

# $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

## Формулы сложения

## Сегодня на уроке

1. Вспомним формулу, выражающую квадрат расстояния между двумя точками.
2. Вспомним основное тригонометрическое тождество.
3. Вспомним формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов.
4. Познакомимся с формулами сложения.

Верно ли, что  $\cos \frac{\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4}$ ?

А Верно

Б Неверно

Верно ли, что  $\cos \frac{\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4}$ ?

А Верно

Б Неверно

Чему равно значение выражения  $\cos(-\pi) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ?

А 0

В 1

Б -2

Г -1

Чему равно значение выражения  $\cos(-\pi) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ?

А 0

В 1

**Б** -2

Г -1

Чему равно значение выражения  $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$ ?

А 1,5

В  $\sqrt{3}$

Б 2

Г  $-\sqrt{3}$

Чему равно значение выражения  $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$ ?

**A** 1,5

В  $\sqrt{3}$

Б 2

Г  $-\sqrt{3}$



# Вспомним

Квадрат расстояния между точкой  $A(x_1; y_1)$  и точкой  $B(x_2; y_2)$  выражается формулой

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Основное тригонометрическое тождество

Формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

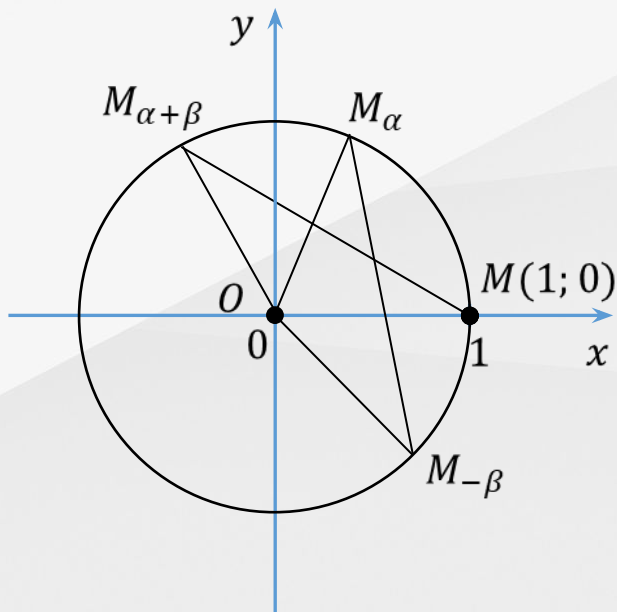
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

# Теорема

Докажем, что для любых углов  $\alpha$  и  $\beta$  справедливо равенство:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (1)$$

**Доказательство:**



$M(1; 0)$ ,  $M_{\alpha}(\cos \alpha; \sin \alpha)$ ,  $M_{-\beta}(\cos(-\beta); \sin(-\beta))$ ,  
 $M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha + \beta); \sin(\alpha + \beta))$ .

$\triangle M O M_{\alpha+\beta}$ ,  $\triangle M_{-\beta} O M_{\alpha}$  – равнобедренные,  
 так как  $OM$ ,  $OM_{\alpha+\beta}$ ,  $OM_{-\beta}$ ,  $OM_{\alpha}$  – радиусы  
 единичной окружности.

$$\angle M O M_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta} O M_{\alpha} = \alpha + \beta$$

Следовательно,  $\triangle M O M_{\alpha+\beta} = \triangle M_{-\beta} O M_{\alpha}$   
 (по первому признаку).

$$M M_{\alpha+\beta} = M_{-\beta} M_{\alpha},$$

$$(M M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta} M_{\alpha})^2.$$

# Теорема

Докажем, что для любых углов  $\alpha$  и  $\beta$  справедливо равенство:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (1)$$

**Доказательство:**

$$(MM_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_{\alpha})^2$$

$$(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha + \beta) - 0)^2 = (\cos \alpha - \cos(-\beta))^2 + (\sin \alpha - \sin(-\beta))^2,$$

$$(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha + \beta) = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2,$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) + 1 + \sin^2(\alpha + \beta) =$$

$$= \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta,$$

$$1 - 2 \cos(\alpha + \beta) + 1 = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta + 1 + 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

$$2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

$$2 \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

**Ч. т. д.**

$$\begin{aligned} ((a-b)^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + b^2 \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$M(1; 0), M_{\alpha}(\cos \alpha; \sin \alpha), M_{-\beta}(\cos(-\beta); \sin(-\beta)), \\ M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha + \beta); \sin(\alpha + \beta)).$$

# Формулы сложения

В формуле  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  (1) заменим  $\beta$  на  $-\beta$ :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha (-\sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha\end{aligned}$$

Мы познакомились с формулами сложения для косинуса.  
А для синуса есть такие формулы?



