
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ В ЦИФРОВЫХ АВТОМАТАХ

Системы счисления.

Позиционные и непозиционные СС.

Перевод из одной СС в другую.

Арифметические операции в различных СС.

Система счисления – совокупность приемов и правил наименования и обозначения чисел, позволяющих установить взаимно однозначное соответствие между любым числом и его представлением в виде конечного числа символов.

В любой системе счисления выбирается **алфавит**, представляющий собой совокупность некоторых символов (или знаков).

Древний Восток: (СС)₁₂

вилки, ложки, тарелки;

Английская система мер – 1 фут-12 дюймов;

1 шиллинг – 12 пенсов;

12 мес в году; дюжина.

Древний Вавилон : (СС)₆₀

1 час = 60м мин.

1 мин = 60 сек.

Все системы счисления можно разделить на ***позиционные*** и ***непозиционные***.

Непозиционная система счисления – система, в которой символы, обозначающие то или иное количество, не меняют своего значения в зависимости от местоположения (позиции) в изображении числа.

□ Запись числа A в непозиционной системе счисления D может быть представлена выражением:

$$A_D = D_1 + D_2 + \dots + D_N = \sum_{i=1}^N D_i$$

- ✘ A_D - запись числа A в системе счисления D ;
- ✘ D_i - символы системы.

Римская система счисления

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Римская система счисления – непозиционная.

Меньшие знаки, поставленные справа от большего, прибавляются, а меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

$$XXIV = 10 + 10 + (5 - 1) = 24$$

$$MCMXXXV = 1000 + (1000 - 100) + 10 + 10 + 10 + 5 = 1935$$

Система счисления, в которой значение цифры определяется местоположением (позицией) в изображении числа, называется **позиционной**.

Упорядоченный набор символов (цифр) (a_0, a_1, \dots, a_n) , используемый для представления любых чисел в заданной позиционной СС, называют ее **алфавитом**, число символов (цифр) алфавита $p=n+1$ – ее **основанием**, а саму СС называют p -ричной.

Основание позиционной СС – количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной СС.

(СС)₁₀

Алфавит – 0123456789, а основание $p = 10$.
В 10-чной СС каждый разряд имеет вес, равный степени 10. Следовательно, значение одной и той же цифры определяется ее местоположением в изображении числа, характеризуемым степенью числа 10.

Например:

$$\square 222,22 = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

□ Таким образом любое число A можно представить в виде полинома, путем разложения его по степеням числа 10:

$$A_{10} = a_n * 10^n + a_{n-1} * 10^{n-1} + \dots + a_1 * 10^1 + a_0 * 10^0 + a_{-1} * 10^{-1} + \dots + a_{-m} * 10^{-m}$$

Последовательность из коэффициентов которого представляет собой десятичную запись числа A_{10} :

$$A_{10} = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots a_{-m}$$

□ Запись числа в каждой из СС с основанием p означает сокращенную запись выражения:

$$\begin{aligned} A_p &= a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 p^0 \\ &+ a_{-1} p^{-1} + \dots + a_{-m} p^{-m} = \sum_{i=-m}^n a_i p^i \end{aligned}$$

- ✗ a_i - цифры СС;
- ✗ n и m - число целых и дробных разрядов соответственно;
- ✗ A_p - запись числа A в p -ричной СС.

Например, десятичное число 35 в СС с основанием $p=12,10,8,4,3,2$ будет иметь вид:

$$\square 2B_{12} = 2 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0$$

$$\square 35_{10} = 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

$$\square 43_8 = 4 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$$

$$\square 203_4 = 2 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0$$

$$\square 1022_3 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

$$\square 100011_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Из приведенных примеров видно, что с уменьшением основания системы счисления уменьшается число используемых цифр, но возрастает количество разрядов.

Все известные позиционные СС являются **аддитивно-мультипликативными**.

(числительные русского языка- 568 пять сотен плюс шесть десятков плюс восемь)

СС используются для построения на их основе различных кодов в системах передачи, хранения и преобразования информации.

Код – система условных знаков (символов) для представления различной информации.

□ Передача или хранение сообщений сводится к передаче или хранению чисел.

Числа можно выразить в к-либо СС.

