Формулы сложения

Сегодня на уроке

1. Вспомним формулу, выражающую квадрат расстояния между двумя точками.
2. Вспомним основное тригонометрическое тождество.
3. Вспомним формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов.
4. Познакомимся с формулами сложения.

Верно ли, что $\cos\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$?

А Верно

Б Неверно

Верно ли, что $\cos\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$?

А Верно

Б Неверно

Чему равно значение выражения $\cos(-\pi) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$?

А 0

В 1

Б -2

Г -1

Чему равно значение выражения $\cos(-\pi) + \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$?

А 0

В 1

Б -2

Г -1

Чему равно значение выражения $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$?

А 1,5

В $\sqrt{3}$

Б 2

Г $-\sqrt{3}$

Чему равно значение выражения $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$?

А $1{,}5$

В $\sqrt{3}$

Б 2

Г $-\sqrt{3}$

Вспомним

Квадрат расстояния между точкой $A(x_1; y_1)$ и точкой $B(x_2; y_2)$ выражается формулой

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Основное тригонометрическое тождество

Формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

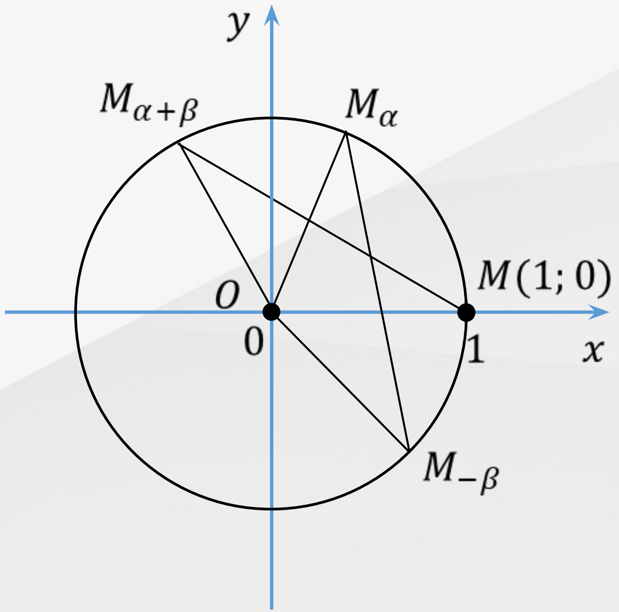
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Теорема

Докажем, что для любых углов α и β справедливо равенство:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Доказательство:



$M(1;0)$, $M_\alpha(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$, $M_{-\beta}(\cos(-\beta)\,;\sin(-\beta))$, $M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta)\,;\sin(\alpha+\beta))$.

$\Delta MOM_{\alpha+\beta}$, $\Delta M_{-\beta}OM_\alpha$ – равнобедренные, так как OM, $OM_{\alpha+\beta}$, $OM_{-\beta}$, OM_α – радиусы единичной окружности.

$\angle MOM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha = \alpha+\beta$

Следовательно, $\Delta MOM_{\alpha+\beta} = \Delta M_{-\beta}OM_\alpha$ (по первому признаку).

$MM_{\alpha+\beta} = M_{-\beta}M_\alpha$,

$(MM_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2$.

Теорема

Докажем, что для любых углов α и β справедливо равенство:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Доказательство:

$M(1;0)$, $M_\alpha(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $M_{-\beta}(\cos(-\beta);\sin(-\beta))$,

$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\sin(\alpha+\beta))$.

$$(MM_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_\alpha)^2$$

$$(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+(\sin(\alpha+\beta)-0)^2=(\cos\alpha-\cos(-\beta))^2+(\sin\alpha-\sin(-\beta))^2,$$

$$(\cos(\alpha+\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha+\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2,$$

$$\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)+1+\sin^2(\alpha+\beta)=$$

$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta,$$

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+1=1-2\cos\alpha\cos\beta+1+2\sin\alpha\sin\beta,$$

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

$$2\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Ч. т. д.

