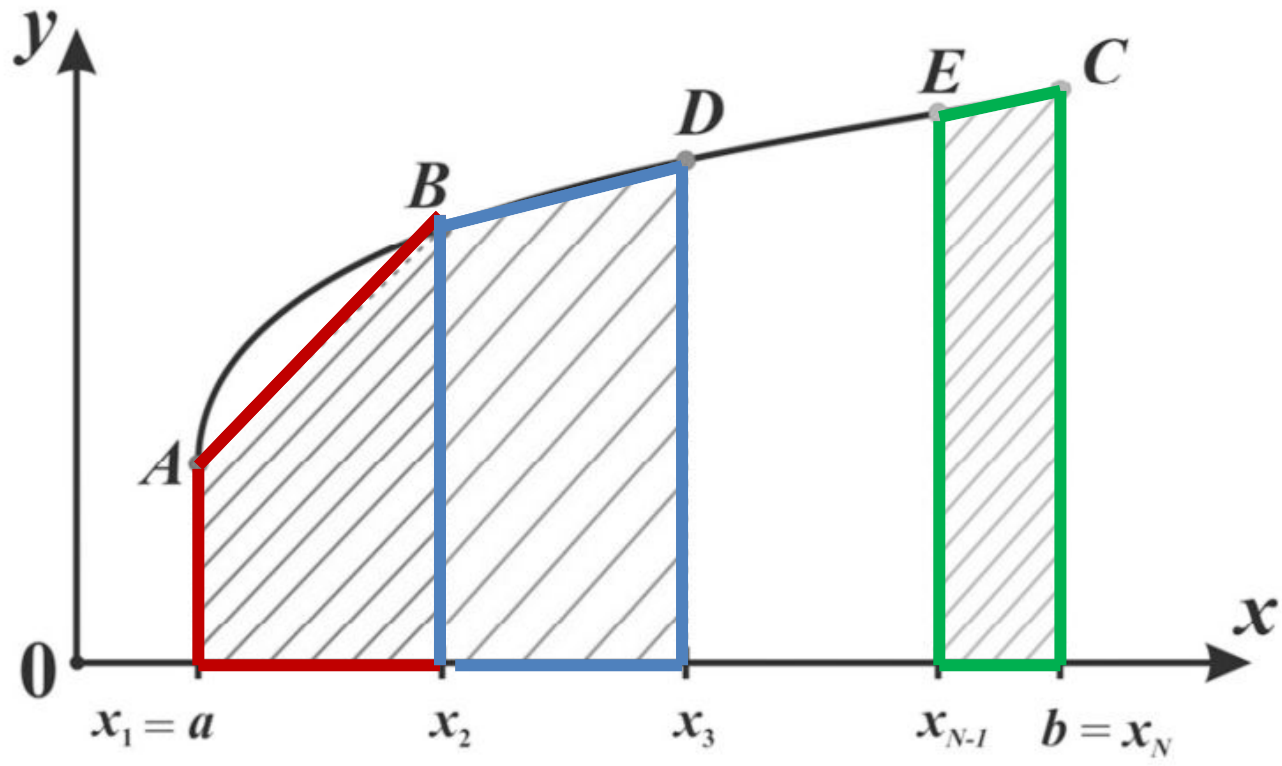
Предположим, что $f(x)$ имеет следующий график.



отрезок $[a,b]$ разбивают на (N-1) частей, т.е. вводят разбиение,

состоящее из N узлов: $x_i, \quad i=\overline{1,N}; \quad x_1 = a,\ldots,x_N = b, \quad h = \dfrac{b-a}{N-1}.$

Рассматриваем трапеции: $aABx_2,\ x_2BDx_3,\ x_{N-1}ECb.$



$$S_{aABx_2} = h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{h}{2} \cdot (f_1 + f_2);$$

$$S_{x_2BDx_3} = \frac{h}{2} \cdot (f_2 + f_3);$$

....

$$S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} \cdot (f_{N-1} + f_N);$$

$$I = S_{aABx_2} + S_{x_2BDx_3} + \ldots + S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} \cdot (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \ldots + 2f_{N-1} + f_N).$$

