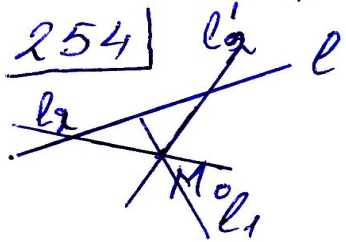
Семинар 5

доцент Волков Н.П.

Занятие 5

Прямая на плоскости.

254



Дано $l: 2x+3y+4=0$

$M_0(2;1)$

Найти l_2: $(\hat{l, l_2})=45°$, $l_2 \ni M_0$

Решение: Построим l_1: $l_1 \perp l$ и $l_1 \ni M_0$

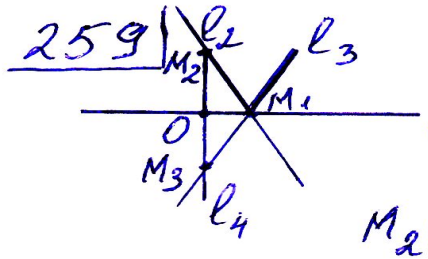
$\vec{\tau_1}=\vec{n}=\{2;3\} \Rightarrow l_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3} \Rightarrow l_1: 3x-2y-4=0$

$\vec{n_1}=\{3;-2\}$. Найдем $\vec{\tau_2}=\vec{n}+\vec{n_1}=\{5;1\}$

$\Rightarrow l_2: \frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{1} \Rightarrow \boxed{l_2: x-5y+3=0}$

$l_2' \perp l_2 \Rightarrow l_2': \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-5} \Rightarrow \boxed{l_2': 5x+y-11=0}$

259



$l_2: x-2y+5=0$ $\quad l_3$ - ?

$l_1: 3x-2y+7=0$

Возьмем точку $M_2 \in l_2$, например, $M_2(-5;0)$ и найдем точку M_3 - симметричную точке M_2 относительно прямой l_1.

Построим l_4: $l_4 \ni M_2$, $l_4 \perp l_1$

$\vec{\tau_4}=\vec{n_1}=\{3;-2\} \Rightarrow l_4: \frac{x+5}{3}=\frac{y}{-2}$

$l_4: 2x+3y+10=0$

$O = \ell_1 \cap \ell_4 \Rightarrow O: \begin{cases} 3x-2y+7=0 \\ 2x+3y+10=0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix} + \Rightarrow 13x = -41$

$\Rightarrow x = -\frac{41}{13}, \; y = -\frac{16}{13} \Rightarrow O\left(-\frac{41}{13}; -\frac{16}{13}\right)$

$\begin{cases} x_3 = 2x_0 - x_2 = -\frac{82}{13} + 5 = -\frac{17}{13} \\ y_3 = 2y_0 - y_2 = -\frac{32}{13} + 0 = -\frac{32}{13} \end{cases} \Rightarrow M_3\left(-\frac{17}{13}; -\frac{32}{13}\right)$

M_1-? $M_1 = \ell_1 \cap \ell_2 \Rightarrow M_1: \begin{cases} 3x-2y+7=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases} - \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1, \; y = 2 \Rightarrow M_1(-1;2)$

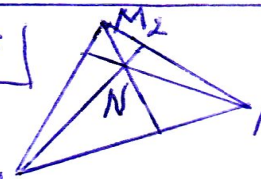
$\vec{\tau}_3 = \overrightarrow{M_1M_3} = \left\{-\frac{4}{13}; -\frac{58}{13}\right\}$

$\Rightarrow \ell_3: \; \ell_3 \ni M_1, \; \ell_3 \ni M_3$

$\ell_3: \frac{x+1}{-\frac{4}{13}} = \frac{y-2}{-\frac{58}{13}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{29}$

$\boxed{\ell_3: \; 29x - 2y + 33 = 0}$

267



Дано: $M_1(-10;2)$, $M_2(6;4)$, $N(5,2)$

M_3 M_1N, M_2N, M_3N – высоты

Найти M_3.

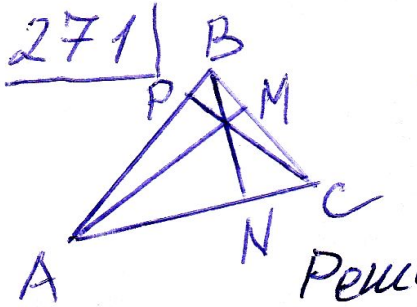
Решение: M_2M_3-? $\vec{n}_1 = \overrightarrow{M_1N} = \{15; 0\}$

$M_2M_3: 15(x-6)+0(y-4)=0 \Rightarrow M_2M_3: \; x-6=0$

M_1M_3-? $\vec{n}_2 = \overrightarrow{NM_2} = \{1; 2\}$ $M_1M_3: (x+10)+2(y-2)=0$

