# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ В ЦИФРОВЫХ АВТОМАТАХ

Системы счисления.

Позиционные и непозиционные СС.

Перевод из одной СС в другую.

Арифметические операции в различных СС.

**Система счисления –** совокупность приемов и правил наименования и обозначения чисел, позволяющих установить взаимно однозначное соответствие между любым числом и его представлением в виде конечного числа символов.

В любой системе счисления выбирается ***алфавит***, представляющий собой совокупность некоторых символов (или знаков).

Древний Восток: $(CC)_{12}$

вилки, ложки, тарелки;

Английская система мер – 1 фут-12 дюймов;

1 шиллинг – 12 пенсов;

12 мес в году; дюжина.

Древний Вавилон : $(CC)_{60}$

1 час = 60м мин.

1 мин = 60 сек.

Все системы счисления можно разделить на ***позиционные*** и ***непозиционные***.

***Непозиционная система счисления*** – система, в которой символы, обозначающие то или иное количество, не меняют своего значения в зависимости от местоположения (позиции) в изображении числа.

Запись числа *A* в непозиционной системе счисления *D* может быть представлена выражением:

$$A_D = D_1 + D_2 + \cdots + D_N = \sum_{i=1}^{N} D_i$$

- $A_D$- запись числа A в системе счисления D;
- $D_i$- символы системы.

# Римская система счисления

| | |
|---|---|
| I | 1 |
| V | 5 |
| X | 10 |
| L | 50 |
| C | 100 |
| D | 500 |
| M | 1000 |

***Римская система счисления*** – непозиционная.

Меньшие знаки, поставленные справа от большего, прибавляются, а меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

XXIV =10+10+(5-1)= 24

MCMXXXV =1000+(1000-100)+10+10+10+5= 1935

Система счисления, в которой значение цифры определяется местоположением (позицией) в изображении числа, называется ***позиционной***.

Упорядоченный набор символов (цифр) ($\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_1}$, **...**, $\boldsymbol{a_n}$), используемый для представления любых чисел в заданной позиционной СС, называют ее **алфавитом**, число символов (цифр) алфавита ***p=n+1*** – ее **основанием**, а саму СС называют ***р***-ричной.

***Основание*** позиционной СС – количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной СС.

# $(СС)_{10}$

Алфавит – 0123456789, а основание p = 10.

В 10-чной СС каждый разряд имеет вес, равный степени 10. Следовательно, значение одной и той же цифры определяется ее местоположением в изображении числа, характеризуемым степенью числа 10.

**Например**:

- $222{,}22 = 2*10^2+2*10^1+2*10^0+2*10^{-1}+2*10^{-2}$

Таким образом любое число *A* можно представить в виде полинома, путем разложения его по степеням числа 10:

$$A_{10} = a_n * 10^n + a_{n-1} * 10^{n-1} + \ldots + a_1 * 10^1 + a_0 * 10^0 + a_{-1} * 10^{-1} + \cdots + a_{-m} * 10^{-m}$$

Последовательность из коэффициентов которого представляет собой десятичную запись числа $A_{10}$:

$$A_{10} = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_{-1} \ldots a_{-m}$$

Запись числа в каждой из СС с основанием *p* означает сокращенную запись выражения:

$$A_p = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + \cdots + a_{-m} p^{-m} = \sum_{i=-m}^{n} a_i p^i$$

- $a_i$- цифры СС;
- n и m- число целых и дробных разрядов соответственно;
- $A_p$- запись числа A в p-ричной СС.

***Например,*** десятичное число 35 в СС с основанием р=12,10,8,4,3,2 будет иметь вид:

- $2B_{12} = 2*12^1 + 11*12^0$
- $35_{10} = 3*10^1 + 5*10^0$
- $43_8 = 4*8^1 + 3*8^0$
- $203_4 = 2*4^2 + 0*4^1 + 3*4^0$
- $1022_3 = 1*3^3 + 0*3^2 + 2*3^1 + 2*3^0$
- $100011_2 = 1*2^5 + 0*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$

Из приведенных примеров видно, что с уменьшением основания системы счисления уменьшается число используемых цифр, но возрастает количество разрядов.