В общем виде $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=2}^{N-1} f_i \right).$

Формула Симпсона(метод парабол):

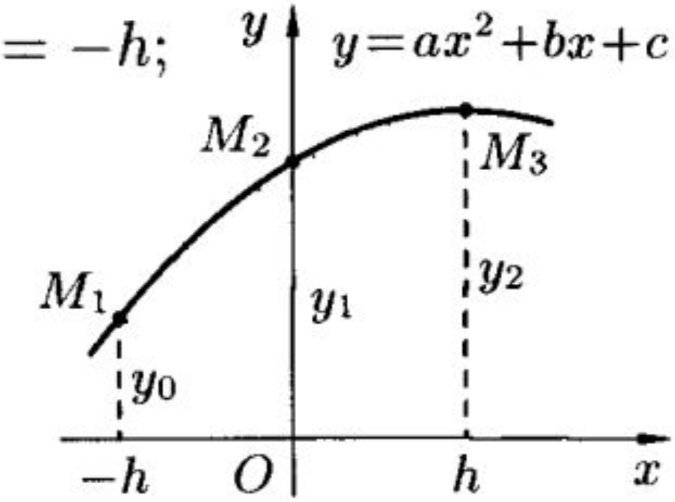
Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху $y = ax^2 + bx + c$ графиком параболы:
сбоку прямыми: $x = -h,\ x = h$ снизу — отрезком $[-h; h]$.

$M_1(-h; y_0),\ M_2(0; y_1),\ M_3(h; y_2)$

$y_0 = ah^2 - bh + c$ — ордината параболы в точке $x = -h$;

$y_1 = c$ — ордината параболы в точке $x = 0$

$y_2 = ah^2 + bh + c$ — ордината параболы в точке $x = h$



$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\, dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Big|_{-h}^{h} = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch.$$

Выразим эту площадь через h, y_0, y_1, y_2.

$$c = y_1, \qquad a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$$

$$S = \frac{2}{3}h^3 \cdot \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

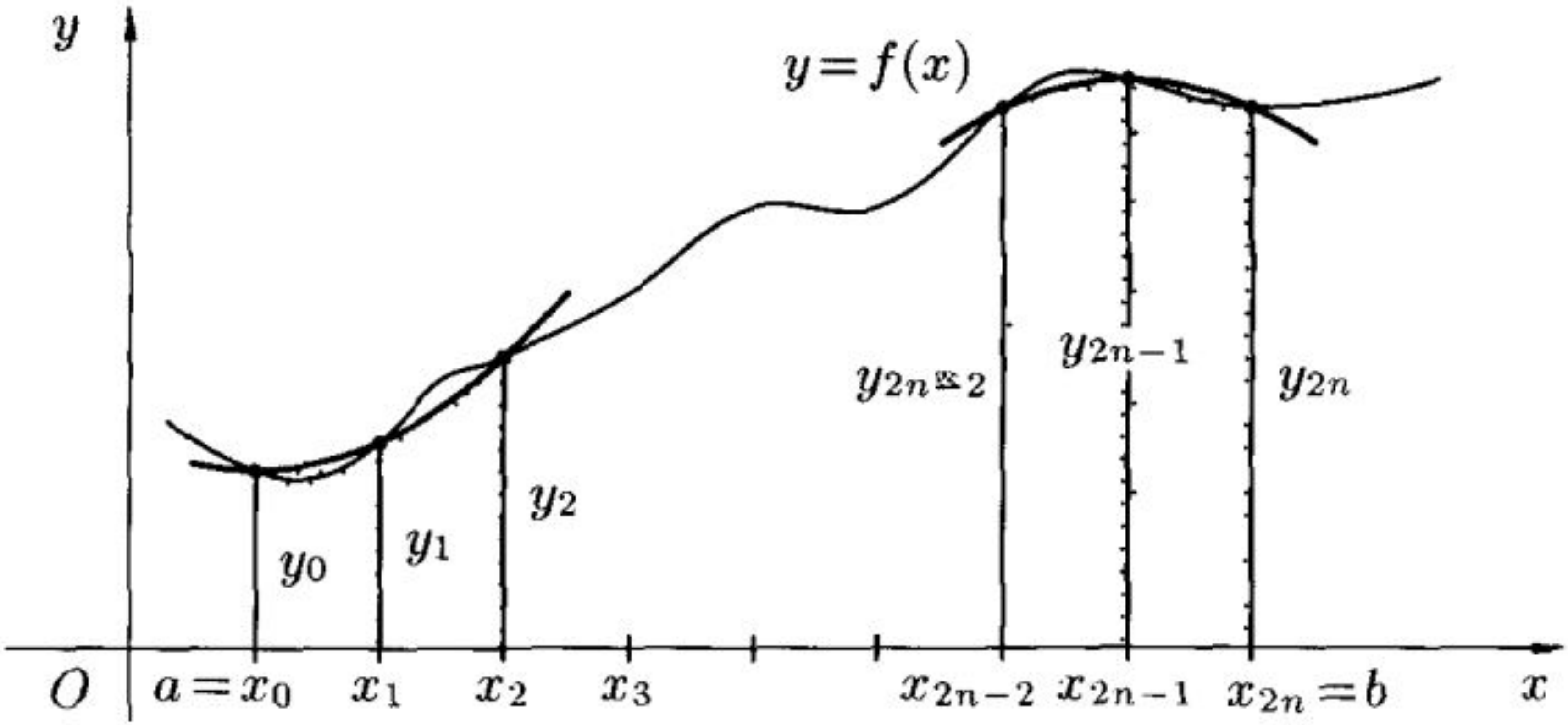
Получим теперь формулу парабол для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