Формулы сложения

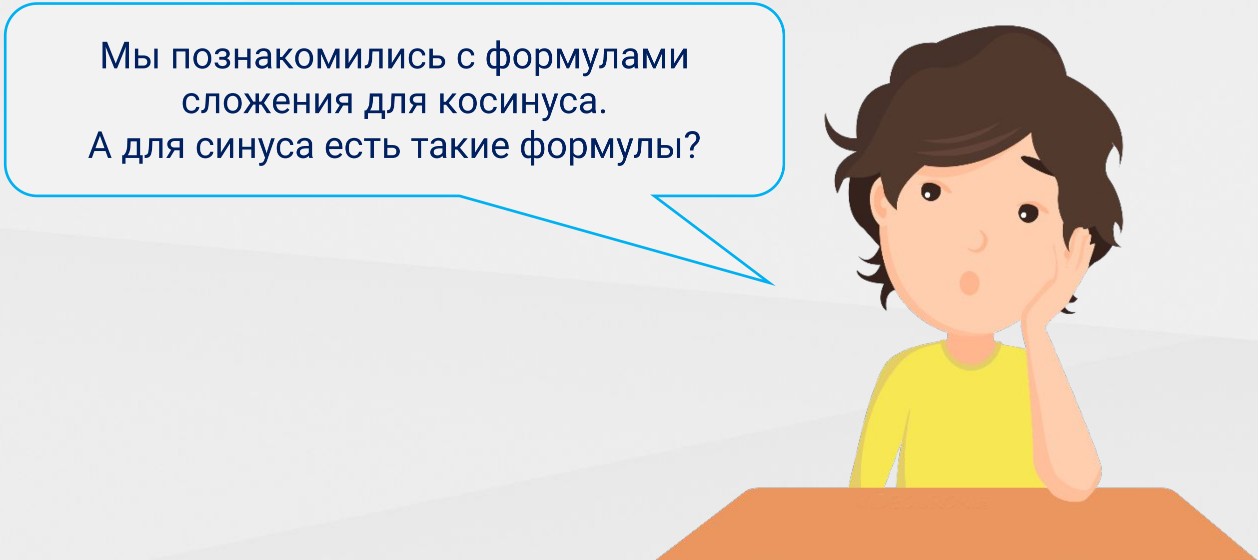
В формуле $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (1) заменим β на $-\beta$:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\,(-\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$



Формулы сложения

Докажем формулы:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha, \quad (3)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \quad (4)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (2)$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\beta=$$

$$=0\cdot\cos\beta+1\cdot\sin\beta=\sin\beta.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta \quad (5)$$

Если заменим в формуле (5) β на α, то получим $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

Если в формулу (5) вместо β подставим $\frac{\pi}{2}-\alpha$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

то получим $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

Формулы сложения

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) =$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (6)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (2)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad (4)$$

Формулы сложения

Заменим в формуле $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ (6) β на $-\beta$:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\sin\beta) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad (7)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (6)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (7)$$

Формулы сложения

Вычислим $\cos 105°$, $\sin 150°$.

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°) =$$
$$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45° =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4};$$

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) =$$
$$= \sin 180° \cos 30° - \cos 180° \sin 30° =$$
$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad (7)$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 180° = 0$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 180° = -1$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

Формулы сложения

Докажем равенство:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (8)$$

Доказательство:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (6)$$

$=$ [Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$] $=$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad (9)$$

Это формула сложения для тангенса?

Формулы сложения

Вычислим $\operatorname{tg} 105°$.

$$\operatorname{tg} 105° = \operatorname{tg}(60° + 45°) = \frac{\operatorname{tg} 60° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 45°} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1 - 3} =$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} 45° = 1$$

$$\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$$

Задание № 1

Вычислите:

а) $\sin 105°$; б) $\cos 15°$; в) $\operatorname{tg} 75°$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 45° = 1$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решение:

а) $\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

б) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

в) $\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \dfrac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{6} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}.$$

Задание № 2

Найдите значения выражений:

а) $\sin 69^\circ \cos 39^\circ - \cos 69^\circ \sin 39^\circ$; б) $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\operatorname{tg} 71^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ}{1 + \operatorname{tg} 71^\circ \operatorname{tg} 26^\circ}$.

Решение:

а) $\sin 69^\circ \cos 39^\circ - \cos 69^\circ \sin 39^\circ =$

$= \sin(69^\circ - 39^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$

б) $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 71^\circ - \operatorname{tg} 26^\circ}{1 + \operatorname{tg} 71^\circ \operatorname{tg} 26^\circ} = \operatorname{tg}(71^\circ - 26^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$

Итоги урока

Вспомним

Квадрат расстояния между точкой $A(x_1; y_1)$ и точкой $B(x_2; y_2)$ выражается формулой $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ Основное тригонометрическое тождество

Формулы сложения

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (1)$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (2)$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (6)$

Вспомним

Формулы сложения

Докажем равенство:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}. \quad (8)$$

Доказательство:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$$

$=$ [Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$] $=$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \frac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \quad (9)$$

Формулы сложения

Докажем равенство:

$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}. \quad (8)$

Доказательство:

$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \quad (9)$