Все известные позиционные СС являются **аддитивно-мультипликативными**.

(*числительные русского языка- 568 пять сотен плюс шесть десятков плюс восемь*)

СС используются для построения на их основе различных кодов в системах передачи, хранения и преобразования информации.

***Код*** – система условных знаков (символов ) для представления различной информации.

Передача или хранение сообщений сводится к передаче или хранению чисел.

Числа можно выразить в к-либо СС.

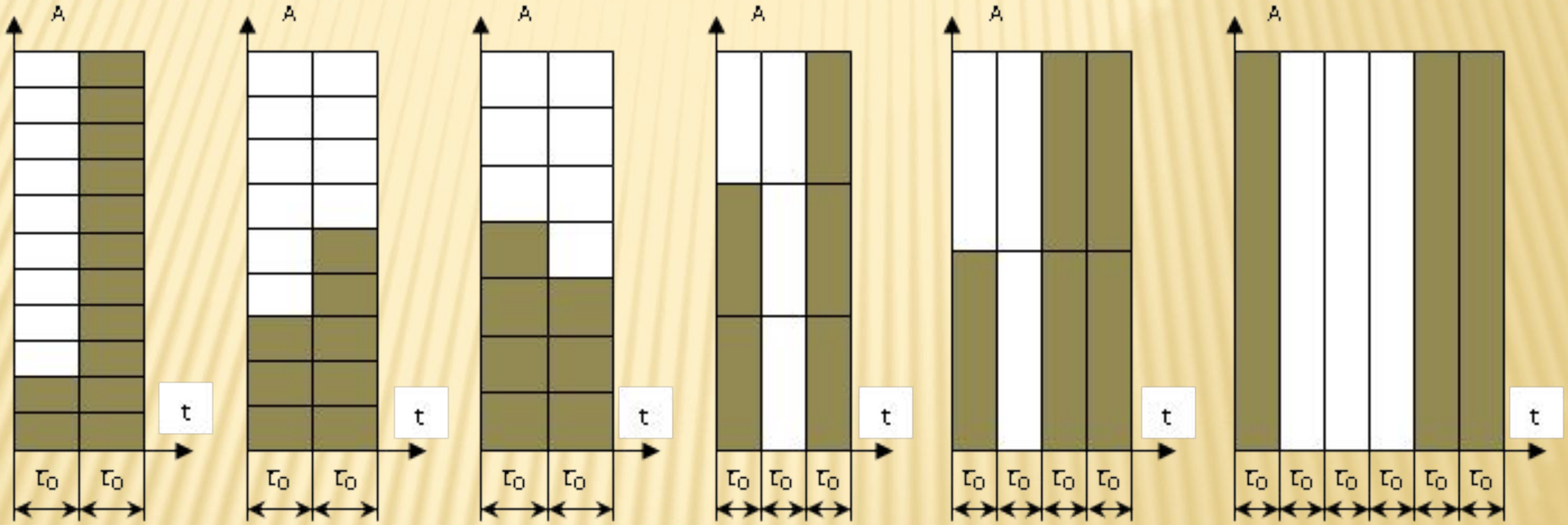
Таким образом, будет получен один из кодов, основанный на данной СС.

Каждому разряду числа можно поставить в соответствие какой-либо параметр электрического сигнала, например амплитуду.

На рис. в качестве примера приведено изображение числа 35 в виде импульсов длительностью $\tau_0$ с разными амплитудами (при разных СС).

# ИЗОБРАЖЕНИЕ ЧИСЛА 35 В ВИДЕ СИГНАЛОВ ПРИ РАЗНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

| p=12 | p=10 | p=8 | p=4 | p=3 | p=2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2B | 35 | 43 | 203 | 1022 | 100011 |



Анализ СС и построенных на их основе кодов с позиций применения в системах передачи, хранения и преобразования информации показывает, что чем больше основание системы, тем меньше число разрядов требуется для представления данного числа, а следовательно и меньшее время для его передачи.

Однако с ростом основания существенно повышаются требования к аппаратуре формирования и распознавания элементарных сигналов, соответствующих различным символам. Логические элементы вычислительных устройств в этом случае должны иметь большее число устойчивых состояний.