отрезок $[a;b]$ разобьем на $2n$ равных частей (отрезков)

длиной $h = \frac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$.

$a = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{2n-2},\ x_{2n-1},\ x_{2n} = b$

$f(x)$: $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_{2n-2},\ y_{2n-1},\ y_{2n}$, где $y_i = f(x_i)$
:



$$S_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Аналогично находим

$$S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),\ \ldots,$$

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\Big).$$

Примеры вычисления определенного интеграла:

Дано: $f(x) = 2x - 1, \quad x \in [1,5].$

Вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ с использованием формул прямоугольников, трапеций и Симпсона при $N = 5$ (N – число узлов). Проанализировать результат при изменении числа узлов.

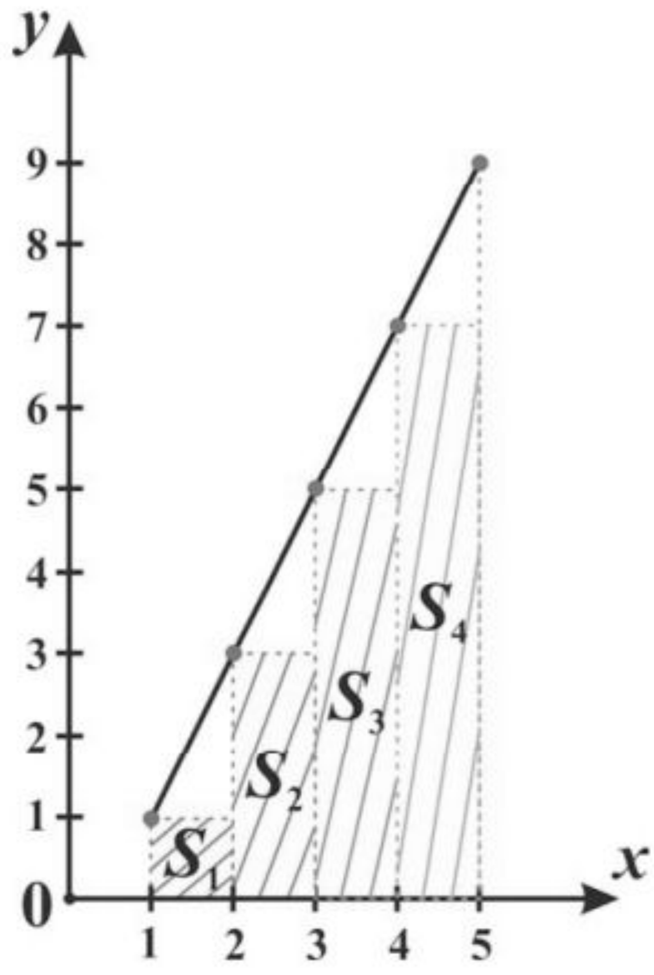
Решение.