$\Rightarrow M_1M_3: \; x+2y+6=0$

$M_3: \begin{cases} x-6=0 \\ x+2y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=6 \\ y=-6 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{M_3(6;-6)}$

271 | 

Дано: $B(-4;-5)$

$AM: 5x+3y-4=0$, $CP: 3x+8y+13=0$

Найти AB, BC, AC

Решение:

1) $AB-?\ \vec{\tau}_1 = \vec{n}_{CP} = \{3;8\} \Rightarrow AB: \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{8}$

$$\boxed{AB: 8x-3y+17=0}$$

2) $BC-?\ \vec{\tau}_2 = \vec{n}_{AM} = \{5,3\} \Rightarrow BC: \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{3}$

$$\boxed{BC: 3x-5y-13=0}$$

3) $A-?\quad A: \begin{cases} 8x-3y+17=0 \\ 5x+3y-4=0 \end{cases} | + \Rightarrow 13x+13=0$

$x=-1 \Rightarrow -8-3y+17=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow A(-1;3)$

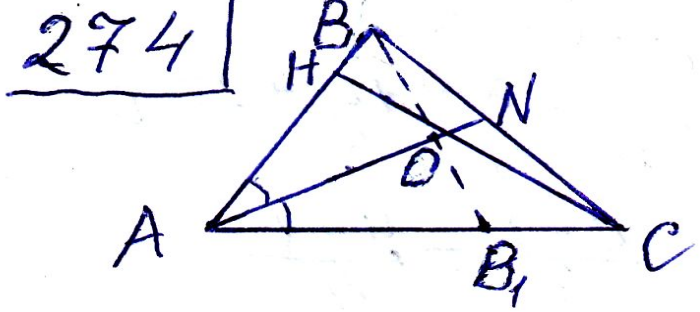
$C-?\ C = CP \cap BC \Rightarrow C: \begin{cases} 3x+8y+13=0 \\ 3x-5y-13=0 \end{cases} | - \Rightarrow$

$13y+26=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow C(1;-2)$

$\vec{\tau}_{AC} = \vec{AC} = \{2;-5\}\quad AC: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-5}$

$\Rightarrow$ $$\boxed{AC: 5x+2y-1=0}$$

274



Дано: $B(2;-1)$

$CH: 3x-4y+27=0$ — высота

$AN: x+2y-5=0$ — биссектриса

Найти: AB, BC, AC.

Решение:

1) $AB-?$ $\vec{\ell}_{AB}=\vec{n}_{CH}=\{3;-4\} \Rightarrow AB: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-4}$

$\boxed{AB: 4x+3y-5=0}$

2) $AC-?$ $A=AN\cap AB \Rightarrow A: \begin{cases} x+2y-5=0 \\ 4x+3y-5=0 \end{cases} \cdot(-4)$

$\Rightarrow -5y+15=0 \Rightarrow y=3,\ x=-1 \Rightarrow A(-1;3)$

B_1 – точка симметричная точке B относит. прямой AN и $B_1 \in AC$, т.к. AN – биссектриса

$\vec{\ell}_{BB_1}=\vec{n}_{AN}=\{1;2\} \Rightarrow BB_1: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}$

$\Rightarrow BB_1: 2x-y-5=0$

$O = AN \cap BB_1$ $\quad O: \begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases} \Big| \cdot 2 \; + \Rightarrow 5x=15$

$x=3, \; y=1 \Rightarrow O(3;1)$

$\begin{cases} x_{B_1} = 2x_O - x_B \\ y_{B_1} = 2y_O - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{B_1}=4 \\ y_{B_1}=3 \end{matrix} \Rightarrow B_1(4;3)$

$\vec{\tau}_{AC} = \vec{AB_1} = \{5;0\} \Rightarrow AC: \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{0}$

$\boxed{AC: \; y-3=0}$

---

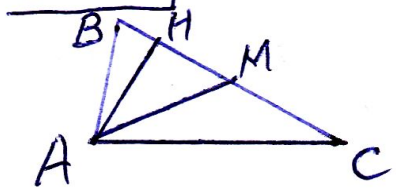
3) $BC - ?$ $\quad C = AC \cap CH \Rightarrow C: \begin{cases} y-3=0 \\ 3x-4y+27=0 \end{cases}$

$y=3, \; x=-5 \Rightarrow C(-5;3)$

$\vec{\tau}_{BC} = \vec{BC} = \{-7;4\}$ $\quad BC: \frac{x-2}{-7} = \frac{y+1}{4}$

$\boxed{BC: \; 4x+7y-1=0}$

275



Дано: $C(4;-1)$

$AH: 2x-3y+12=0$

$AM: 2x+3y=0$

Найти AB, BC, AC.

