Ряды

Числовые ряды

Если члены бесконечной числовой последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

соединить знаком «+», то полученный символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется **<u>числовым рядом</u>.** Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются <u>членами ряда</u>, a_n - <u>общий член ряда</u>.

Сумма n первых членов ряда $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ называется <u>n-й частичной суммой ряда.</u>

О. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (1) называется <u>сходящимся</u>, а S называется <u>суммой ряда</u>. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ бесконечен или не существует, то ряд (1) называется <u>расходящимся</u>.

Пример. Исследовать ряды на сходимость:

1. 0 + 0+…+ 0 +…

$$S_n = \underbrace{0+0+\ldots+0}_{n} = 0. \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Данный ряд сходится и его сумма равна 0.

2. $a+a+\ldots+a+\ldots \quad (a \neq 0)$

$$S_n = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n} = a\cdot n. \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\cdot n = +\infty.$$

Ряд расходится.

3. Ряд геометрической прогрессии $a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+...,\ q\neq 0,\ a\neq 0$.

1. если $q=1$, то ряд расходится (пример 2).

2. $q\neq 1$ По формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0, |q|<1\\ 1, q=1,\\ \text{не}\exists, q=-1,\\ +\infty, q>1,\\ \text{не}\exists, \text{но}\, q^n - б.б, q<-1.\end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{a-q^n}{1-q}=\begin{cases}\frac{a}{1-q}, |q|<1,\\ \text{не}\exists, q=-1,\\ +\infty, q>1,\\ -\infty, q<-1.\end{cases}$$

Ряд геометрической прогрессии сходится, если $|q|<1$, если $|q|>1$ - расходится.

Вывод: убывающая по абсолютной величине геометрическая прогрессия сходится, неубывающая по абсолютной величине геометрическая прогрессия расходится.

Гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ расходится.

Обобщённый гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+...+\frac{1}{n^p}+...$$

при $p<1$ – расходится, при $p>1$ - сходится.

Необходимый признак сходимости

Если ряд сходится, то предел его общего члена a_n при $n \to \infty$ равен нулю.

$$\text{Ряд сходится} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Следствие. Если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не равен нулю, то ряд расходится.

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \text{ряд расходится.}$$

Остаток ряда

Пусть дан ряд $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1)

Ряд, полученный из данного путём отбрасывания его первых n членов, называется n-ым остатком ряда. $a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+...$ (2)

R_n – сумма n-го остатка ряда в случае его сходимости.

Т. Если ряд (1) сходится, то сходится и любой из его остатков. Если сходится один из остатков ряда, то сходится и данный ряд. (данный ряд и его остаток сходятся или расходятся одновременно).

Следствие 1. Если ряд (1) сходится, то его сумма S может быть представлена в виде $S=S_n+R_n$, S_n - частичная сумма ряда (1), а R_n - сумма его остатка.

Следствие 2. Если в сходящемся ряде отбросить n первых членов или приписать конечное число членов, то при этом его сходимость не нарушится.

Т. Для того чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы при $n\to\infty$ остаток ряда стремился к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$.

Действия над рядами

О. ***Произведением ряда на число*** называется ряд, каждый член которого равен произведению соответствующего члена исходного ряда на это число.

Т. Если ряд сходится и имеет сумму S, то и произведение данного ряда на число C есть также сходящийся ряд, и его сумма равна $C \cdot S$. Если ряд расходится, то произведение этого ряда на число, отличное от нуля, есть ряд расходящийся.

Пусть даны 2 ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ***Суммой этих рядов*** называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Разностью этих рядов называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$

Т. Если каждый из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и сумма данных рядов – ряд сходящийся, и его сумма равна сумме сумм двух данных рядов.

Замечание. Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа рядов.

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, где $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1$ называется произведением рядов (1) и (2).

Ряды с положительными членами

Т. Сумма сходящегося ряда с положительными членами не зависит от порядка членов ряда.

Исследование ряда с отрицательными членами сводится к исследованию ряда с положительными членами.

Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путём сравнения его с другим рядом, про который известно, сходится он или расходится.

Признак сравнения рядов с положительными членами

Пусть даны 2 ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2).

1. Если, начиная с некоторого номера, каждый член ряда (1) не превосходит соответствующего члена ряда (2), и ряд (2) сходится, то и ряд (1) тоже сходится. При этом сумма ряда(1) не превосходит суммы ряда (2), если неравенство $a_n \le b_n$ выполняется для всех натуральных n.

2. Если, начиная с некоторого номера, каждый член ряда (1) больше или равен соответствующего члена ряда (2), и ряд (2) расходится, то и ряд (1) тоже расходится.

Признак сравнения рядов с положительными членами в предельной форме

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) - ряды с положительными членами, и существует конечный, отличный от нуля предел отношения их общих членов $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, то ряды одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, то ряд (1) сходится, если сходится ряд (2).

Если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$, то ряд (1) расходится, если расходится ряд (2).

Признак Даламбера. Если существует предел отношения $(n+1)$-го члена положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ к n-му члену при $n \to \infty$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то:

1) если $l < 1$ – ряд сходится,

2) если $l > 1$ - ряд расходится,

3) $l = 1$ – вопрос о сходимости не решён.