# Формулы сложения

Докажем формулы:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad (3)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \cos \beta + \sin\frac{\pi}{2} \sin \beta = \\ &= 0 \cdot \cos \beta + 1 \cdot \sin \beta = \sin \beta. \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta \quad (5)$$

Если заменим в формуле (5)  $\beta$  на  $\alpha$ , то получим  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ .

Если в формулу (5) вместо  $\beta$  подставим  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

то получим  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ .

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

# Формулы сложения

$$\sin \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right) =$$

$$= \cos \left( \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right) =$$

$$= \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta + \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (6)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin \alpha \sin \beta \quad (4)$$

# Формулы сложения

Заменим в формуле  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  (6)  $\beta$  на  $-\beta$ :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha (-\sin \beta) =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (7)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

# Формулы сложения

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (6)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (7)$$



# Формулы сложения

Вычислим  $\cos 105^\circ$ ,  $\sin 150^\circ$ .

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 150^\circ &= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \\ &= \sin 180^\circ \cos 30^\circ - \cos 180^\circ \sin 30^\circ = \\ &= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

# Формулы сложения

Докажем равенство:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (8)$$

**Доказательство:**

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} =$$

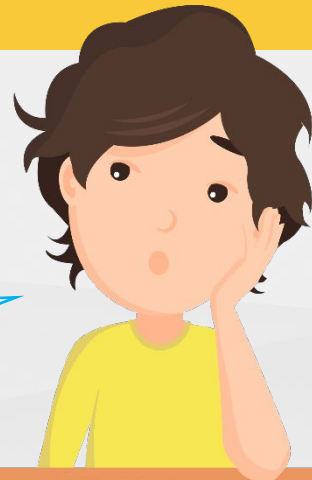
= [Разделим числитель и знаменатель дроби на  $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ ] =

$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cancel{\cos \beta}}{\cos \alpha \cancel{\cos \beta}} + \frac{\cancel{\cos \alpha} \sin \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cos \beta}}{\frac{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta} - \sin \alpha \sin \beta}{\cancel{\cos \alpha} \cancel{\cos \beta}}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (9)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (6)$$

Это формула сложения для тангенса?



# Формулы сложения

Вычислим  $\operatorname{tg} 105^\circ$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 105^\circ &= \operatorname{tg}(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1 - 3} = \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

# Задание № 1

Вычислите:

а)  $\sin 105^\circ$ ; б)  $\cos 15^\circ$ ; в)  $\operatorname{tg} 75^\circ$ .

**Решение:**

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## Задание № 2

Найдите значения выражений:

а)  $\sin 69^\circ \cos 39^\circ - \cos 69^\circ \sin 39^\circ$ ; б)  $\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$ ; в)  $\frac{\operatorname{tg} 71^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ}{1 + \operatorname{tg} 71^\circ \operatorname{tg} 26^\circ}$ .

**Решение:**

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin 69^\circ \cos 39^\circ - \cos 69^\circ \sin 39^\circ &= \\ &= \sin(69^\circ - 39^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} &= \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \frac{\operatorname{tg} 71^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ}{1 + \operatorname{tg} 71^\circ \operatorname{tg} 26^\circ} = \operatorname{tg}(71^\circ - 26^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \end{aligned}$$

(1)

# Итоги урока

## Вспомним

Квадрат расстояния между точкой  $A(x_1; y_1)$  и точкой  $B(x_2; y_2)$  выражается формулой

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Основное тригонометрическое тождество

## Формулы сложения

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (6)$$

## Формулы сложения

Докажем равенство:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (8)$$

Доказательство:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} =$$

= [Разделим числитель и знаменатель дроби на  $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ ] =

$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (9)$$

## Вспомним

### Формулы сложения

Докажем равенство:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (8)$$

Доказательство:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} =$$

= [Разделим числитель и знаменатель дроби на  $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ ] =

$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (9)$$