1) BC-? $\vec{\tau}_{BC}=\vec{n}_{AH}=\{2;-3\} \Rightarrow BC: \frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{-3}$

$\boxed{BC: 3x+2y-10=0}$

2) AC-? $A=AH\cap AM \Rightarrow A: \begin{cases}2x-3y+12=0\\2x+3y=0\end{cases}\Big|+$

$\Rightarrow 4x+12=0 \Rightarrow x=-3 \quad y=2 \Rightarrow A(-3;2)$

$\vec{\tau}_{AC}=\vec{AC}=\{7;-3\} \Rightarrow AC: \frac{x+3}{7}=\frac{y-2}{-3}$

$\boxed{AC: 3x+7y-5=0}$

3) AB-? $M=AM\cap BC \Rightarrow M: \begin{cases}2x+3y=0\\3x+2y-10=0\end{cases}\Big|\begin{matrix}2\\\cdot(-3)\end{matrix}\Rightarrow$

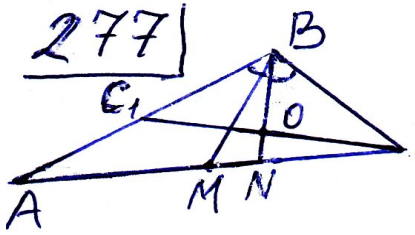
$\Rightarrow -5x+30=0 \Rightarrow x=6,\ y=-4 \Rightarrow M(6;-4)$

$\begin{cases}x_B=2x_M-x_C=8\\y_B=2y_M-y_C=-7\end{cases} \Rightarrow B(8;-7)$

$\vec{\tau}_{AB}=\vec{AB}=\{11;-9\} \quad AB: \frac{x+3}{11}=\frac{y-2}{-9}$

$\boxed{AB: 9x+11y+5=0}$

277



Дано: $C(4;3)$
$BN: x+2y-5=0$ – биссектриса
$BM: 4x+13y-10=0$ – медиана
Найти AB, BC, AC.

Решение:

1) $BC-?$ $B = BM \cap BN$ $B: \begin{cases} x+2y-5=0 \\ 4x+13y-10=0 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \cdot(-4) \\ + \end{matrix}$

$\Rightarrow 5y+10=0 \Rightarrow y=-2,\ x=9 \Rightarrow B(9;-2)$

$\vec{\tau}_{BC} = \vec{BC} = \{-5;\ 5\} \Rightarrow BC: \frac{x-9}{-5} = \frac{y+2}{5}$

$\Rightarrow \boxed{BC: x+y-7=0}$

2) $AB-?$ C_1 – точка симметричная точке C относительно BN

$C_1 \in AB$, т.к. BN – биссектриса.
При этом $CC_1 \perp BN$

$\vec{\tau}_{CC_1} = \vec{n}_{BN} = \{1,2\}$ $CC_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{2}$

$CC_1: 2x-y-5=0$

$O = BN \cap CC_1 \Rightarrow O: \begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases} \Big| \cdot 2^{+} \Rightarrow 5x=15$

$x=3,\ y=1 \Rightarrow O(3;1)$

$\begin{cases} x_{C_1} = 2x_O - x_C = 2 \\ y_{C_1} = 2y_O - y_C = -1 \end{cases} \Rightarrow C_1(2;-1)$

$\vec{\tau}_{AB} = \vec{C_1B} = \{7;-1\} \Rightarrow AB: \frac{x-9}{7} = \frac{y+2}{-1}$

$\Rightarrow \boxed{AB: x+7y+5=0}$

3) AC – ?

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \\ x_A + 7y_A + 5 = 0 \\ 4x_M + 13y_M - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + 7y_A + 5 = 0 \\ 2(x_A + 4) + \frac{13}{2}(y_A + 3) - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + 7y_A + 5 = 0 \\ 4x_A + 13y_A + 35 = 0 \end{cases} \Big| \cdot(-4) \; + \Rightarrow -15y_A + 15 = 0$$

$\Rightarrow y_A = 1$, $x_A = -12 \Rightarrow A(-12; 1)$

$\vec{\tau}_{AC} = \vec{AC} = \{16, 2\} \Rightarrow AC: \frac{x-4}{16} = \frac{y-3}{2}$.

$\boxed{AC: \; x - 8y + 20 = 0}$

298 $l_1: 2x - y + 3 = 0$, $l_2: x + y + 3 = 0$,
$l_3: \alpha x + y - 13 = 0$
При каких α $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = M_0$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ \alpha & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha(-3-3) - 1(6-3) - 13(2+1) = 0$$

$$-6\alpha - 3 - 39 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -7}$$

Дома: К. 270, 272, 276, 278, 280, 285, 301.