Математическая статистика

Лекция 2. Оценки параметров распределения

Статистические оценки

Точечные и интервальные

оценки неизвестных параметров

Доверительный интервал для математического ожидания при известном СКО

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном СКО

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения

Математическая статистика –это

теория принятия решений

в условиях неопределённости

Определение и свойства статистической оценки

Статистической оценкой $\overline{\theta}$ параметра θ теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выбора.

Рассматривая выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как реализации случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, получивших конкретные значения в результате опытов, можно представить оценку $\overline{\theta}$ как функцию этих случайных величин: $\overline{\theta} = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Это означает, что оценка тоже является случайной величиной.

Если для оценки θ взять несколько (k) выборок, то получим столько же случайных оценок $\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \ldots, \overline{\theta_k}$.

Если число наблюдений невелико, то замена неизвестного параметра θ оценкой $\overline{\theta}$ приводит к ошибке, которая тем больше, чем меньше число опытов.

Чтобы оценка $\overline{\theta}$ была близка к значению параметра θ, она должна обладать свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

Оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется *несмещенной*, если $M(\overline{\theta}) = \theta$, т. е. математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру. Если $M(\overline{\theta}) \neq \theta$, то оценка θ называется *смещенной.*

Иногда оценка бывает *асимптотически несмещенной*, т. е. $M(\overline{\theta}) \to \theta$.

Требование несмещенности особенно важно при малом числе опытов.

Оценка $\bar{\theta}$ параметра θ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, т. е. $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Пусть ε – очень малое положительное число. Тогда данное равенство означает, что чем больше объем выборки n, тем ближе оценка $\bar{\theta}$ приближается к оцениваемому параметру θ.

Заметим, что несмещенная оценка θ_n^* будет состоятельной, если при $n \to \infty$ ее дисперсия стремится к нулю: $D(\theta_n^*) \to 0$, что непосредственно следует из неравенства Чебышева.

Свойство состоятельности нужно проверять в первую очередь. Оно *обязательно* для любого правила оценивания. Несостоятельные оценки не используются.

Несмещенная оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется *эффективной*, если она среди всех несмещенных оценок, в определенном классе оценок данного параметра, обладает наименьшей дисперсией.

Сформировалось два направления в теории оценивания – точечное и интервальное.

Точечные оценки неизвестных параметров

Точечные оценки представляют собой число или точку на числовой оси.

Можно показать, что:

– $\overline{x_в}$ является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой $M(X)$;

– $D_в$ является состоятельной, смещенной оценкой $D(X)$;

– *исправленная дисперсия* $S^2 = \frac{n}{n-1} D_в$ является состоятельной, несмещенной оценкой $D(X)$.

Заметим, что при больших n разница между S^2 и $D_в$ мала. Поэтому оценка S^2 используется при малых выборках, обычно при $n \le 30$;

– относительная частота $\frac{n_A}{n}$ появления события A в n независимых испытаниях является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой неизвестной вероятности $p = P(A)$ (p – вероятность появления события A в каждом испытании);

– эмпирическая функция распределения выборки $F^*(x)$ является состоятельной, несмещенной оценкой функции распределения $F(x)$ случайной величины X.

Для нахождения оценок неизвестных параметров используют различные методы. Наиболее распространенными являются метод максимального правдоподобия (ММП) и метод наименьших квадратов (МНК).

Основу метода максимального правдоподобия составляет функция правдоподобия, выражающая плотность вероятности совместного появления результатов выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta).$$

Согласно методу максимального правдоподобия в качестве оценки неизвестного параметра θ принимается такое значение θ_n, которое максимизирует функцию L.

Нахождение оценки $\overline{\theta}$ упрощается, если максимизировать не саму функцию L, а $\ln L$, т. к. максимум обеих функций достигается при одном значении θ.

Для отыскания оценки параметра θ необходимо решить систему уравнений правдоподобия, получаемую приравниванием производных по параметру нулю:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0,$$

а затем отобрать то решение, которое обращает функцию $\ln L$ в максимум.

Метод наименьших квадратов является частным случаем метода максимального правдоподобия и заключается в том, что оценка определяется из условия минимизации суммы квадратов отклонений выборочных данных от определяемой оценки.