С точки зрения минимальных затрат условного оборудования наиболее экономичной является СС с основанием 3.

Незначительно ей уступают ей двоичная и четверичная. СС с основанием 10 и более существенно менее эффективны.

Сравнивая эти системы с точки зрения удобства физической реализации соответствующих им логических элементов и простоты выполнения в них арифметических и логических действий, предпочтение в настоящее время отдается двоичной СС.

Действительно логические элементы, соответствующие этой СС должны иметь всего два устойчивых состояния. Задача различения сигналов сводится к задаче обнаружения (есть импульс или его нет), что значительно проще.

Арифметические и логические действия также легче

Для перевода ***двоичного числа в десятичное*** необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 2, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$\mathrm{X}_2 = \mathrm{A}_n * 2^{n-1} + A_{n-1} * 2^{n-2} + A_{n-2} * 2^{n-3} + \cdots + A_2 * 2^1 + A_1 * 2^0$$

**Пример .** Число $11101000_2$ перевести в десятичную систему счисления.

$$11101000_2 = 1 * 2^7 + 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 232_{10}$$

Для перевода ***восьмеричного числа в десятичное*** необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 8, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$\mathrm{X}_8 = \mathrm{A}_n * 8^{n-1} + A_{n-1} * 8^{n-2} + A_{n-2} * 8^{n-3} + \cdots + A_2 * 8^1 + A_1 * 8^0$$

**Пример**:

$$75013_8 = 7 * 8^4 + 5 * 8^3 + 0 * 8^2 + 1 * 8^1 + 3 * 8^0 = 31243_{10}$$

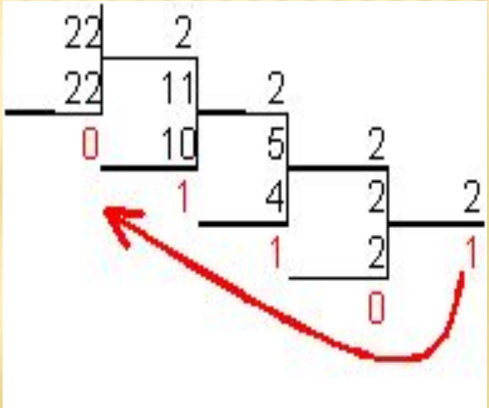
Для перевода ***шестнадцатеричного числа в десятичное*** необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 16, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$\mathrm{X}_{16} = \mathrm{A}_n * 16^{n-1} + A_{n-1} * 16^{n-2} + A_{n-2} * 16^{n-3} + \cdots + A_2 * 16^1 + A_1 * 16^0$$

**Пример**:

$$FDA1_{16} = 15 * 16^3 + 13 * 16^2 + 10 * 16^1 + 1 * 16^0 = 64929_{10}$$

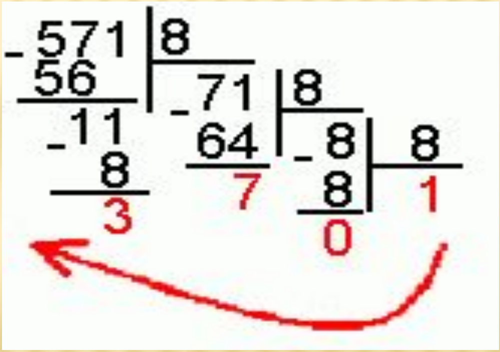
Для перевода ***десятичного числа в двоичную систему*** его необходимо последовательно делить на 2 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 1. Число в двоичной системе записывается как последовательность последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.




$$22_{10} = 10110_2$$

Для перевода ***десятичного числа в восьмеричную систему*** его необходимо последовательно делить на 8 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 7. Число в восьмеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

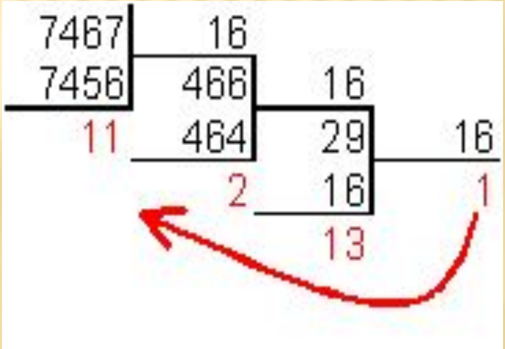
**Пример.** Число перевести в восьмеричную систему счисления.