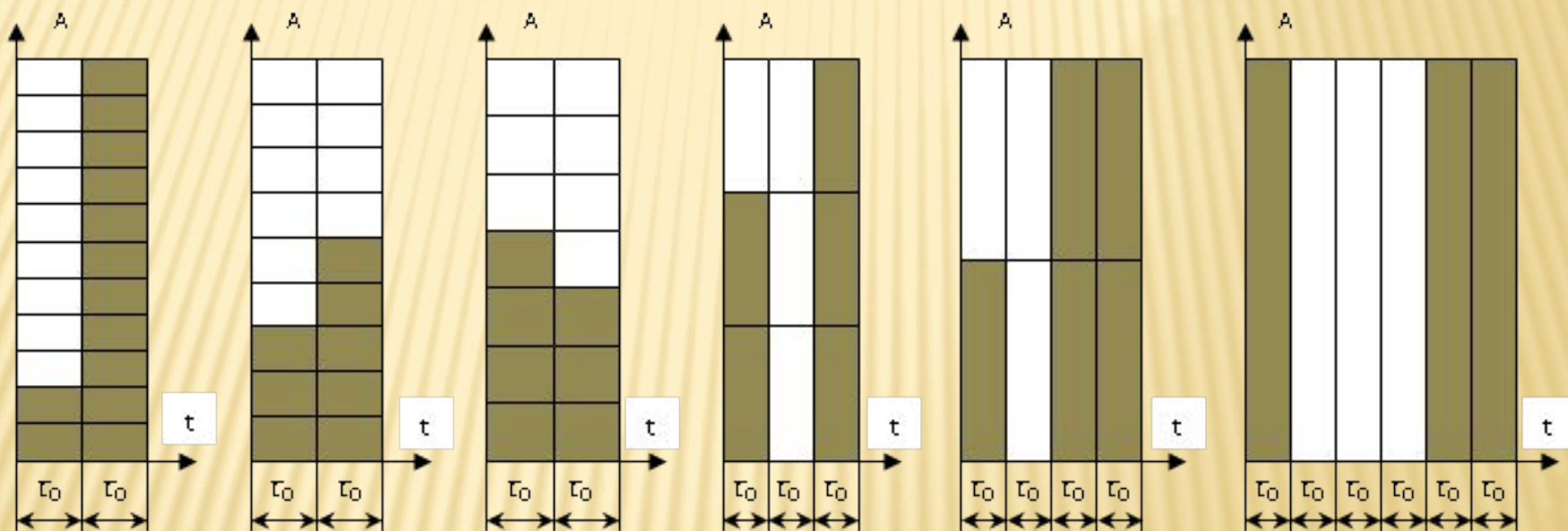
Таким образом, будет получен один из кодов, основанный на данной СС.

Каждому разряду числа можно поставить в соответствие какой-либо параметр электрического сигнала, например амплитуду.

На рис. в качестве примера приведено изображение числа 35 в виде импульсов длительностью τ_0 с разными амплитудами (при разных СС).

ИЗОБРАЖЕНИЕ ЧИСЛА 35 В ВИДЕ СИГНАЛОВ ПРИ РАЗНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

$p=12$ 2B	$p=10$ 35	$p=8$ 43	$p=4$ 203	$p=3$ 1022	$p=2$ 100011
--------------	--------------	-------------	--------------	---------------	-----------------



Анализ СС и построенных на их основе кодов с позиций применения в системах передачи, хранения и преобразования информации показывает, что чем больше основание системы, тем меньше число разрядов требуется для представления данного числа, а следовательно и меньшее время для его передачи.

Однако с ростом основания существенно повышаются требования к аппаратуре формирования и распознавания элементарных сигналов, соответствующих различным символам. Логические элементы вычислительных устройств в этом случае должны иметь большее число устойчивых состояний.

С точки зрения минимальных затрат условного оборудования наиболее экономичной является СС с основанием 3.

Незначительно ей уступают ей двоичная и четверичная. СС с основанием 10 и более существенно менее эффективны.

Сравнивая эти системы с точки зрения удобства физической реализации соответствующих им логических элементов и простоты выполнения в них арифметических и логических действий, предпочтение в настоящее время отдается двоичной СС.

Действительно логические элементы, соответствующие этой СС должны иметь всего два устойчивых состояния. Задача различения сигналов сводится к задаче обнаружения (есть импульс или его нет), что значительно проще.

Арифметические и логические действия также легче

Для перевода **двоичного числа в десятичное** необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 2, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_2 = A_n * 2^{n-1} + A_{n-1} * 2^{n-2} + A_{n-2} * 2^{n-3} + \dots + A_2 * 2^1 + A_1 * 2^0$$

Пример . Число 11101000_2 перевести в десятичную систему счисления.

$$11101000_2 = 1 * 2^7 + 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 232_{10}$$

Для перевода **восьмеричного числа в десятичное** необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 8, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_8 = A_n * 8^{n-1} + A_{n-1} * 8^{n-2} + A_{n-2} * 8^{n-3} + \dots \\ + A_2 * 8^1 + A_1 * 8^0$$