Оценка $\overline{\theta}$ определяется из условия минимизации суммы:

$$u = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\theta})^2 \to \min .$$

Метод наименьших квадратов получил широкое применение в практике, т. к. хорошо разработан в плане вычислительной реализации.

Половина длины доверительного интервала $\varepsilon = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$ называют *точностью интервального оценивания*.

Вероятность γ называется *надежностью интервальной оценки* или *доверительной вероятностью*, случайные величины θ_1, θ_2 – *доверительными границами*, а сам интервал (θ_1, θ_2) иногда называют *доверительным интервалом*. Центром этого интервала является значение точечной оценки $\overline{\theta}$.

Чаще всего надежность задается значениями от 0,95 и выше, в зависимости от конкретно решаемой задачи. Тогда событие, состоящее в том, что интервал (θ_1, θ_2) покроет параметр θ, будет практически достоверным.

Половина длины доверительного интервала $\varepsilon = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$ называют *точностью интервального оценивания*.

Доверительный интервал для математического ожидания при известном σ

Пусть генеральная совокупность X распределена по нормальному закону $N(a,\sigma)$, причем параметр σ известен, а параметр a требуется оценить с надежностью γ.

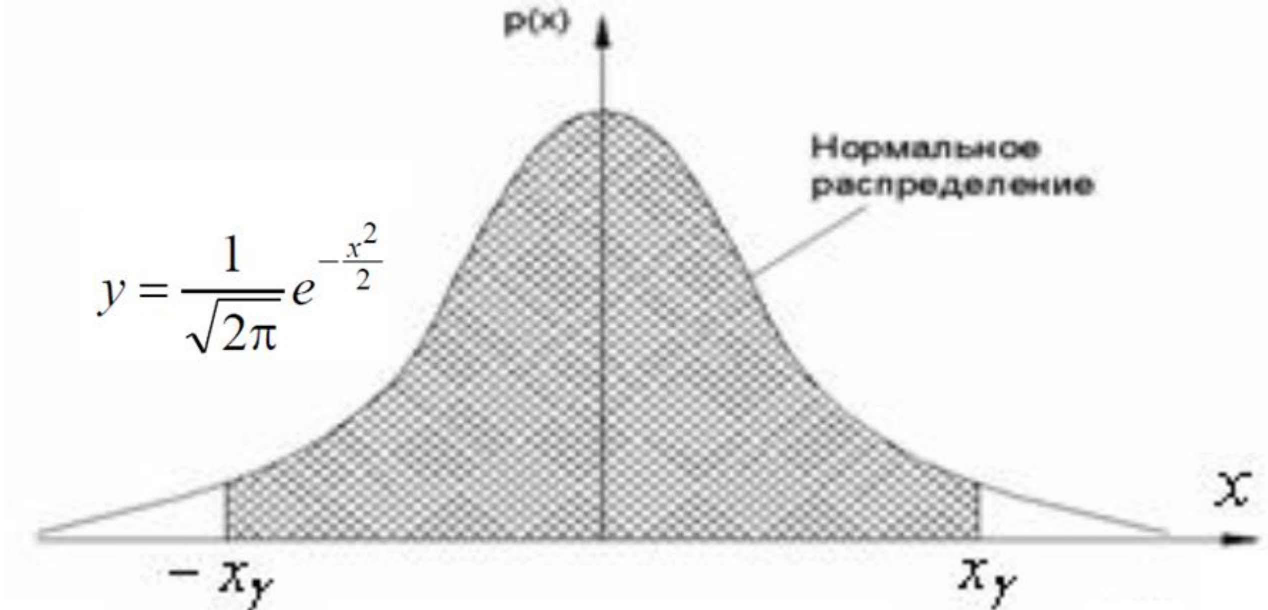
Чтобы подчеркнуть случайный характер $\overline{x_в}$ обозначим его $\overline{X_в}$.

Примем без доказательства, что если случайная величина X распределена нормально, то и выборочное среднее $\overline{X_в}$, найденное по независимым наблюдениям, также распределено нормально с параметрами $N(a,\sigma)$.

Проведем процедуру *стандартизации* или *z-преобразования данных*, т. е. перейдем к стандартной Z-шкале с параметрами нормального распределения $N(0,1)$:

$$z_в = \frac{(\bar{X}_в - a)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Тогда случайная величина $\frac{(\bar{X}_в - a)\sqrt{n}}{\sigma}$ распределена по закону $N(0,1)$.