Признак Коши. Пусть для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда

1) если $l < 1$ – ряд сходится,

2) если $l > 1$ - ряд расходится,

3) $l = 1$ – вопрос о сходимости не решён.

Интегральный признак сходимости

Пусть дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого не возрастают, а функция $f(x)$, такая, что $f(n)=a_n$, непрерывна, положительна и не возрастает в $[1;+\infty)$. Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Ряды с членами произвольного знака

Знакочередующийся ряд – ряд, в котором члены поочерёдно то положительны, то отрицательны: $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, где $a_n > 0$.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$, и предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, то ряд сходится, а его сумма не превышает абсолютной величины первого члена: $S \leq a_1$.

Знакопеременный ряд – ряд, в котором любой его член u_n может быть как положительным, так и отрицательным.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится абсолютный ряд - ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся, если абсолютный ряд расходится, а исходный ряд сходится.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Пусть дан ряд с членами произвольных знаков

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \quad (1).$$

Рассмотрим ряд из всех положительных членов ряда (1)

$$p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}p_n \quad (2)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин всех отрицательных членов ряда (1)

$$q_1+q_2+\ldots+q_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}q_n \quad (3).$$

Т. Если ряд (1) сходится абсолютно, то оба ряда (2) и (3) сходятся, причём сумма ряда (1) будет равна разности сумм рядов (2) и (3). Если же ряд (1) сходится условно, то оба ряда (2) и (3) расходятся.

Т. Если ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка его членов.

Т. Римана. Если ряд сходится условно, то можно так переставить его члены, что вновь созданный ряд будет иметь любую наперёд заданную сумму. Можно также добиться того, что новый ряд окажется расходящимся.

Т. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд, и его сумма равна произведению сумм данных рядов.

Признаки сходимости рядов с произвольными членами

Признак сравнения. Если каждый член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) по абсолютной величине не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (2), то ряд (1) сходится и притом абсолютно. Причём, если S – сумма ряда (1), а σ - сумма ряда (2), то $|S| \le \sigma$.

Признак Даламбера. Если существует предел абсолютной величины отношения $(n+1)$ - го члена ряда к n - му и равен некоторому числу l $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, то 1) если $l<1$ – ряд сходится абсолютно, 2) если $l>1$ - ряд расходится, 3) $l=1$ – вопрос о сходимости не решён.

Признак Коши. Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = l$. Тогда 1) если $l<1$ – ряд сходится абсолютно, 2) если $l>1$ - расходится, 3) $l=1$ – вопрос о сходимости не решён.

Степенные ряды

Степенной ряд – ряд вида $c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n+...$(1), c_0, c_1, …,c_n - постоянные коэффициенты.

Совокупность тех значений x, при которых степенной ряд сходится, называется ***областью сходимости степенного ряда***. Если x=0, то ряд принимает вид c_0+ 0+ 0+…+0+… - сходится. Всякий степенной ряд сходится в точке 0.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при некотором значении $x=x_0$, то он сходится абсолютно при всех значениях x таких, что $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если степенной ряд расходится при $x = x_0$, то он расходится при всех значениях x таких, что $|x| > |x_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое неотрицательное число R, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится. Число R называется *радиусом сходимости*, а интервал (-R,R) - *интервал сходимости степенного ряда,* на концах интервала сходимости ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема об интервале сходимости. Для всякого степенного ряда (1) может быть лишь один из 3 случаев:

1)степенной ряд сходится на $(-\infty, +\infty)$;

2) степенной ряд сходится лишь в т. $x=0$;

3) существует интервал (-R,R), внутри которого ряд сходится, а во всех точках вне этого интервала расходится.

Нахождение интервала сходимости. При каждом фиксированном $x \in R$ ряд (1) становится числовым, причём с произвольными членами. Если существует $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$ (2), то $R = \frac{1}{L}$.

Можно доказать, что если существует $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$ (3), то (-R;R) находится так же, т.е. $R = \frac{1}{L}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = R$.

Правило нахождения области сходимости степенного ряда. Найти интервал сходимости (-R;R), где $R = \frac{1}{L}$, L находится по ф-ле (2) или (3), при условии, что пределы (2) или (3) существуют. В случае, когда R – конечное число, отличное от нуля, исследовать ряд (1) на сходимость при x=R и x=-R и присоединить к интервалу сходимости те концы, где ряд сходится.

Свойства степенных рядов:

Пусть $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ - сумма степенного ряда. На любом отрезке [a, b], целиком принадлежащем интервалу сходимости (-R;R), функция f(x) является непрерывной.

1. Степенной ряд можно почленно интегрировать на этом [a, b].

2. В интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать.

Полученные после интегрирования и дифференцирования ряды имеют тот радиус сходимости R.

Необходимое и достаточное условие разложения функции в степенной ряд. Для того чтобы функция *f(x)* разлагалась в степенной ряд в окрестности т. a, необходимо и достаточно, чтобы: 1. она имела производные любого порядка в этой окрестности; 2. чтобы остаточный член формулы Тейлора $R_n(x)\to 0$ при $n\to+\infty$. При этом разложение имеет вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$