

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СОДЕРЖАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Выполнила: Юдина В.В.
Студентка группы С-1841
Направления подготовки 43.04.01

ИСТОРИЯ

Математическое программирование возникло в 30-е годы XX века. Венгерский математик Б.Эгервари в 1931 году решил задачу, называемую проблемой выбора. Американский ученый Г.У. Куй обобщил этот метод, после чего он получил название венгерского метода. В 1939 году российский ученый Л.В. Канторович разработал метод разрешающих множителей решения задач линейного программирования. Большой вклад в развитие математического программирования внесли

а)

Дана матрица:

2	10	9	7
15	4	14	8
13	14	16	11
4	15	13	19

Решим её венгерским методом.
1. найдём в каждой строке минимальное значение и вычтем его из каждого элемента данной строки.

2	10	9	7
15	4	14	8
13	14	16	11
4	15	13	19

 → Получим матрицу:

0	8	7	5
11	0	10	4
2	3	5	0
0	11	9	15

2. Назначение сотрудников провести нельзя.
Выберем в каждом столбце матрицы минимальный элемент и вычтем его из каждого элемента данного столбца:

0	8	7	5
11	0	10	4
2	3	5	0
0	11	9	15

 →

0	8	2	5
11	0	5	4
2	3	0	0
0	11	4	15

3. Назначение провести нельзя.
Минимальным числом прямых вычеркнем все нули в матрице.
Среди не вычеркнутых элементов выберем минимальный.
Прибавим его к элементам, стоящим на пересечении прямых и вычтем из всех не вычеркнутых элементов.
Получим матрицу:

0	8	2	5
11	0	5	4
2	3	0	0
0	11	4	15

 →

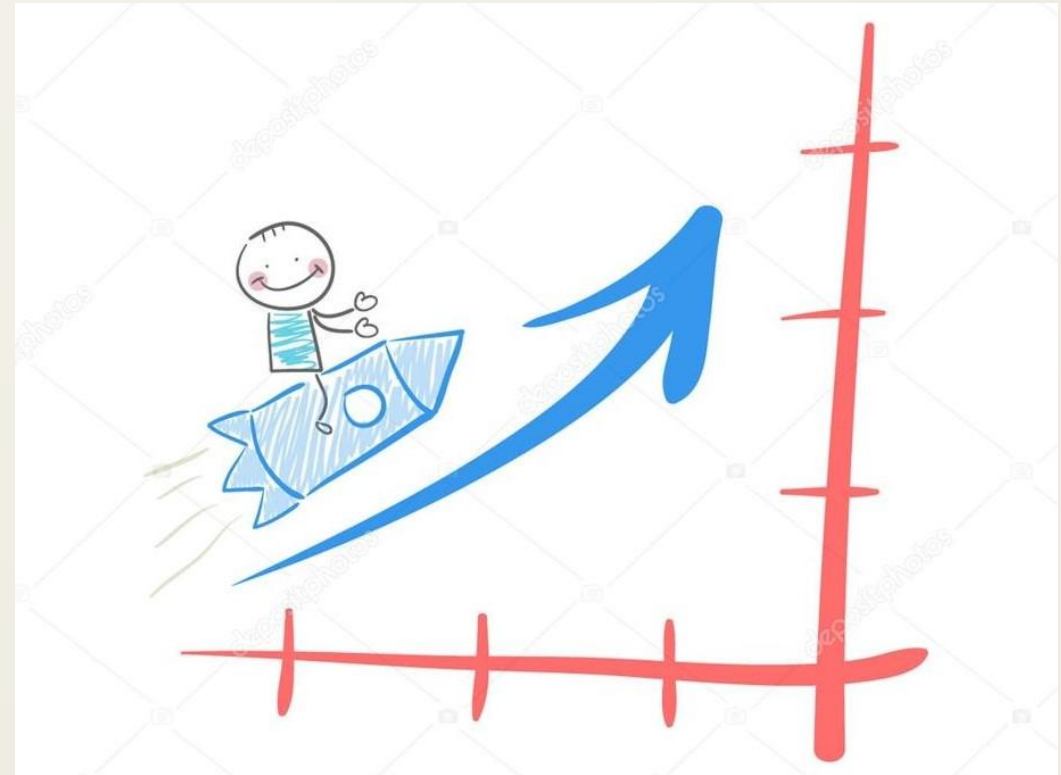
0	8	0	3
11	0	3	2
4	5	0	0
0	11	2	13

Назначения проведены:
1й сотрудник выполняет 3ю работу;
2й-выполняет 2ю работу;
3й-выполняет 4ю работу;
5й-выполняет 1ю работу.