Выберем число x_γ так, что заштрихованная площадь равна γ, т. е.

$$P\left(-x_\gamma < \frac{(\overline{X}_в - a)\sqrt{n}}{\sigma} < x_\gamma\right) = \gamma.$$

Это значение легко находится с использованием интегральной функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Действительно, $P(-x_\gamma < N(0,1) < x_\gamma) = \Phi(x_\gamma) - \Phi(-x_\gamma) = 2\Phi(x_\gamma) = \gamma$.

Значение x_γ, удовлетворяющее нелинейному уравнению $\Phi(x_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$, находится по таблице, в которой приведены значения $\Phi(x)$.

Так как $\sigma > 0$, то события $-x_\gamma < \dfrac{(\bar{X}_в - a)\sqrt{n}}{\sigma} < x_\gamma$ и $\overline{X}_в - \dfrac{x_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X}_в + \dfrac{x_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}$ эквивалентны, а значит, их вероятности равны:

$$P\left(\overline{X}_в - \frac{x_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X}_в + \frac{x_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right) = \gamma .$$

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\overline{X}_в - \dfrac{x_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X}_в + \dfrac{x_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right)$ покрывает неизвестный параметр a с точностью оценки $\delta = \dfrac{x_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}$.

Центр этого интервала находится в точке с координатой $\overline{X}_в$, а длина интервала $2\frac{x_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}$. Если объем выборки неограниченно возрастает, то интервал стягивается в одну точку $\overline{X}_в$, которая является состоятельной и несмещенной оценкой для параметра a.

Точность оценки математического ожидания равна $\delta = x_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Очевидно, что с увеличением объема выборки n величина погрешности δ уменьшается, т. е. точность оценки повышается.

Эта формула позволяет определить необходимый объем выборки для оценки математического ожидания с наперед заданной точностью и надежностью:

$$n_{\min} = \left(x_\gamma \frac{\sigma}{\delta} \right)^2 .$$

Замечание. Приводимая формула для доверительного интервала может быть использована для выборок большого размера $n \geq 30$ любой (а не только нормальной) формы генерального распределения.

Однако мы не сможем воспользоваться этой формулой в случае, если стандартное отклонение генеральной совокупности неизвестно, или объем выборки мал ($n \leq 30$). Обе ситуации вполне типичны и будут рассмотрены далее.

Пример 1. Ректор университета хочет узнать, каков средний возраст обучающихся в настоящее время студентов. Из предыдущих исследований известно, что стандартное отклонение равно 2 года. Сделана выборка из 50 студентов и вычислено среднее – 20,3 года.

Найти 95 %-й доверительный интервал для генерального среднего.

Решение:

Пусть a – средний возраст студента университета.

Используя таблицу значений функции $\Phi(x)$, находим, что $\Phi(x_\gamma) = \dfrac{0{,}95}{2} = 0{,}475$ при $x_\gamma = 1{,}96$.

Тогда $\delta = 1{,}96 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{50}} = 0{,}55$, и доверительный интервал имеет границы $(\overline{X}_в - 0{,}55; \quad \overline{X}_в + 0{,}55)$.

Таким образом, с вероятностью 0,95 можно быть уверенным в том, что средний возраст студента лежит в интервале

$$20{,}3 - 0{,}55 < a < 20{,}3 + 0{,}55;$$

или другими словами, с вероятностью 0,95 средний возраст студента университета

$$19{,}75 < a < 20{,}85.$$

Пример 2. Ректор университета хочет установить средний возраст студентов с точностью до 1 года и с вероятностью 99 %. Какой размер выборки необходим в этом случае? Из ранее проведенного исследования известно, что стандартное отклонение возраста – 2 года.

Решение:

Используя таблицу прил. 1 функции $\Phi(x)$, находим, что $\Phi(x_\gamma) = \dfrac{0{,}99}{2} = 0{,}495$ при $x_\gamma = 2{,}58$.

$$n_{\min} = \left(t_\gamma \frac{\sigma}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{2{,}58 \cdot 2}{1}\right)^2 \approx 27.$$

Тем самым, чтобы быть на 99 % уверенным, что полученная оценка отличается от точного значения среднего возраста не больше чем на 1 год, преподавателю нужна выборка как минимум в 27 человек.

