Теория информации и кодирования

Раздел 1.
Практическое занятие 2

Определение характеристик случайных процессов

Летучка

Вариант 1.

Перечислить и объяснить суть характеристик случайных событий

Вариант 2.

Перечислить и объяснить суть свойств простейшего потока событий

Содержание занятия

1. Контроль подготовленности студентов к занятию

2. Решение задач по теме занятия

Уровни информации

Прагматический уровень:

$$I = \log_2 P_1 - \log_2 P_0 = \log_2 (P_1 / P_0)$$

P_0 и P_1 — вероятности достижения цели соответственно до и после получения информации;

если $P_0 = P_1$ то $I=0$, т. е. не увеличивается и не уменьшается вероятность достижения цели;

$P_1 > P_0$ то информация уменьшает исходную неопределенность и увеличивает вероятность достижения цели;

$P_1 < P_0$ то информация увеличивает исходную неопределенность и уменьшает вероятность достижения цели;

Семантический уровень — информация по содержанию, отражающему состояние объекта или системы. Полезность не учитывается.

Синтаксический уровень — только вероятностные свойства информации И не учитывают смысловое содержание, полезность и т.д.

Формула полной вероятности

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B|A_i)$$

где -P(B) — вероятность того, что наступило событие B;
$P(A_i)$ — вероятность того, что произошло событие A;
$P(B/A_i)$ — условная вероятность того, что наступило событие B, если Произошло событие A.

Формула Байеса (теорема гипотез)

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\,P(A_j)}$$

Процесс получения информации рассматривается как выбор одного сообщения из конечного наперед заданного множества **N** равновероятных сообщений, а количество информации **I** , которое содержится в выбранном сообщении, определять как логарифм от **N**

$$\mathbf{I = Log\ N} \qquad \textbf{(Хартли)}$$

Выбор основания логарифма принципиального значения не имеет): если используются двоичные логарифмы, то за **единицу количества информации принимается БИТ.**

Для системы, имеющей **N** состояний с разными вероятностями количество информации равно

$$\mathbf{I = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i} \qquad \textbf{(Шеннон)}$$

Требования к мере количества информации

Требования, которым должна удовлетворять мера количества информации, можно сформулировать следующим образом:

1) Количество информации, содержащейся в данном сообщении, должно определяться не его конкретным содержанием, а степенью неопределенности, которая снимается при получении данного сообщения.

2) Количество информации должно равняться нулю, если в системе возможно только одно событие (состояние). Это требование логически вытекает из предыдущего требования.

3) Количество информации, содержащейся в данном сообщении, должно быть пропорционально его длине. То есть, количество информации должно обладать свойством аддитивности. Это значит, что вдвое более длинное сообщение должно содержать вдвое большее количество информации.

Формула определения количества информации, которая передана по каналу связи с помехами

Количество информации, которая передана по каналу связи (полученная адресатом)	=	Априорная неопределенность адресата	—	Апостериорная неопределенность адресата

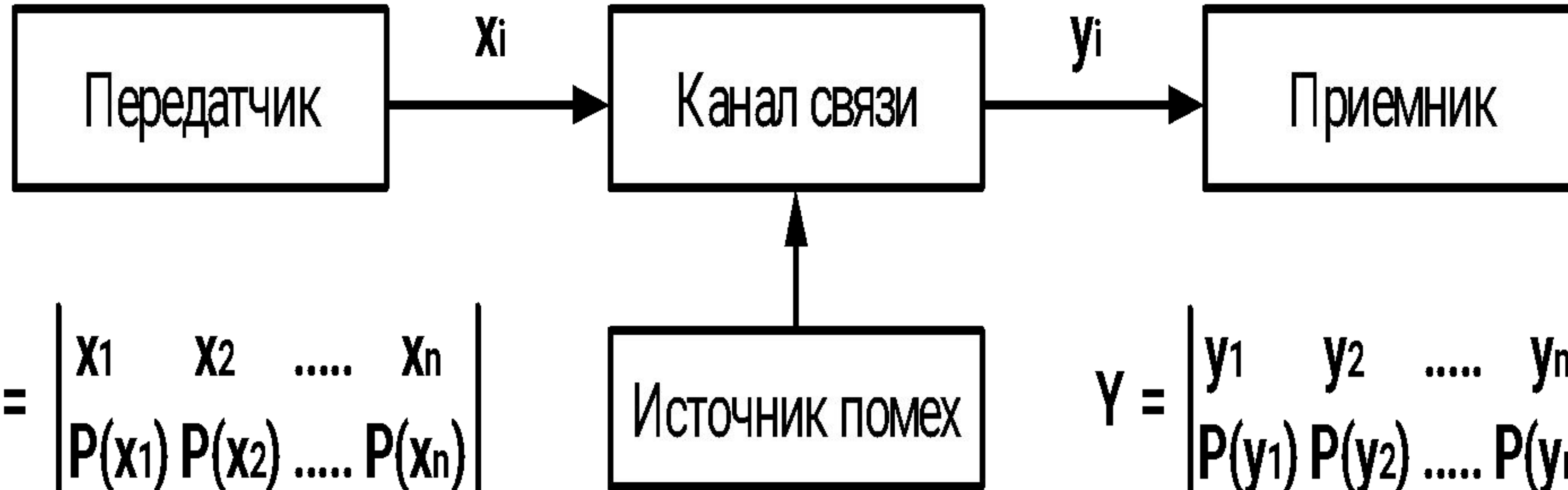
Величина снятой неопределенности должна зависеть от вероятности наступления события (или вероятности принятого сообщения), т.е. чем меньше вероятность наступления данного события, тем большее количество информации содержится в сообщении об этом событии.

