ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СОДЕРЖАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Выполнила: Юдина В.В.
Студентка группы С-1841
Направления подготовки 43.04.01

ИСТОРИЯ

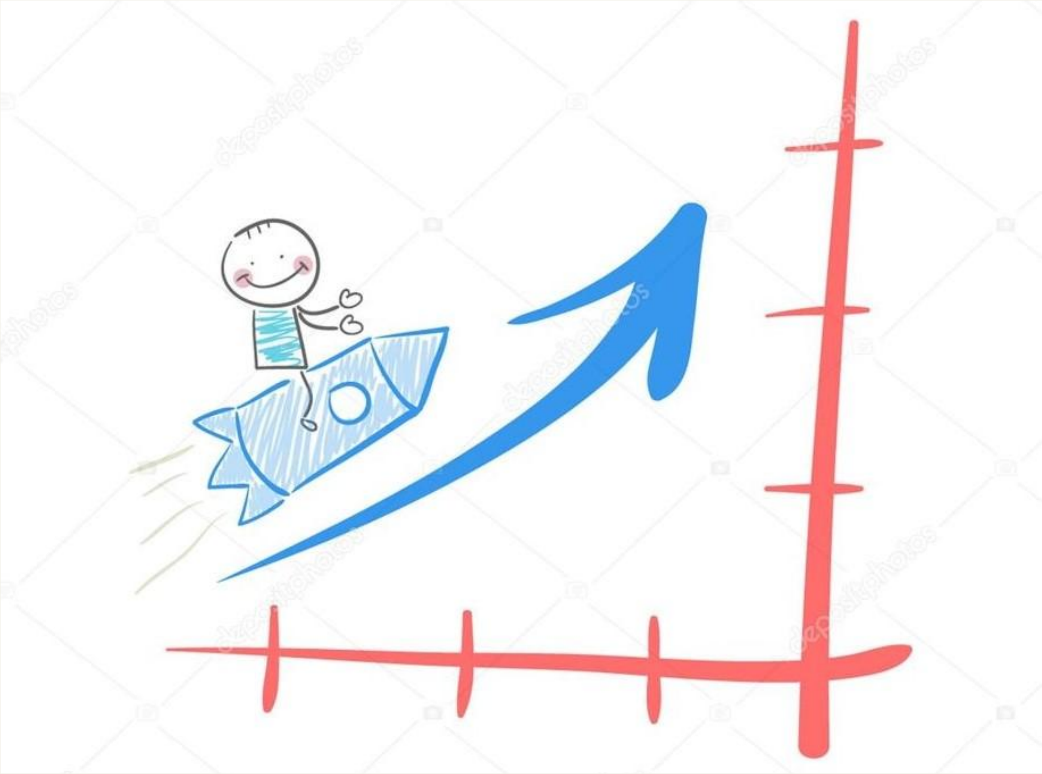
Математическое программирование возникло в 30-е годы XX века. Венгерский математик Б.Эгервари в 1931 году решил задачу, называемую проблемой выбора. Американский ученый Г.У. Куй обобщил этот метод, после чего он получил название венгерского метода. В 1939 году российский ученый Л.В. Канторович разработал метод разрешающих множителей решения задач линейного программирования. Большой вклад в развитие математического программирования внесли а

В 1939 году российский ученый Л.В. Канторович разработал метод разрешающих множителей решения задач линейного программирования. Большой вклад в развитие математического программирования внесли американские ученые.

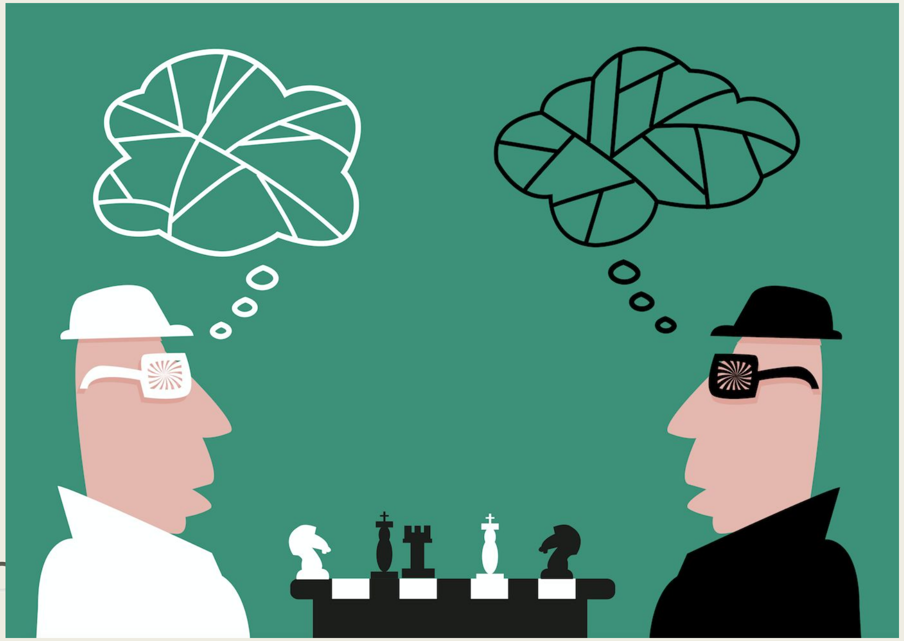
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ-