Пример 3. Определяется средний рабочий стаж большой группы рабочих. Произведена случайная повторная выборка 900 личных листков. Средний рабочий стаж в выборке оказался равным 15,5 годам, а среднее квадратическое отклонение 4,8 года.

1. С какой вероятностью можно утверждать, что отклонение выборочной средней от генеральной не превысит 0,5 года.

2. Найти доверительные границы при оценке генеральной средней, которые можно гарантировать с вероятностью 0,95.

3. Определить необходимый объем выборки, при котором ошибка не превысит 0,5 с доверительной вероятностью 0,999.

Решение:

1. По условию $\overline{X_в} = 15{,}5$; $\sigma = 4{,}8$; $\gamma = 0{,}5$; $n = 900$.

Вычисляем $x_\gamma = \dfrac{\gamma\sqrt{n}}{\sigma} = \dfrac{0,5\sqrt{900}}{4,8} \approx 3,13$. По таблице

$2\Phi(3,13) = 0,9983$, следовательно, доверительная вероятность

2. По условию $\overline{X_в} = 15,5$; $\sigma = 4,8$; $P_2 = 0,95$; $n = 900$.

Так как $2\Phi(x_\gamma) = 0,95$, то $x_\gamma = 1,96$.

Тогда

$$\gamma = \frac{x_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 4,8}{\sqrt{900}} \approx 0,31.$$

Доверительные границы будут:

$$15,5 - 0,31 \le \overline{X} \le 15,5 + 0,31 \text{ или } 15,19 \le \overline{X} \le 15,81.$$

3. По условию $\overline{X_в} = 15{,}5$; $\sigma = 4{,}8$; $\gamma = 0{,}5$; $P_3 = 0{,}999$.

Так как $2\Phi(x_\gamma) = 0{,}999$, то $x_\gamma = 3{,}29$.

Из равенства $x_\gamma = \dfrac{\gamma\sqrt{n}}{\sigma_B}$ находим $n = \dfrac{x_\tau^2 \sigma^2}{\gamma^2} = \dfrac{3{,}29^2 \cdot 4{,}8^2}{0{,}5^2} \approx 998.$

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном σ

В случае неизвестной дисперсии (или в случае малого объема выборки ($n \le 30$)), постановка задачи и ход рассуждений при построении доверительного интервала аналогичны случаю известной дисперсии, рассмотренному в предыдущем параграфе. Разница состоит в том, что в выражении для x_γ неизвестное среднеквадратичное отклонение σ заменяется на его выборочную оценку S:

$$t = \frac{\left(\overline{X}_в - a\right)\sqrt{n}}{S}.$$

Полученная таким путем статистика t, будучи довольно сложной функцией от нормально распределенных случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, уже не будет нормально распределенной.

Статистика t имеет t-распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Отсюда следует, что справедливо равенство

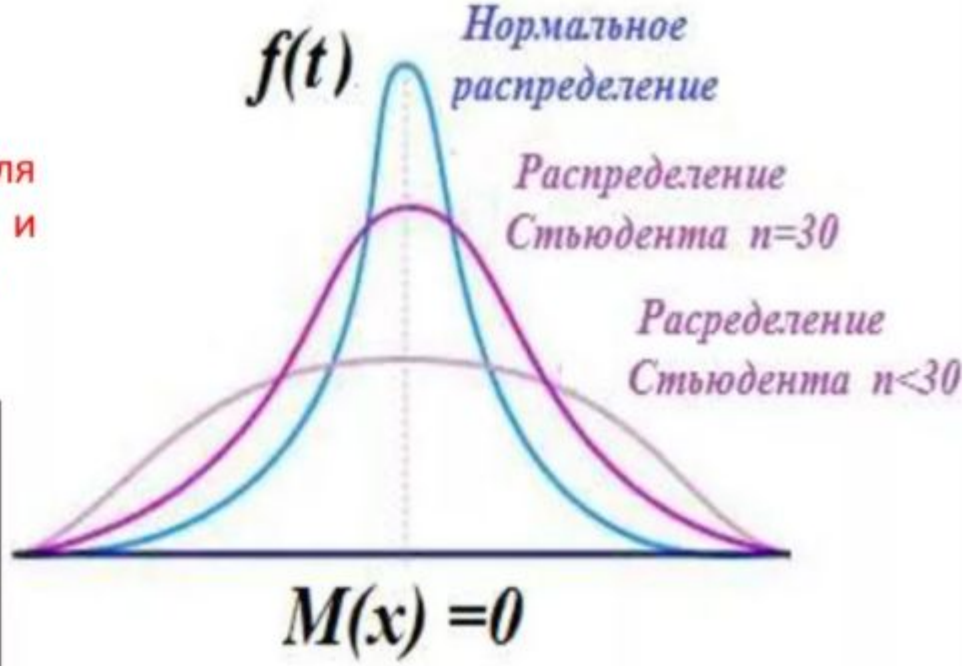
$$P\left(-t(\gamma,n) < \frac{(\overline{X}_в - a)\sqrt{n-1}}{\sqrt{D_в}} < t(\gamma,n)\right) = \gamma,$$