Сначала проведем вычисление интеграла аналитически на основе формулы Ньютона-Лейбница: $I = \int_1^5 (2x-1)\,dx = \left(x^2 - x\right)\Big|_1^5 = 20$.

определим шаг интегрирования:

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{5-1} = 1.$$

а) метод левых прямоугольников

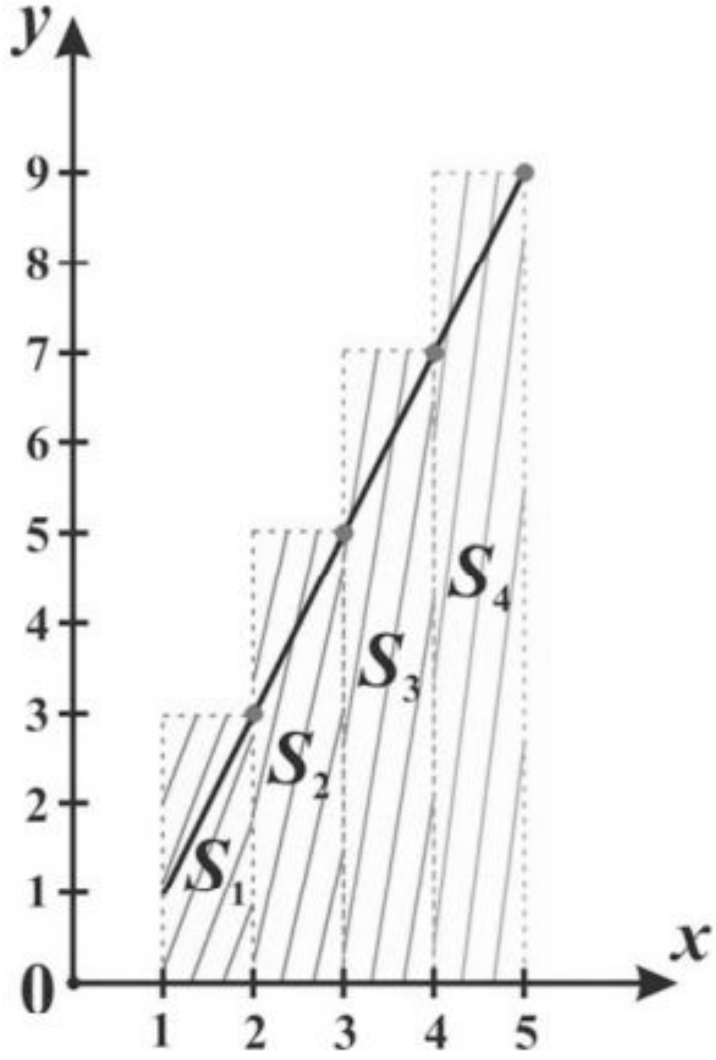


$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_1 \cdot h = 1;$$
$$S_2 = y_2 \cdot h = 3;$$
$$S_3 = y_3 \cdot h = 5;$$
$$S_4 = y_4 \cdot h = 7;$$
$$I = \sum_i S_i = 16.$$