это математическая дисциплина, в которой разрабатываются методы отыскания экстремальных значений целевой функции среди множества ее возможных значений, определяемых ограничениями.

Исследование различных процессов обычно начинается с их моделирования, т.е. отражения реального процесса через математические соотношения.



Математическое программирование включает в себя такие разделы математики как линейное, нелинейное и динамическое программирование. Сюда же обычно относят стохастическое программирование, теорию игр, теорию массового обслуживания, теорию управления запасами и некоторые другие.



ЭТАПЫ СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ:

1) выбор переменных задачи;
2) составление системы ограничений;
3) выбор целевой функции.

Переменными задачи называются величины $x1, x2, X3,\ldots, xn$, которые полностью характеризуют экономический процесс. Их обычно записывают в виде вектора $X=(x1, x2, x3,\ldots., xn)$

Система ограничений включает в себя систему уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических или физических условий, например, положительности переменных и т.п.

Целевой функцией называют функцию переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти.

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\ (\min)\ . \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \\ a_{(l+1)1}x_1 + a_{(l+1)2}x_2 + \ldots + a_{(l+1)n}x_n \le b_{l+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, t;\ t \le n. \qquad (3)$$

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n-мерный вектор $X=(X1, X2,...,Xn)$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности.

Множество допустимых решений (планов) задачи образует **область допустимых решений** (ОДР).

Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

ЗАДАЧА 1:

Для производства продукции 2-х видов А и В используется материал трех сортов. Данные о затратах сырья на производство единицы продукции, запасах сырья и прибыли от реализации единицы продукции приведены в таблице:

Сорт сырья/ Вид продукции	I	II	III	Прибыль
А	4	8	5	4
В	1	7	9	6
Запасы сырья	196	552	567	

Требуется составить такой план производства, при котором предприятие получит наибольшую прибыль

РЕШЕНИЕ:

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим максимальное значение целевой функции $F(X) = 4x_1+6x_2$ при следующих условиях-ограничений.

$4x_1+x_2\leq196$

$8x_1+7x_2\leq552$

$5x_1+9x_2\leq567$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).

В 1-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_3. В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_4. В 3-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_5.

$4x_1+x_2+x_3 = 196$

$8x_1+7x_2+x_4 = 552$

$5x_1+9x_2+x_5 = 567$

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x3, x4, x5
Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план:
X0 = (0,0,196,552,567)
Бази[...]

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	196	4	1	1	0	0
x_4	552	8	7	0	1	0
x_5	567	5	9	0	0	1
F(X0)	0	-4	-6	0	0	0

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Необходимо определение новой свободной переменной.
Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2}
и из них выберем наименьшее:
min (196 : 1 , 552 : 7 , 567 : 9) = 63
Следовательно, 3-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен (9) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_3	196	4	1	1	0	0	196
x_4	552	8	7	0	1	0	$^{552}/_7$
x_5	567	5	**9**	0	0	1	**63**
F(X1)	0	-4	**-6**	0	0	0	

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_5 в план 1 войдет переменная x_2.
Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_5 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=9. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 записываем нули.
Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_2 и столбец x_2. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А*В)/РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (9), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
196-(567 • 1):9	4-(5 • 1):9	1-(9 • 1):9	1-(0 • 1):9	0-(0 • 1):9	0-(1 • 1):9
552-(567 • 7):9	8-(5 • 7):9	7-(9 • 7):9	0-(0 • 7):9	1-(0 • 7):9	0-(1 • 7):9
567 : 9	5 : 9	9 : 9	0 : 9	0 : 9	1 : 9
0-(567 • -6):9	-4-(5 • -6):9	-6-(9 • -6):9	0-(0 • -6):9	0-(0 • -6):9	0-(1 • -6):9