аналогичное уравнению, полученному в предыдущем параграфе, и отличающееся от него заменой σ на S и параметров нормального распределения на соответствующие параметры t-распределения с $n-1$ степенями свободы.

Распределение Стьюдента (малые выборки)

Доверительные интервалы для нормального распределения и распределения Стьюдента

P_D ($\alpha=1-P_D$)	$\Delta X=t\cdot\sigma$ ($N\rightarrow\infty$)	$\Delta X=\mathbf{t_{St}}\cdot S_{\overline{X}}$ (N=4)
0,95 (0,05)	$2\cdot\sigma$	$2{,}78\cdot S_{\overline{X}}$
0,99 (0,01)	$3\cdot\sigma$	$4.60\cdot S_{\overline{X}}$



$$\Delta X = t_{St}(P_D,n)\cdot S_{\bar{x}} = t_{St}(P_D,n)\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{n\cdot(n-1)}}$$

Значение $t(\gamma; n-1)$ определяется по таблице t-распределения Стьюдента при уровне значимости α для двусторонней об ласти

Таким образом, интервальная оценка надежности γ для неизвестной генеральной средней a имеет границы

$$\left(\bar{X}_в - \frac{t(\gamma, n-1)\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_в + \frac{t(\gamma, n-1)\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}} \right).$$

Выразим границы интервала через исправленную дисперсию S^2

Так как $S^2 = \dfrac{n}{n-1} D_в$, то $\dfrac{\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}} = \dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

Поэтому $$\frac{t(\gamma, n-1)\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}} = \frac{t(\gamma, n-1)S}{\sqrt{n}}.$$

Итак, окончательно можно утверждать, что с надежностью γ доверительный интервал $\left(\overline{X}_в - \frac{t(\gamma, n-1)S}{\sqrt{n}}, \overline{X}_в + \frac{t(\gamma, n-1)S}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a с точностью оценки $\delta = \frac{t(\gamma, n-1)}{\sqrt{n}}S$.

Как и в предыдущем случае, центр интервала находится в точке $\overline{X}_в$, но длина интервала $2\frac{t(\gamma, n-1)}{\sqrt{n}}S$ является случайной величиной, принимающей тем меньшие значения, чем больше значение n.

Пример 1. У 20 студентов, сдававших экзамен по математике, сердце билось в среднем со скоростью 96 ударов в минуту. Стандартное отклонение выборки было равно 5 ударам в минуту.

Найти 95 %-й доверительный интервал для генерального среднего.

Решение:

Из условия $\bar{x}_в = 96$ и $S = 5$.

Пользуясь таблицей, находим величину $t(0,95;19) = 2,09$.

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85

Тогда точность δ определяется соотношением

$$\delta = \frac{t(0{,}95;19)S}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}09 \cdot 5}{\sqrt{20}} \approx 2{,}34.$$

Подставим полученные значения в формулу для доверительного интервала:

$$(96 - 2{,}34 < a < 96 + 2{,}34),$$

откуда следует, что средняя частота пульса студента при сдаче экзамена по математике с вероятностью 0,95 лежит в интервале

$$93{,}66 < a < 98{,}34.$$

Пример 2. (Оценка истинного значения измеряемой величины). По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдены $\overline{x}_в = 42{,}319$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 5{,}0$. Оценить истинное значение измеряемой величины a с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Решение:

Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала

$$\left(\overline{X}_в - \frac{t(\gamma, n-1)S}{\sqrt{n}}, \overline{X}_в + \frac{t(\gamma, n-1)S}{\sqrt{n}}\right),$$

покрывающего a с заданной надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Пользуясь прил. 2, находим величину $t(0{,}99;8)=3{,}36$. Тогда точность δ определяется соотношением

$$\delta=\frac{t(0,99;\,8)S}{\sqrt{n}}=\frac{3,36\cdot 5}{3}=5,60\,.$$

Тогда границы доверительного интервала равны $(\bar{X}_{в}-5,60;\quad \bar{X}_{в}+5,60)$ или $(36,719;\,47,919)$.

Итак, с надежностью $\gamma=0{,}99$ истинное значение измеряемой величины a заключено в доверительном интервале $(36,719;\,47,919)$.

Замечание. Распределение Стьюдента при $n>50$ близко к стандартному нормальному распределению. Поэтому, при $n>50$ для определения величины δ можно пользоваться не значением $t(\gamma;n-1)$, а соответствующим значением x_{γ}.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения

1. Если $M(X)=a$ неизвестно, то доверительный интервал для оценки $\sigma(X)$ имеет вид

$$\left(\frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_{\text{лев}}};\frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_{\text{пр}}}\right),$$

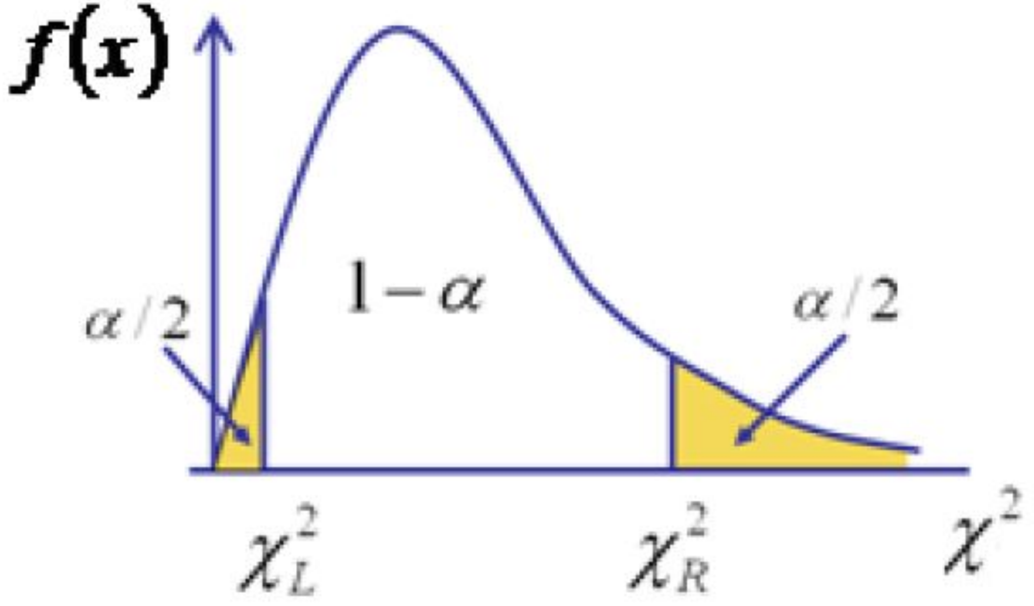
где n – объем выборки;

S – исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_в}\right)^2,$$

$\chi^2_{\text{лев}} = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};\, n-1}$, $\chi^2_{\text{пр}} = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};\, n-1}$ – критические точки χ^2-распределения,

определяемые по таблице прил. 3 при $k = n - 1$, $\alpha = \dfrac{1+\gamma}{2}$, $\alpha = \dfrac{1-\gamma}{2}$.



Пример 1. Для оценки параметра $\sigma(X)$ нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 25 единиц и вычислено $S = 0,8$.

Найти доверительный интервал, покрывающий σ с вероятностью $\gamma = 0,95$.