b) метод правых прямоугольников

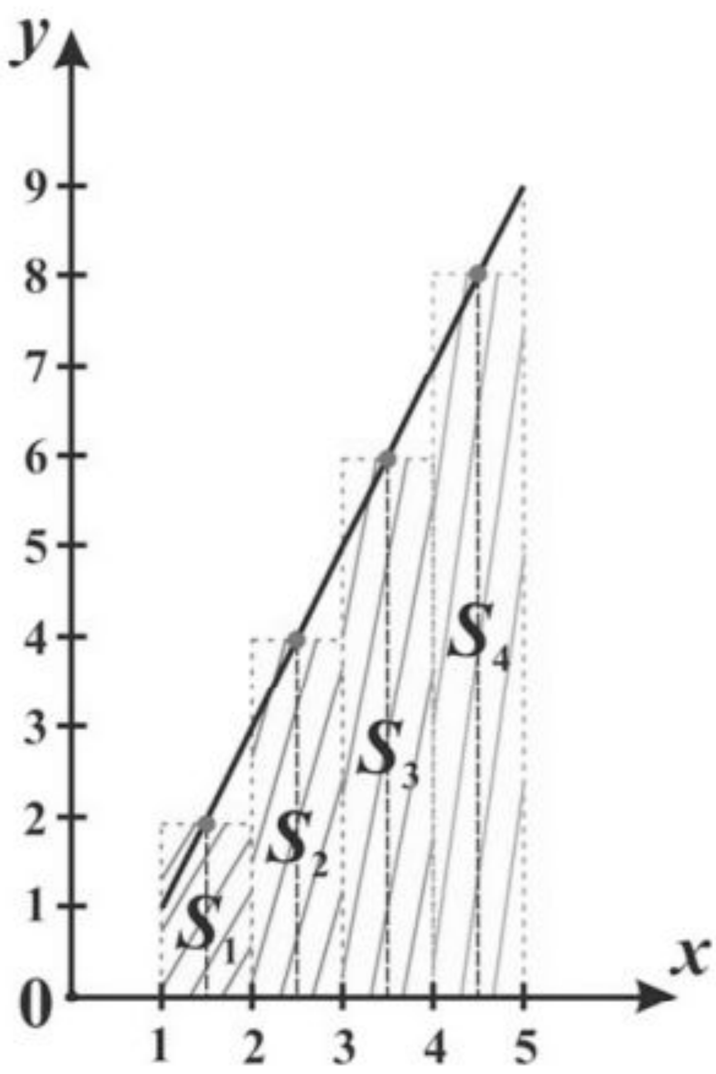


$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_2 \cdot h = 3;$$
$$S_2 = y_3 \cdot h = 5;$$
$$S_3 = y_4 \cdot h = 7;$$
$$S_4 = y_5 \cdot h = 9;$$
$$I = \sum_i S_i = 24.$$