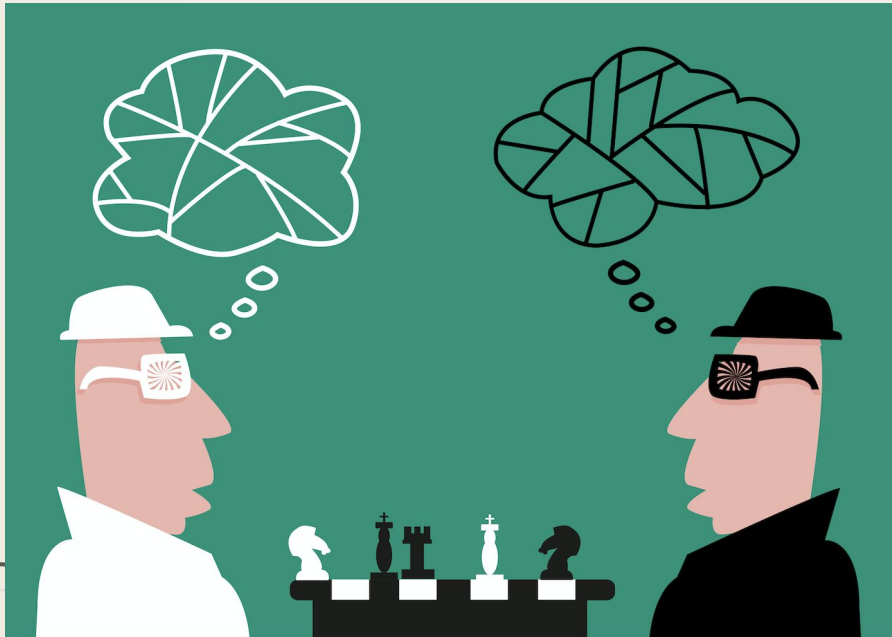
В 1939 году российский ученый Л.В. Канторович разработал метод разрешающих множителей решения задач линейного программирования. Большой вклад в развитие математического программирования внесли американские ученые.



Исследование различных процессов обычно начинается с их моделирования, т.е. отражения реального процесса через математические соотношения.



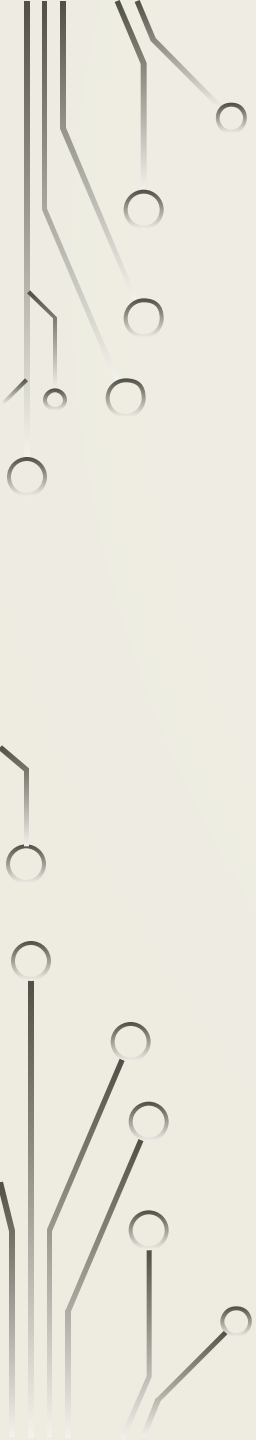
Математическое программирование включает в себя такие разделы математики как линейное, нелинейное и динамическое программирование. Сюда же обычно относят стохастическое программирование, теорию игр, теорию массового обслуживания, теорию управления запасами и некоторые другие.



ЭТАПЫ СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ:

- 1) выбор переменных задачи;
- 2) составление системы ограничений;
- 3) выбор целевой функции.