Решение:

Имеем $n = 25$, $\gamma = 0,95$.

$$\chi^2_{\text{лев}} = \chi^2_{\frac{1+0,95}{2};\,25-1} = \chi^2(0,975;\,24) = 12,4;$$

$$\chi^2_{\text{пр}} = \chi^2_{\frac{1-0,95}{2};\,25-1} = \chi^2(0,025;\,24) = 39,4.$$

Критические точки распределения Пирсона χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2

Доверительный интервал имеет вид

$$\left(\frac{\sqrt{24}\cdot 0{,}8}{\sqrt{39{,}4}}; \frac{\sqrt{24}\cdot 0{,}8}{\sqrt{12{,}4}}\right) \quad \text{или} \quad (0{,}79;\ 1{,}4).$$

2. Другой вид доверительного интервала для оценки $\sigma(X)$ нормального распределения имеет вид

$$S(1-q)<\sigma<S(1+q) \text{ при } q<1;$$
$$0<\sigma<S(1+q) \text{ при } q>1,$$

где S – исправленное среднее квадратическое отклонение; $q=q(\gamma;n)$ находим по таблице значений (прил. 4).

Пример 2. Для оценки параметра нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 25 единиц и вычислено $S = 0{,}8$.

Найти доверительный интервал, покрывающий σ с вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение:

Имеем $n = 25$, $\gamma = 0{,}95$.

По таблице значений $q = q(\gamma; n)$ находим $q = 0{,}32$.

Доверительный интервал имеет вид

$$\left(0{,}8(1 - 0{,}32); 0{,}8(1 + 0{,}32)\right) \text{ или } (0{,}544; 1{,}056).$$

