# Ряды

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

# Необходимый признак сходимости ряда

- Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

  сходится, то его общий член $u_n \to 0$ при неограниченном возрастании $n$ $(n \to \infty)$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

# Признак Даламбера

- Если существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ то при $\ell<1$ ряд (5) сходится , а при $\ell>1$ расходится. При $\ell=1$ вопрос о сходимости ряда остается переменным.

# Признак Коши

- Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \ (a_n > 0)$ то при $\ell < 1$ ряд (5) сходится, а при $\ell > 1$ расходится. Если $\ell = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

# Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

**Пример 2.35.** Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^{n}$ на сходимость.

***Решение***

Находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{{}^{2n}\!/_{n} - {}^{1}\!/_{n}}{{}^{n}\!/_{n} + {}^{2}\!/_{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 2.$$

Так как $2 > 1$, то по признаку Коши ряд расходится.

*Ответ*: ряд расходится.

**Пример 2.36.** Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ на сходимость.

***Решение***

Так как в $U_n$ присутствуют факториалы, используем признак Даламбера.

Составим $U_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}$, тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{((n+1)!)^2 (2n)!} = \left| \begin{matrix} (2n+2! = (2n)!(2n+1)(2n+2) \\ (n+1)! = n!(n+1) \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2}{(n!)^2 (n+1)^2 (2n)!} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n}{n}+\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=4>1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд расходится.

*Ответ*: ряд расходится.

**Пример 2.37.** Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n}$ на сходимость.

Признак Коши в этом случае не работает, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = 1$. Здесь применим необходимый признак сходимости рядов. Находим

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n = [1+0]^\infty.$$

Сводим ко второму замечательному пределу

$$\lim_{n\to\infty} U_n^{\cdot} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)+2-2}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+3}\right) = e^{-1} \neq 0.$$

Следовательно, по необходимому признаку ряд расходится.
*Ответ:* ряд расходится.

**Пример 2.38.** Методом математической индукции доказать формулу

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^3,$$

где $n$ — натуральное число.

***Решение***

При $n = 1$ обе части равенства обращаются в единицу и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.

Предположим, что формула верна при $n = k$, т. е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left( \frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства $(k + 1)^3$ и преобразуем правую часть. Тогда получим

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left( \frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2 \left( \frac{k^2}{4} + k + 1 \right) = \left( \frac{k+1}{2} \right)^2 (k^2 + 4k + 4) = \left( \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2.$$

Таким образом, из условия, что формула верна при $n = k$, следует, что она верна и при $n = k + 1$. Это утверждение справедливо при любом натуральном значении $k$. Итак, второе условие