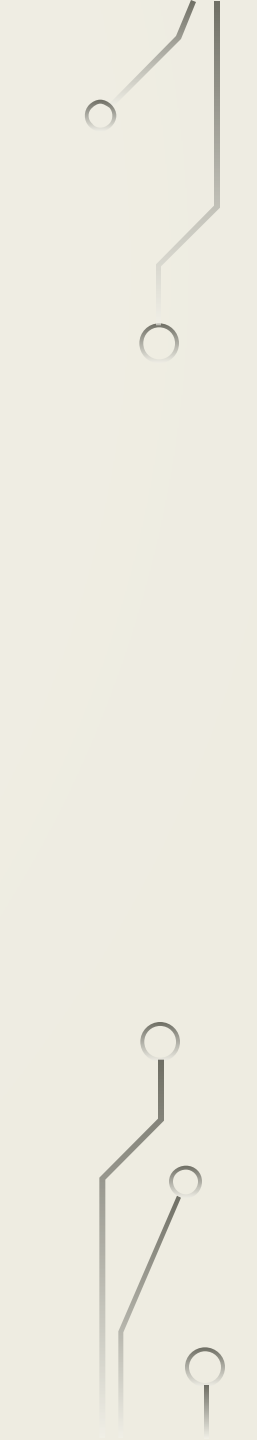




Переменными задачи называются величины $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, которые полностью характеризуют экономический процесс. Их обычно записывают в виде вектора $X=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

Система ограничений включает в себя систему уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических или физических условий, например, положительности переменных и т.п.

Целевой функцией называют функцию переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти.



Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n -мерный вектор $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности.

Множество допустимых решений (планов) задачи образует **область допустимых решений** (ОДР).

Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

ЗАДАЧА 1:

Для производства продукции 2-х видов А и В используется материал трех сортов. Данные о затратах сырья на производство единицы продукции, запасах сырья и прибыли от реализации единицы продукции приведены в таблице:

Сорт сырья/ Вид продукции	I	II	III	Прибыль
А	4	8	5	4
В	1	7	9	6
Запасы сырья	196	552	567	

Требуется составить такой план производства, при котором предприятие получит наибольшую прибыль

РЕШЕНИЕ:

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим максимальное значение целевой функции $F(X) = 4x_1 + 6x_2$ при следующих условиях-ограничений.

$$4x_1 + x_2 \leq 196$$

$$8x_1 + 7x_2 \leq 552$$

$$5x_1 + 9x_2 \leq 567$$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).

В 1-м неравенстве смысла (\leq) вводим базисную переменную x_3 . В 2-м неравенстве смысла (\leq) вводим базисную переменную x_4 . В 3-м неравенстве смысла (\leq) вводим базисную переменную x_5 .

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 196$$

$$8x_1 + 7x_2 + x_4 = 552$$

$$5x_1 + 9x_2 + x_5 = 567$$

Матрица коэффициентов $A = a_{ij}$ этой системы уравнений имеет вид:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 8 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_3, x_4, x_5
Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план:

$$x_0 = (0, 0, 196, 552, 567)$$

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	196	4	1	1	0	0
x_4	552	8	7	0	1	0
x_5	567	5	9	0	0	1
$F(x_0)$	0	-4	-6	0	0	0

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2 , так как это наибольший коэффициент по модулю.

Необходимо определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2}

и из них выберем наименьшее:

$$\min (196 : 1, 552 : 7, 567 : 9) = 63$$

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (9) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_3	196	4	1	1	0	0	196
x_4	552	8	7	0	1	0	$552/7$
x_5	567	5	9	0	0	1	63
F(X1)	0	-4	-6	0	0	0	

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_5 в план 1 войдет переменная x_2 .

Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_5 плана 0 на разрешающий элемент $PЭ=9$. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_2 и столбец x_2 . Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

$$НЭ = СЭ - (A \cdot B) / РЭ$$

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (9), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$196 - (567 \cdot 1) : 9$	$4 - (5 \cdot 1) : 9$	$1 - (9 \cdot 1) : 9$	$1 - (0 \cdot 1) : 9$	$0 - (0 \cdot 1) : 9$	$0 - (1 \cdot 1) : 9$
$552 - (567 \cdot 7) : 9$	$8 - (5 \cdot 7) : 9$	$7 - (9 \cdot 7) : 9$	$0 - (0 \cdot 7) : 9$	$1 - (0 \cdot 7) : 9$	$0 - (1 \cdot 7) : 9$
$567 : 9$	$5 : 9$	$9 : 9$	$0 : 9$	$0 : 9$	$1 : 9$
$0 - (567 \cdot -6) : 9$	$-4 - (5 \cdot -6) : 9$	$-6 - (9 \cdot -6) : 9$	$0 - (0 \cdot -6) : 9$	$0 - (0 \cdot -6) : 9$	$0 - (1 \cdot -6) : 9$