Замечание. Доверительные интервалы в примерах 1 и 2 получили разные при одинаковых данных, но они оба с вероятностью $\gamma = 0{,}95$ покрывают среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Значение функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,52**	0,1985	**1,04**	0,3508	**1,56**	0,4406	**2,16**	0,4846
0,01	0,0040	**0,53**	0,2019	**1,05**	0,3531	**1,57**	0,4418	**2,18**	0,4854
0,02	0,0080	**0,54**	0,2054	**1,06**	0,3554	**1,58**	0,4429	**2,20**	0,4861
0,03	0,0120	**0,55**	0,2088	**1,07**	0,3577	**1,59**	0,4441	**2,22**	0,4868
0,04	0,0160	**0,56**	0,2123	**1,08**	0,3599	**1,60**	0,4452	**2,24**	0,4875
0,05	0,0199	**0,57**	0,2157	**1,09**	0,3621	**1,61**	0,4463	**2,26**	0,4881
0,06	0,0239	**0,58**	0,2190	**1,10**	0,3643	**1,62**	0,4474	**2,28**	0,4887
0,07	0,0279	**0,59**	0,2224	**1,11**	0,3665	**1,63**	0,4484	**2,30**	0,4893
0,08	0,0319	**0,60**	0,2257	**1,12**	0,3686	**1,64**	0,4495	**2,32**	0,4898
0,09	0,0359	**0,61**	0,2291	**1,13**	0,3708	**1,65**	0,4505	**2,34**	0,4904
0,10	0,0398	**0,62**	0,2324	**1,14**	0,3729	**1,66**	0,4515	**2,36**	0,4909
0,11	0,0438	**0,63**	0,2357	**1,15**	0,3749	**1,67**	0,4525	**2,38**	0,4913
0,12	0,0478	**0,64**	0,2389	**1,16**	0,3770	**1,68**	0,4535	**2,40**	0,4918
0,13	0,0517	**0,65**	0,2422	**1,17**	0,3790	**1,69**	0,4545	**2,42**	0,4922
0,14	0,0557	**0,66**	0,2454	**1,18**	0,3810	**1,70**	0,4554	**2,44**	0,4927
0,15	0,0596	**0,67**	0,2486	**1,19**	0,3830	**1,71**	0,4564	**2,46**	0,4931
0,16	0,0636	**0,68**	0,2517	**1,20**	0,3849	**1,72**	0,4573	**2,48**	0,4934
0,17	0,0675	**0,69**	0,2549	**1,21**	0,3869	**1,73**	0,4582	**2,50**	0,4938
0,18	0,0714	**0,70**	0,2580	**1,22**	0,3883	**1,74**	0,4591	**2,52**	0,4941
0,19	0,0753	**0,71**	0,2611	**1,23**	0,3909	**1,75**	0,4599	**2,54**	0,4945
0,20	0,0793	**0,72**	0,2642	**1,24**	0,3925	**1,76**	0,4608	**2,56**	0,4948
0,21	0,0832	**0,73**	0,2673	**1,25**	0,3944	**1,77**	0,4616	**2,58**	0,4951
0,22	0,0871	**0,74**	0,2703	**1,26**	0,3962	**1,78**	0,4625	**2,60**	0,4953
0,23	0,0910	**0,75**	0,2734	**1,27**	0,3980	**1,79**	0,4633	**2,62**	0,4956
0,24	0,0948	**0,76**	0,2764	**1,28**	0,3997	**1,80**	0,4641	**2,64**	0,4959
0,25	0,0987	**0,77**	0,2794	**1,29**	0,4015	**1,81**	0,4649	**2,66**	0,4961
0,26	0,1026	**0,78**	0,2823	**1,30**	0,4032	**1,82**	0,4656	**2,68**	0,4963
0,27	0,1064	**0,79**	0,2852	**1,31**	0,4049	**1,83**	0,4664	**2,70**	0,4965
0,28	0,1103	**0,80**	0,2881	**1,32**	0,4066	**1,84**	0,4671	**2,72**	0,4967
0,29	0,1141	**0,81**	0,2910	**1,33**	0,4082	**1,85**	0,4678	**2,74**	0,4969
0,30	0,1179	**0,82**	0,2939	**1,34**	0,4099	**1,86**	0,4686	**2,76**	0,4971
0,31	0,1217	**0,83**	0,2967	**1,35**	0,4115	**1,87**	0,4693	**2,78**	0,4973
0,32	0,1255	**0,84**	0,2995	**1,36**	0,4131	**1,88**	0,4699	**2,80**	0,4974
0,33	0,1293	**0,85**	0,3023	**1,37**	0,4147	**1,89**	0,4706	**2,82**	0,4976
0,34	0,1331	**0,86**	0,3051	**1,38**	0,4162	**1,90**	0,4713	**2,84**	0,4977
0,35	0,1368	**0,87**	0,3078	**1,39**	0,4177	**1,91**	0,4719	**2,86**	0,4979
0,36	0,1406	**0,88**	0,3106	**1,40**	0,4192	**1,92**	0,4726	**2,88**	0,4980
0,37	0,1443	**0,89**	0,3133	**1,41**	0,4207	**1,93**	0,4732	**2,90**	0,4981
0,38	0,1480	**0,90**	0,3159	**1,42**	0,4222	**1,94**	0,4738	**2,92**	0,4982
0,39	0,1517	**0,91**	0,3186	**1,43**	0,4236	**1,95**	0,4744	**2,94**	0,4984
0,40	0,1554	**0,92**	0,3212	**1,44**	0,4251	**1,96**	0,4750	**2,96**	0,4985
0,41	0,1591	**0,93**	0,3238	**1,45**	0,4265	**1,97**	0,4756	**2,98**	0,4986
0,42	0,1628	**0,94**	0,3264	**1,46**	0,4279	**1,98**	0,4761	**3,00**	0,49865
0,43	0,1664	**0,95**	0,3289	**1,47**	0,4292	**1,99**	0,4767	**3,20**	0,49931
0,44	0,1700	**0,96**	0,3315	**1,48**	0,4306	**2,00**	0,4772	**3,40**	0,49966
0,45	0,1736	**0,97**	0,3340	**1,49**	0,4319	**2,02**	0,4783	**3,60**	0,499841
0,46	0,1772	**0,98**	0,3365	**1,50**	0,4332	**2,04**	0,4793	**3,80**	0,499928
0,47	0,1808	**0,99**	0,3389	**1,51**	0,4345	**2,06**	0,4803	**4,00**	0,499968
0,48	0,1844	**1,00**	0,3413	**1,52**	0,4357	**2,08**	0,4812	**4,50**	0,499997
0,49	0,1879	**1,01**	0,3438	**1,53**	0,4370	**2,10**	0,4821	**5,00**	0,499997
0,50	0,1915	**1,02**	0,3461	**1,54**	0,4382	**2,12**	0,4830		
0,51	0,1959	**1,03**	0,3485	**1,55**	0,4394	**2,14**	0,4838		

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости (односторонняя критическая область)					

Критические точки распределения Пирсона χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблица значений функции $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162