Соответственно, сообщение о событии, наступление которого предварительно точно известно, вообще не содержит информации (т.е. его передача не имеет смысла).

Вопрос. В каком сообщении содержится больше информации?:

-о результатах подбрасывания монеты («орел» или «решка») или

-о результатах бросания игральной кости (1,2,3,4,5,6).



$$X = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & \ldots\ldots & P(x_n) \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ P(y_1) & P(y_2) & \ldots\ldots & P(y_n) \end{vmatrix}$$

Структура системы связи

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} P(y_j) = 1$$

Решение задачи № 1

Условие задачи.

На узле коммутации пакетов сообщений три маршрутизатора **(М1, М2, М3)** обрабатывают пакеты сообщений, получаемые циркулярно по трем каналам связи.

Из всего полученного ансамбля сообщений (100%):

-маршрутизатор **М1** получает и обрабатывает **25 %** сообщений;

-маршрутизатор **М2** получает и обрабатывает **35 %** сообщений;

-маршрутизатор **М3** получает и обрабатывает **40 %** сообщений.

Из статистики контроля каналов связи известно, что информация, полученная -маршрутизатором **М1**, содержит **5 %** сообщений с ошибками;

-маршрутизатором **М2** – **4 %** сообщений с ошибками;

-маршрутизатором **М3** – **2 %** сообщений с ошибками.

Требуется:

1) Определить вероятность того, что выбранное из ЗУ узла коммутации сообщение окажется с ошибкой.

2) Определить вероятность того, что выбранное из ЗУ по случайному принципу сообщение окажется полученным маршрутизатором **М1, М2, М3**, (т. е. апостериорную вероятность).

Обсуждение хода решения задачи 1

1) Определение событий, которые возможны в системе?

*В чем состоит суть события **A**?

*В чем состоит суть события **B** ?

*В чем состоит суть события $\mathbf{B_2}$?

*В чем состоит суть события $\mathbf{B_3}$?

2) Определение полной (безусловной) вероятности наступления события **A** (т.е. выбранное сообщение содержит ошибку) - **P(A).**

3) Определение апостериорной вероятности того, что выбранное из ЗУ сообщение окажется полученным маршрутизатором **M1 (M2, M3**).

1) Определение сути возможных в системе событий

*Суть события **A** состоит в том, что выбранное из ЗУ сообщение содержит ошибку;

*Суть события $\mathbf{B_1}$ состоит в том, что сообщение получено маршрутизатором **M1**;

*Суть события $\mathbf{B_2}$ состоит в том, что сообщение получено маршрутизатором **M2**;

*Суть события $\mathbf{B_3}$ состоит в том, что сообщение получено маршрутизатором **M3**;

2) Определение полной (безусловной) вероятности наступления события

Полная (безусловная) вероятность наступления события **A [P(A)]** – это вероятность того, что выбранное сообщение содержит ошибку

$$\mathbf{P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(Bi)\ P(A/Bi),}$$

где **P(A)** – безусловная вероятность выборки из ЗУ сообщения с ошибкой;

P(Bi) – безусловная вероятность выборки из ЗУ сообщения, принятого маршрутизатором Mi :

P(A/Bi) – условная вероятность выборки из ЗУ сообщения с ошибкой, при условии, что оно получено маршрутизатором Mi

$$\mathbf{P(A) = P(B_1)*P(A/B_1) + P(B_2)*P(A/B_2) + P(B_3)*P(A/B_3)}$$

Результат решения 2)

P(B1) = 0,25;
P(B2) = 0,35;
P(B3) = 0,4;

P(A/B1) = 0,05;
P(A/B2) = 0,04;
P(A/B3) = 0,02

P(A) = 0,25*0,05 + 0,35*0,04 + 0,4*0,02 = 0,0345

Вывод: Вероятность того, что из ЗУ будет выбрано сообщение с ошибкой составляет 0,0345 [P(A) = 0,0345]

3) Определение вероятности того, что выбранное из ЗУ ошибочное сообщение получено маршрутизатором М1, (М2, М3).