c) метод средних прямоугольников

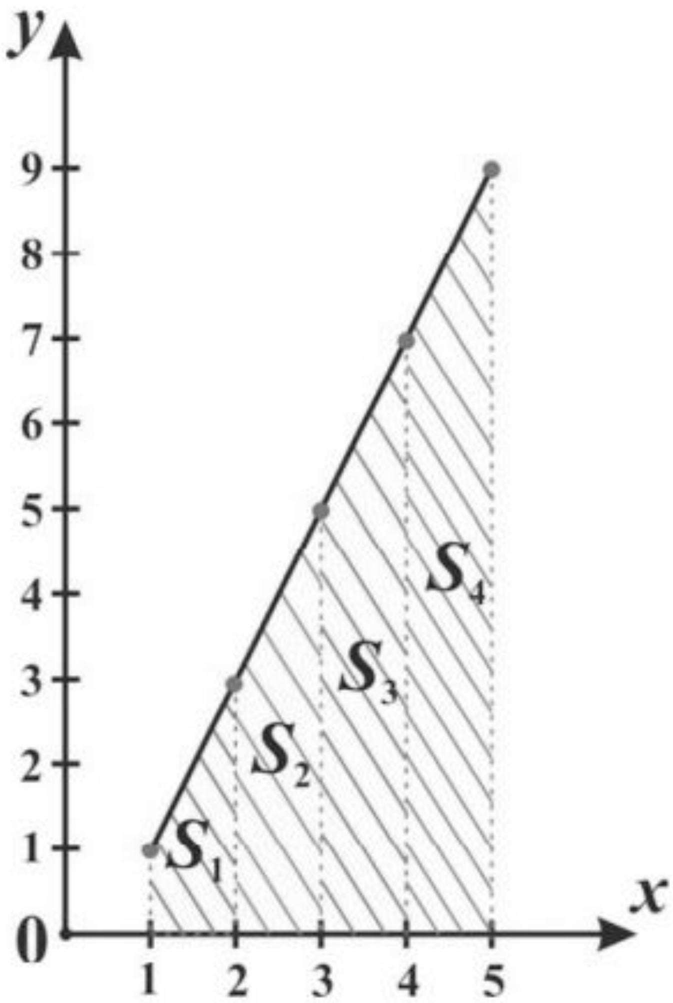


$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1.5	2.5	3.5	4.5
y_i	2	4	6	8

$$S_1 = f\left(x_{1.5}\right) \cdot h = 2;$$
$$S_2 = f\left(x_{2.5}\right) \cdot h = 4;$$
$$S_3 = f\left(x_{3.5}\right) \cdot h = 6;$$
$$S_4 = f\left(x_{4.5}\right) \cdot h = 8;$$
$$I = \sum_i S_i = 20.$$

d) метод трапеций



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{2}\left(f_1 + f_2\right) = 2;$$

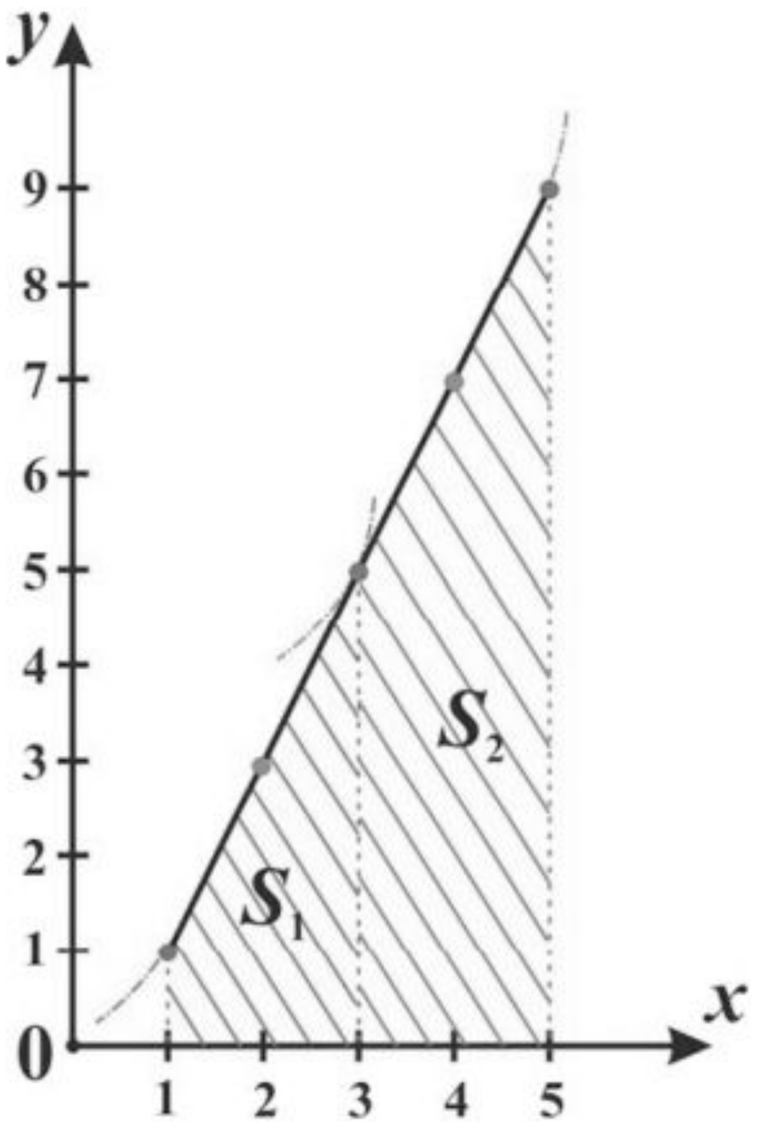
$$S_2 = \frac{h}{2}\left(f_2 + f_3\right) = 4;$$

$$S_3 = \frac{h}{2}\left(f_3 + f_4\right) = 6;$$

$$S_4 = \frac{h}{2}\left(f_4 + f_5\right) = 8;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