Получаем новую симплекс-таблицу

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	133	$^{31}/_9$	0	1	0	$^{-1}/_9$
x_4	111	$^{37}/_9$	0	0	1	$^{-7}/_9$
x_2	63	$^{5}/_9$	1	0	0	$^{1}/_9$
F(X1)	378	$^{-2}/_3$	0	0	0	$^{2}/_3$

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1}
и из них выберем наименьшее:
$\min(133 : 3^4/_9, 111 : 4^1/_9, 63 : ^5/_9) = 27$
Следовательно, 2-ая строка является ведущей.
Разрешающий элемент равен $(4^1/_9)$ и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_3	133	$^{31}/_9$	0	1	0	$^{-1}/_9$	$^{1197}/_{31}$
x_4	111	**$4^1/_9$**	0	0	1	$^{-7}/_9$	**27**
x_2	63	$^5/_9$	1	0	0	$^1/_9$	$^{567}/_5$
F(X2)	378	**$^{-2}/_3$**	0	0	0	$^2/_3$	

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_4 в план 2 войдет переменная x_1.

Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_4 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=$4^1/_9$. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_1 и столбец x_1. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$133-(111 \bullet 3^4/_9):4^1/_9$	$3^4/_9-(4^1/_9 \bullet 3^4/_9):4^1/_9$	$0-(0 \bullet 3^4/_9):4^1/_9$	$1-(0 \bullet 3^4/_9):4^1/_9$	$0-(1 \bullet 3^4/_9):4^1/_9$	$^{-1}/_9-(^{-7}/_9 \bullet 3^4/_9):4^1/_9$
$111 : 4^1/_9$	$4^1/_9 : 4^1/_9$	$0 : 4^1/_9$	$0 : 4^1/_9$	$1 : 4^1/_9$	$^{-7}/_9 : 4^1/_9$
$63-(111 \bullet {}^5/_9):4^1/_9$	$^5/_9-(4^1/_9 \bullet {}^5/_9):4^1/_9$	$1-(0 \bullet {}^5/_9):4^1/_9$	$0-(0 \bullet {}^5/_9):4^1/_9$	$0-(1 \bullet {}^5/_9):4^1/_9$	$^1/_9-(^{-7}/_9 \bullet {}^5/_9):4^1/_9$
$378-(111 \bullet {}^{-2}/_3):4^1/_9$	$^{-2}/_3-(4^1/_9 \bullet {}^{-2}/_3):4^1/_9$	$0-(0 \bullet {}^{-2}/_3):4^1/_9$	$0-(0 \bullet {}^{-2}/_3):4^1/_9$	$0-(1 \bullet {}^{-2}/_3):4^1/_9$	$^2/_3-(^{-7}/_9 \bullet {}^{-2}/_3):4^1/_9$

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	40	0	0	1	$^{-31}/_{37}$	$^{20}/_{37}$
x_1	27	1	0	0	$^{9}/_{37}$	$^{-7}/_{37}$
x_2	48	0	1	0	$^{-5}/_{37}$	$^{8}/_{37}$
F(X2)	396	0	0	0	$^{6}/_{37}$	$^{20}/_{37}$

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Оптимальный план можно записать так:

$x_1 = 27$, $x_2 = 48$

$F(X) = 4 \cdot 27 + 6 \cdot 48 = 396$

ЗАДАЧА 2:

В районе имеются четыре ткацкие фабрики, выпускающие ткань определенного артикула. Для ее выпуска требуется два вида пряжи. По плану району отпускается 6000 и 4000 усл. ед. этих видов пряжи. В таблице приведен расход в единицу времени на каждой фабрике каждого вида пряжи и данные, характеризующие производительность (количество, ткани, изготовляемое на каждой фабрике в единицу времени).

Вид пряжи	Запасы пряжи	Расход пряжи в единицу времени на фабриках			
		1	2	3	4
I	6000	4	9	7	10
II	4000	1	1	3	4
Производительность фабрик		12	20	18	40

Определить время работы каждой фабрики по выпуску ткани данного артикула так, чтобы при этом обеспечивался максимальный выпуск ткани. В соответствии с оптимальным планом распределить пряжу между фабриками.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!