Способы решения систем линейных уравнений.

Практическое занятие.

Способы решения:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \end{cases}$$

Решить систему уравнений, значит найти пару чисел **(Х,У)**, являющихся решением каждого из уравнений входящих в систему.

1) Графический способ.

Алгоритм решения:

1) построить в одной системе координат графики функций, образующих систему;

2) определить точку их пересечения.

3) записать в ответ х= у= .

Решить системы:

1. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Решение:

1. $$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 1 = y \\ y = 3 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

x	***1***	***2***
y	***2***	***5***

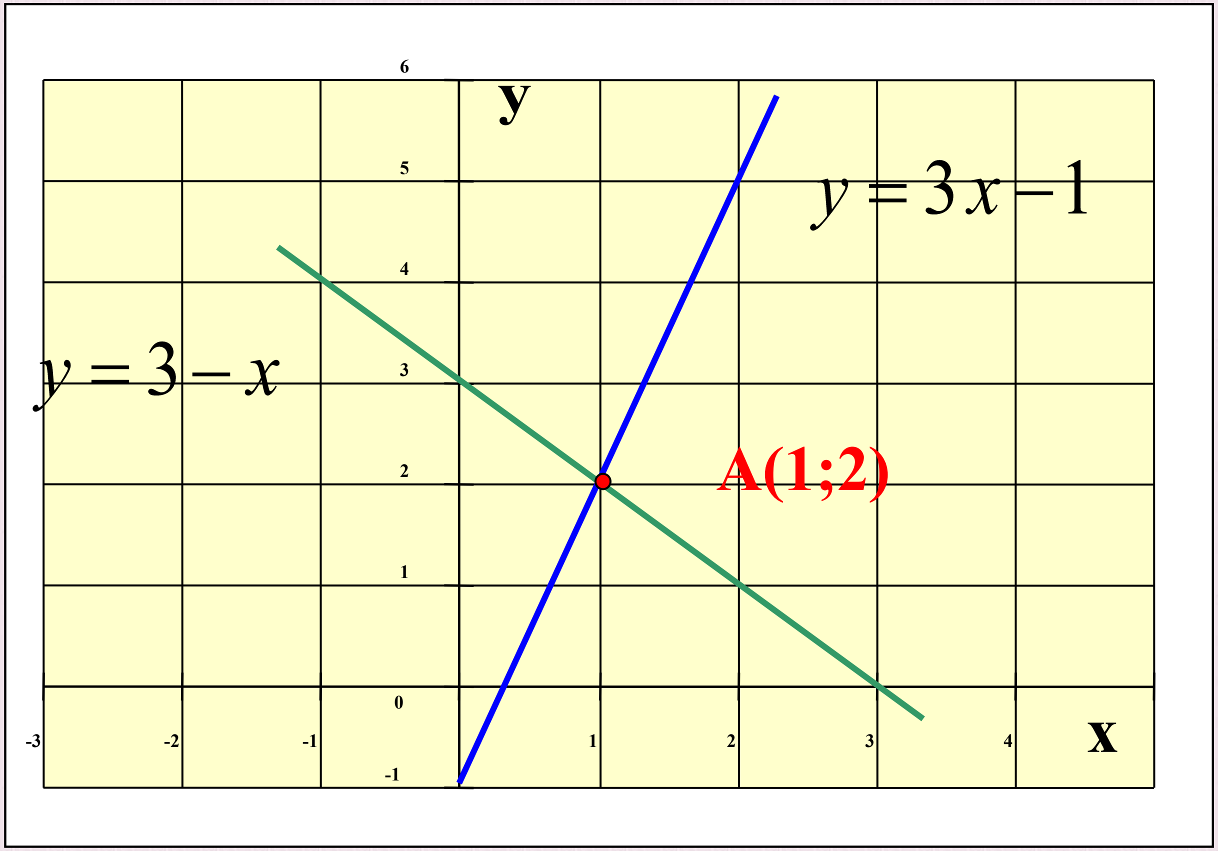
x	***0***	***3***
y	***3***	***0***

Решение:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

x	1	2
y	2	5

x	0	3
y	3	0



Ответ: x = 1, y = 2.

Решение:

2. $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ y = 1 - 2x \end{cases}$