е) метод Симпсона (метод парабол)



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{3}(f_1 + 4f_2 + f_3) = 6;$$

$$S_2 = \frac{h}{3}(f_3 + 4f_4 + f_5) = 14$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

Увеличим число узлов до $N = 11$: $h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{11-1} = 0.4$.

x_i	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8	4.2	4.6	5.0
y_i	1.0	1.8	2.6	3.4	4.2	5.0	5.8	6.6	7.4	8.2	9.0

По формуле левых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} y_i = 18.4.$$

По формуле правых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=2}^{N} f(x_i) = h \cdot \sum_{i=2}^{N} y_i = 21.6.$$

Увеличение количества узлов приводит к уточнению значения определенного интеграла.

Полиномиальная интерполяция

Задача аппроксимации функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ состоит в построении для заданной функции $f(x)$ такой функции $\varphi(x)$, что

$$f(x) \approx \varphi(x)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

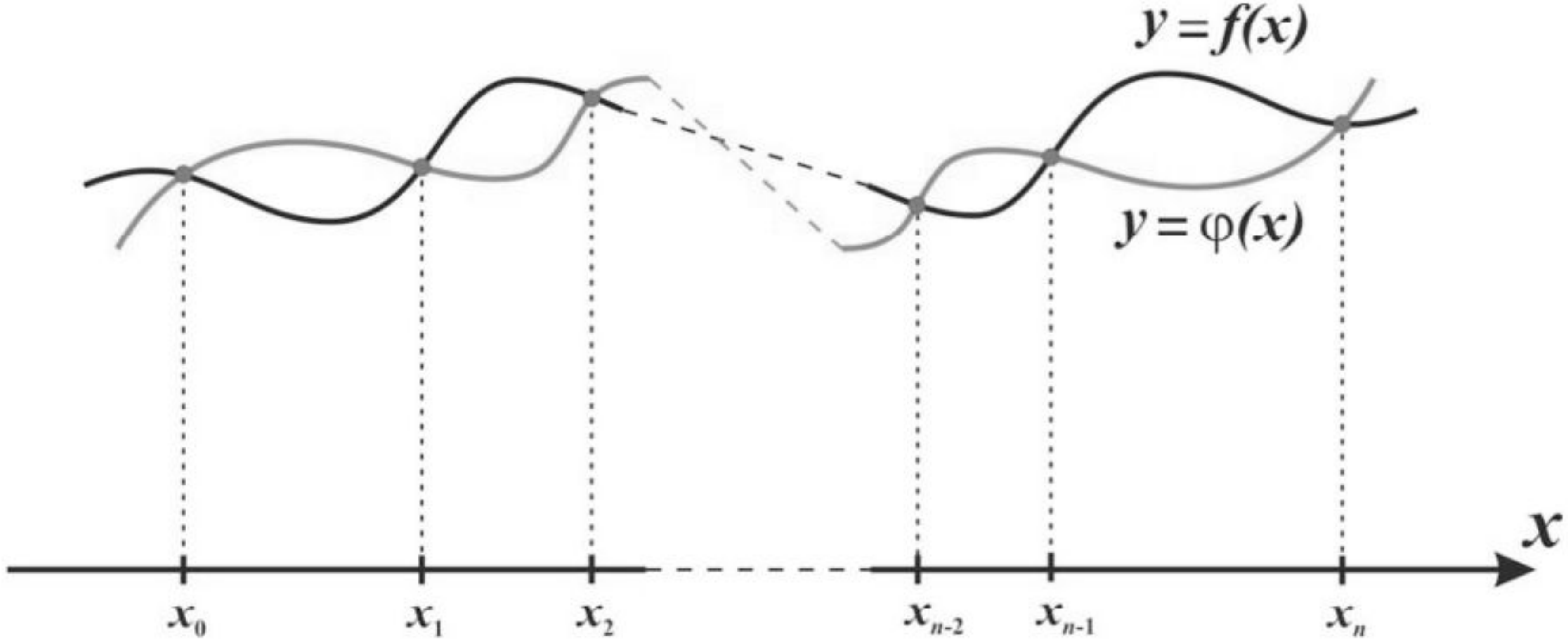
Пусть в точках $x_0, x_1, \ldots x_n$ таких, что $a \le x_0 < x_1 < \ \ldots \ < x_n \le b$ ($x_i,\ i = \overline{1,n}$ – узлы) известны значения функции $y = f(x)$, т.е. на отрезке $[a,b]$ задана табличная (сеточная) функция