$$571_{10} = 1073_8$$

Для перевода ***десятичного числа в шестнадцатеричную систему*** его необходимо последовательно делить на 16 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 15. Число в шестнадцатеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

**Пример.** Число $7467_{10}$ перевести в шестнадцатеричную систему счисления.




$7467_{10} = 1D2B_{16}$

## Таблица 1. Наиболее важные системы счисления.

| Двоичная (Основание 2) | Восьмеричная (Основание 8) | триады | Десятичная (Основание 10) | Шестнадцатеричная (Основание 16) | тетрады |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 000 | 0 | 0 | 0000 |
| 1 | 1 | 001 | 1 | 1 | 0001 |
| | 2 | 010 | 2 | 2 | 0010 |
| | 3 | 011 | 3 | 3 | 0011 |
| | 4 | 100 | 4 | 4 | 0100 |
| | 5 | 101 | 5 | 5 | 0101 |
| | 6 | 110 | 6 | 6 | 0110 |
| | 7 | 111 | 7 | 7 | 0111 |
| | | | 8 | 8 | 1000 |
| | | | 9 | 9 | 1001 |
| | | | | A | 1010 |
| | | | | B | 1011 |
| | | | | C | 1100 |
| | | | | D | 1101 |
| | | | | E | 1110 |
| | | | | F | 1111 |

Чтобы перевести число из ***двоичной системы в восьмеричную***, его нужно разбить на триады (тройки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую триаду нулями, и каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой

**Пример.** Число $1001011_2$ перевести в восьмеричную систему счисления.

$$001\ 001\ 011_2 = 113_8$$

Чтобы перевести число ***из двоичной системы в шестнадцатеричную***, его нужно разбить на тетрады (четверки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую тетраду нулями, и каждую тетраду заменить соответствующей восьмеричной цифрой

**Пример.** Число $1011100011_2$ перевести в шестнадцатеричную систему счисления

$$0010\ 1110\ 0011_2 = 2E3_{16}$$

Для перевода ***восьмеричного числа в двоичное*** необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой.

**Пример.** Число $531_8$ перевести в двоичную систему счисления.

$$531_8 = 101011001_2$$

Для перевода ***шестнадцатеричного числа в двоичное*** необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной тетрадой.

**Пример.** Число $EE8_{16}$ перевести в двоичную систему счисления.

$$EE8_{16} = 111011101000_2$$

При переходе из ***восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную*** и обратно, необходим промежуточный перевод чисел в двоичную систему.

**Пример 1.** Число $FEA_{16}$ перевести в восьмеричную систему счисления

$$FEA_{16} = 111111101010_2$$

$$111\ 111\ 101\ 010_2 = 7752_8$$

**Пример 2.** Число $6635_8$ перевести в шестнадцатеричную систему счисления.

$$6635_8 = 110110011101_2$$

$$1101\ 1001\ 1101_2 = D9D_{16}$$

Арифметические действия над числами в любой позиционной системе счисления производятся по тем же правилам, что и в 10-ричной СС.

При этом нужно только пользоваться теми таблицами сложения и умножения, которые имеют место при данном основании ***p*** СС.

Таблицы сложения и умножения в троичной системе счисления

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 10 |
| 2 | 2 | 10 | 11 |

| × | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 11 |

Выполнить действия в троичной системе счисления

$$\begin{array}{rcccc} & & 2 & 1 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & 2 & 1 \\ * & & & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 2 & 1 & \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Таблицы сложения и умножения в пятеричной системе счисления:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 4 | 10 | 11 | 12 | 13 |

| * | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 11 | 13 |
| 3 | 3 | 11 | 14 | 22 |
| 4 | 4 | 13 | 22 | 31 |

Выполнить действия в пятеричной системе счисления

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 4 |
| + | 1 | 0 | 2 |
| | 4 | 3 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 2 |
| * | | 1 | 3 |
| 1 | 0 | 3 | 1 |
| 1 | 4 | 2 | |
| 3 | 0 | 0 | 1 |