x	*0*	*1*
y	*6*	*4*

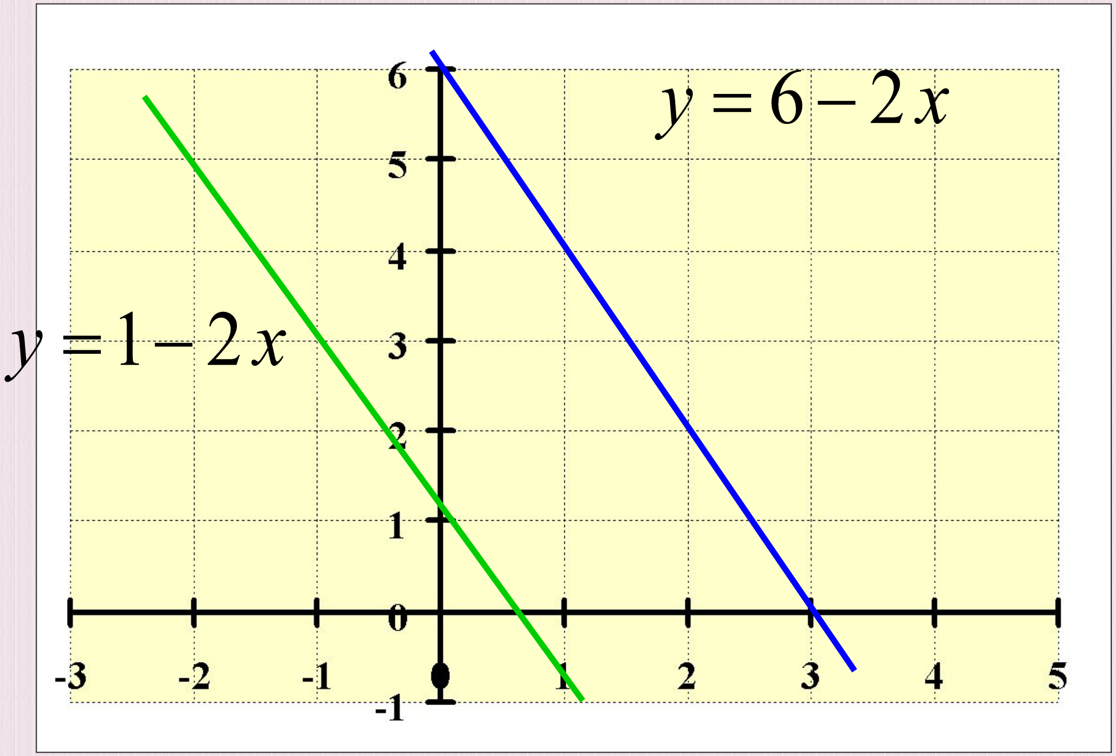
x	*0*	*-1*
y	*1*	*3*

Решение:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

x	0	1
y	6	4

x	0	-1
y	1	3



Ответ: система не имеет решений.

Способы решения:

2) Способ подстановки.

Алгоритм решения:

1) выразить **Х (или У)** из одного уравнения системы;

2) подставить найденное выражение в другое уравнение системы.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x - 2 \cdot (1 - 2x) = 7 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2 + 4x = 7 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9x = 7 + 2 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 : 9 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ответ: x = 1, y = -1.

Определитель:

Определителем (детерминантом) второго порядка называется **число,** определяемое равенством:

$$\det = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

где a_{ij} – элемент определителя,

i- номер строки, j– номер столбца .

Пример. Вычислить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 20 & -3 \end{vmatrix}$

Определитель:

$$\det = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Пример. Вычислить определитель:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 - (-4) \cdot 2 = 36 + 8 = 44,$$

$$2)\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 10 \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 80 - 6 = 74,$$

$$3)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 5 \cdot 7 = 0 - 35 = -35,$$

$$4)\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 20 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3) - (-6) \cdot 20 = 3 + 120 = 123.$$

Способы решения:

4) Способ определителей.

Алгоритм решения:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \end{cases}$$

1) вычислить три определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

2) найти **Х** и **У** по **формулам Крамера:**

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

а) если Δ≠0, то система имеет единственное решение,

б) если Δ=0, Δх=0 и Δу=0, то система имеет бесконечное множество решений,

в) если Δ=0 и хотя бы один из Δх≠0 или Δу≠0, то система не имеет решений.

Способ определителей:

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - 8y = -1 \end{cases}$$

Решение:

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - 8y = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} =$$

Решение:

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - 8y = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 1 \cdot 4 = -16 - 4 = -20$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-8) - 1 \cdot (-1) = -24 + 1 = -23,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = -2 - 12 = -14,$$

Решение:

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x - 8y = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 2\cdot(-8) - 1\cdot 4 = -16 - 4 = -20 \neq 0, \textit{ значит система}$$

имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 3\cdot(-8) - 1\cdot(-1) = -24 + 1 = -23,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 3\cdot 4 = -2 - 12 = -14,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-23}{-20} = 1\frac{3}{20} = 1{,}15; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{-20} = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

Ответ: x = 1,15; y = 0,7.

Задание:

Решить системы уравнений:

$$1).\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 10x - 5y = 1 \end{cases}$$

$$\textit{Ответ}: x = \frac{11}{30}; \quad y = \frac{8}{15}$$

$$2).\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x - y = 40 \end{cases}$$

$$\textit{Ответ}: x = 126; \quad y = 86$$

$$3).\begin{cases} 9x + 2y = 3 \\ 7y - x = 5 \end{cases}$$

$$\textit{Ответ}: x = \frac{11}{65}; \quad y = \frac{48}{65}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