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей или интерполяционной для $f(x)$ на $[a,b]$, если ее значения $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)$ в заданных точках $x_0, x_1, \ldots x_n$, называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями функции $f(x)$, т.е. с $y_0, y_1, \ldots y_n$:

$$\varphi(x_0) = y_0,$$
$$\varphi(x_1) = y_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(x_n) = y_n$$

Геометрически факт интерполирования означает, что график функции $\varphi(x)$ проходит так, что, по меньшей мере, в $n+1$ заданных точках он пересекает или касается графика функции $f(x)$.



задача полиномиальной интерполяции формулируется так:

для функции $f(x)$, *заданной таблицей (1) найти многочлен* $P_n(x)$ *такой, что выполняется совокупность условий интерполяции*

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0,1,...,n\}$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

найти его $n+1$ коэффициент $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$.

Коэффициенты многочлена должны удовлетворять условию:

$$
\begin{cases}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = y_0, \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = y_1, \\
-------------------- \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = y_n.
\end{cases}
$$

Данный подход малоэффективен

Другой подход:

Будем строить многочлен n-й степени $L_n(x)$ в виде линейной комбинации $\sum_{i=0}^{n} c_i l_i(x)$ многочленов n-й степени $l_i(x)$ (i – номер многочлена).

чтобы такой многочлен был интерполяционный для функции $f(x)$

достаточно зафиксировать в качестве коэффициентов c_i этой линейной комбинации заданные в таблице (1) значения $y_i = f(x_i)$

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad \Big| \forall i, j = \overline{1, n}$$

В таком случае для многочлена

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

в каждом узле $x_j \quad (j = \overline{1,n})$

$$L_n(x_j) = l_0(x_j) \cdot y_0 + \ldots + l_{j-1}(x_j) \cdot y_{j-1} + l_j(x_j) \cdot y_j + l_{j+1}(x_j) \cdot y_{j+1} + \ldots + l_n(x_j) \cdot y_n =$$
$$= 0 + \ldots + 0 + y_j + 0 + \ldots + 0 = y_j$$

т.е. выполняется условие интерполирования

$$l_i(x) = A_i(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n),$$

а коэффициент A_i этого представления легко получается из

требования $l_i(x) = 1$

Подставляя в выражение для $l_i(x)$ значения $x = x_i$ и приравнивая результат к единице, получим:

$$A_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i - x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i - x_n)}.$$

Таким образом, базисные многочлены Лагранжа имеют вид:

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)},$$

а искомый интерполяционный многочлен Лагранжа примет вид:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}y_i$$

запишем интерполяционные многочлены Лагранжа первой и второй степени.

При $n = 1$ (x_0, y_0) и (x_1, y_1)

Многочлен Лагранжа записывается с помощью двух базисных Многочленов первой степени $(l_0(x)$ и $l_1(x))$:

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1.$$

При $n = 2$ по трехточечной таблице

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

три базисных многочлена ($l_0(x)$, $l_1(x)$ и $l_2(x)$)

интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени:

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_2)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)} \cdot y_2 .$$

Приближенные равенства

$$f(x) \approx L_1(x) \text{ и } f(x) \approx L_2(x)$$

называют соответственно формулами линейной и квадратичной интерполяции.