

# Ряды

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

# Необходимый признак сходимости ряда

- Если ряд  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

сходится, то его общий член  $u_n \rightarrow 0$  при неограниченном возрастании  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$  или не существует, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  расходится

# Признак Даламбера

- Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  то при  $l < 1$  ряд (5) сходится, а при  $l > 1$  расходится. При  $l = 1$  вопрос о сходимости ряда остается переменным.

# Признак Коши

- Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$  ( $a_n > 0$ ) то при  $l < 1$  ряд (5) сходится, а при  $l > 1$  расходится. Если  $l = 1$ , то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

## Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

**Пример 2.35.** Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{n+2} \right)^n$  на сходимость.

*Решение*  
Находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n/n - 1/n}{n/n + 2/n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 2.$$

Так как  $2 > 1$ , то по признаку Коши ряд расходится.  
*Ответ:* ряд расходится.

**Пример 2.36.** Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$  на сходимость.

**Решение**

Так как в  $U_n$  присутствуют факториалы, используем признак Даламбера.

Составим  $U_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}$ , тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{((n+1)!)^2(2n)!} = \left| \frac{(2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n+1)! = n!(n+1)} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2}{(n!)^2(n+1)^2(2n)!} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n}{n} + \frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 4 > 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд расходится.

*Ответ:* ряд расходится.

**Пример 2.37.** Исследовать ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^n$  на сходимость.

Признак Коши в этом случае не работает, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = 1$ . Здесь применим необходимый признак сходимости рядов. Находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^n = [1+0]^\infty.$$

Сводим ко второму замечательному пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n+1) + 2 - 2}{2n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-2}{2n+3} \right) = e^{-1} \neq 0.$$

Следовательно, по необходимому признаку ряд расходится.

*Ответ:* ряд расходится.

**Пример 2.38.** Методом математической индукции доказать формулу

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^3,$$

где  $n$  — натуральное число.

*Решение*

При  $n = 1$  обе части равенства обращаются в единицу и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.

Предположим, что формула верна при  $n = k$ , т. е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left( \frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства  $(k+1)^3$  и преобразуем правую часть. Тогда получим

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \left( \frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 = \\ &= (k+1)^2 \left( \frac{k^2}{4} + k + 1 \right) = \left( \frac{k+1}{2} \right)^2 (k^2 + 4k + 4) = \left( \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, из условия, что формула верна при  $n = k$ , следует, что она верна и при  $n = k + 1$ . Это утверждение справедливо при любом натуральном значении  $k$ . Итак, второе условие