Получаем новую симплекс-таблицу

Базис	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	133	$31/9$	0	1	0	$-1/9$
x_4	111	$37/9$	0	0	1	$-7/9$
x_2	63	$5/9$	1	0	0	$1/9$
F(X1)	378	$-2/3$	0	0	0	$2/3$

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1 , так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее:

$$\min (133 : 3^4/9, 111 : 4^1/9, 63 : 5/9) = 27$$

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен $(4^1/9)$ и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Бази с	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_3	133	$3^1/9$	0	1	0	$-1/9$	$1197/_{31}$
x_4	111	$4^1/9$	0	0	1	$-7/9$	27
x_2	63	$5/9$	1	0	0	$1/9$	$567/_{5}$
F(X2)	378	$-2/_{3}$	0	0	0	$2/_{3}$	

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_4 в план 2 войдет переменная x_1 .

Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_4 плана 1 на разрешающий элемент $РЭ=4^1/9$. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_1 и столбец x_1 . Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$133 - (111 \cdot 3^4/9) : 4^1/9$	$3^4/9 - (4^1/9 \cdot 3^4/9) : 4^1/9$	$0 - (0 \cdot 3^4/9) : 4^1/9$	$1 - (0 \cdot 3^4/9) : 4^1/9$	$0 - (1 \cdot 3^4/9) : 4^1/9$	$-1/9 - (-7/9 \cdot 3^4/9) : 4^1/9$
$111 : 4^1/9$	$4^1/9 : 4^1/9$	$0 : 4^1/9$	$0 : 4^1/9$	$1 : 4^1/9$	$-7/9 : 4^1/9$
$63 - (111 \cdot 5/9) : 4^1/9$	$5/9 - (4^1/9 \cdot 5/9) : 4^1/9$	$1 - (0 \cdot 5/9) : 4^1/9$	$0 - (0 \cdot 5/9) : 4^1/9$	$0 - (1 \cdot 5/9) : 4^1/9$	$1/9 - (-7/9 \cdot 5/9) : 4^1/9$
$378 - (111 \cdot -2/3) : 4^1/9$	$-2/3 - (4^1/9 \cdot -2/3) : 4^1/9$	$0 - (0 \cdot -2/3) : 4^1/9$	$0 - (0 \cdot -2/3) : 4^1/9$	$0 - (1 \cdot -2/3) : 4^1/9$	$2/3 - (-7/9 \cdot -2/3) : 4^1/9$

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	40	0	0	1	$-\frac{31}{37}$	$\frac{20}{37}$
x_1	27	1	0	0	$\frac{9}{37}$	$-\frac{7}{37}$
x_2	48	0	1	0	$-\frac{5}{37}$	$\frac{8}{37}$
F(x_2)	396	0	0	0	$\frac{6}{37}$	$\frac{20}{37}$

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Оптимальный план можно записать так:

$$x_1 = 27, x_2 = 48$$

$$F(X) = 4 \cdot 27 + 6 \cdot 48 = 396$$

ЗАДАЧА 2:

В районе имеются четыре ткацкие фабрики, выпускающие ткань определенного артикула. Для ее выпуска требуется два вида пряжи. По плану району отпускается 6000 и 4000 усл. ед. этих видов пряжи. В таблице приведен расход в единицу времени на каждой фабрике каждого вида пряжи и данные, характеризующие производительность (количество, ткани, изготовляемое на каждой фабрике в единицу времени).

Вид пряжи	Запасы пряжи	Расход пряжи в единицу времени на фабриках			
		1	2	3	4
I	6000	4	9	7	10
II	4000	1	1	3	4
Производительность фабрик		12	20	18	40

Определить время работы каждой фабрики по выпуску ткани данного артикула так, чтобы при этом обеспечивался максимальный выпуск ткани. В соответствии с оптимальным планом распределить пряжу между фабриками.

The image features a light beige background with decorative circuit board patterns in the corners. These patterns consist of thin grey lines forming various shapes and paths, ending in small grey circles, resembling a printed circuit board (PCB) layout. The patterns are located in the top-left, top-right, bottom-left, and bottom-right corners.

**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!**