Пример:

$$75013_8 = 7 * 8^4 + 5 * 8^3 + 0 * 8^2 + 1 * 8^1 + 3 * 8^0 \\ = 31243_{10}$$

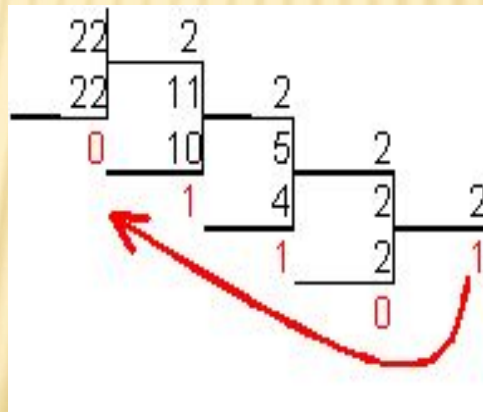
Для перевода **шестнадцатеричного числа в десятичное** необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 16, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_{16} = A_n * 16^{n-1} + A_{n-1} * 16^{n-2} + A_{n-2} * 16^{n-3} + \dots + A_2 * 16^1 + A_1 * 16^0$$

Пример:

$$\begin{aligned} FDA1_{16} &= 15 * 16^3 + 13 * 16^2 + 10 * 16^1 + 1 * 16^0 \\ &= 64929_{10} \end{aligned}$$

Для перевода **десятичного числа в двоичную систему** его необходимо последовательно делить на 2 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 1. Число в двоичной системе записывается как последовательность последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.



$$22_{10} = 10110_2$$

Для перевода **десятичного числа в восьмеричную систему** его необходимо последовательно делить на 8 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 7. Число в восьмеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

Пример. Число перевести в восьмеричную систему счисления.

$$\begin{array}{r} 571 \div 8 \\ \underline{56} \\ -11 \\ \underline{8} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \div 8 \\ \underline{64} \\ -7 \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \div 8 \\ \underline{8} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \underline{8} \\ 1 \end{array}$$

$$571_{10} = 1073_8$$

Для перевода десятичного числа в шестнадцатеричную систему его необходимо последовательно делить на 16 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 15. Число в шестнадцатеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

Пример. Число 7467_{10} перевести в шестнадцатеричную систему счисления.

7467	16		
7456	468	16	
11	464	29	16
	2	16	1
		13	

$$7467_{10} = 1D2B_{16}$$

Таблица 1. Наиболее важные системы счисления.

Двоичная (Основание 2)	Восьмеричная (Основание 8)	триады	Десятичная (Основание 10)	Шестнадцатеричная (Основание 16)	тетрады
0	0	000	0	0	0000
1	1	001	1	1	0001
	2	010	2	2	0010
	3	011	3	3	0011
	4	100	4	4	0100
	5	101	5	5	0101
	6	110	6	6	0110
	7	111	7	7	0111
			8	8	1000
			9	9	1001
				A	1010
				B	1011
				C	1100
				D	1101
				E	1110
				F	1111

Чтобы перевести число из **двоичной системы** в **восьмеричную**, его нужно разбить на триады (тройки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую триаду нулями, и каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой

Пример. Число 1001011_2 перевести в восьмеричную систему счисления.

$$001\ 001\ 011_2 = 113_8$$

Чтобы перевести число *из двоичной системы в шестнадцатеричную*, его нужно разбить на тетрады (четверки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую тетраду нулями, и каждую тетраду заменить соответствующей восьмеричной цифрой

Пример. Число 1011100011_2 перевести в шестнадцатеричную систему счисления

$$0010\ 1110\ 0011_2 = 2E3_{16}$$

Для перевода **восьмеричного числа в двоичное** необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой.

Пример. Число 531_8 перевести в двоичную систему счисления.

$$531_8 = 101011001_2$$

Для перевода **шестнадцатеричного числа в двоичное** необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной тетрадой.

Пример. Число $EE8_{16}$ перевести в двоичную систему счисления.

$$EE8_{16} = 111011101000_2$$

При переходе из **восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную** и обратно, необходим промежуточный перевод чисел в двоичную систему.

Пример 1. Число FEA_{16} перевести в восьмеричную систему счисления

$$FEA_{16} = 111111101010_2$$
$$111\ 111\ 101\ 010_2 = 7752_8$$

Пример 2. Число 6635_8 перевести в шестнадцатеричную систему счисления.

$$6635_8 = 110110011101_2$$
$$1101\ 1001\ 1101_2 = D9D_{16}$$

Арифметические действия над числами в любой позиционной системе счисления производятся по тем же правилам, что и в 10-ричной СС.

При этом нужно только пользоваться теми таблицами сложения и умножения, которые имеют место при данном основании p СС.