Определение апостериорной вероятности того, что выбранное из ЗУ ошибочное сообщение получено маршрутизатором М1, (М2, М3) целесообразно вычислить по формуле Байеса,

P(Bi/A) = [P(Bi)*P(A/Bi)] / P(A),

где

P(Bi/A) – условная вероятность того, что сообщение получено маршрутизатором Mi при условии, что в нем есть ошибка;

P(Bi) – безусловная вероятность выборки из ЗУ сообщения, принятого i-м маршрутизатором Mi

P(A/Bi) – условная вероятность выборки из ЗУ сообщения с ошибкой, при условии, что оно получено маршрутизатором М1, (М2, М3).

Результат решения 3)

$P(B_1/A)=[P(B_1)*P(A/B_1)] / P(A)=(0,25*0,05) / 0,0345 = 0,362;$

$P(B_2/A) = [P(B_2)*P(A/B_2)] / P(A) = 0,014 / 0,0345 = 0,406;$

$P(B_3/A) = [P(B_3)*P(A/B_3)] / P(A) = 0,008 / 0,0345 = 0,232$.

Вывод: Условная вероятность того, что выбранное из ЗУ ошибочное сообщение получено маршрутизатором **M_1** равна **0,362 (M_2 – 0,406, M_3 – 0,232).**

Решение задачи № 2

Условие задачи.

В производственном цеху трое рабочих разной квалификации изготавливают параллельно одинаковые детали (узлы).

Известно, что вероятность брака у первого рабочего составляет **09 ($\mathbf{P_1=0,9}$)** (ученик), у второго – 0,5 (**$\mathbf{P_2=0,5}$**) (неквалифицированный рабочий), у третьего – 0,2 (**$\mathbf{P_3=0,2}$**) (квалифицированный рабочий).

Причем, первый изготовил 800 деталей ($n_1 = 800$);
второй изготовил 600 деталей ($n_2 = 600$);
третий изготовил 900 деталей ($n_3 = 900$),

Отдел технического контроля берет случайную деталь из ящика, и она оказывается бракованной.

Требуется:

1) Определить вероятность того, что ее изготовил 3-й рабочий.

2) Определить полную вероятность того, что деталь окажется бракованной.

Обсуждение хода решения задачи 2

1) Определение событий, которые возможны в системе?
*) событие **B** – брак детали,
*) вероятность этого события обозначим как **P(B).**
*) событие $\mathbf{A_i}$ – деталь собрал **i-й** рабочий;
*) условная вероятность того, что деталь бракованная и ее собрал **i-й** рабочий – $\mathbf{P(B/A_i)}$.

2) Определение безусловной вероятности того, что деталь произвел i-й рабочий:

$\mathbf{P(A_1) = n_1 /N;\ \ P(A_2) = n_2 /N;\ \ \ P(A_3) = n_1 /N;}$
где $\mathbf{N = (n_1 + n_2 + n_3).}$

3) Определение полной вероятности события **B** [**P(B)**]

$$\mathbf{P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)*P(B/A_i)}$$

$$\mathbf{P(B) = P(A_1)*P(B/A_1) + P(A_2)*P(B/A_2) + P(A_3)*P(B/A_3)}$$

Результат решения

1) Безусловная вероятность того, что деталь произвел i-й рабочий:

$\mathbf{P(A_1) = n_1 / N = 800/2300 = 8/23;}$

$\mathbf{P(A_2) = n_2 / N = 600/2300 = 6/23;}$

$\mathbf{P(A_3) = n_1 / N = 900/2300 = 9/23;}$

где $\mathbf{N = (n_1 + n_2 + n_3) = 2300.}$

2) Полная вероятность брака детали (события B)

P(B)=0,9*800/2300 + 0,5*600/2300 + 0,2*900/2300 =
=0,313+0,13+0,078 = 0,521

3) Определение вероятности того, что бракованную деталь собрал 3-й рабочий

$\mathbf{P(A_3/B)=[P(A_3)*P(B/A_3)]/P}$
$\mathbf{(B)=[0,2*900/2300]/0,521=0,078/0,521==0,1497\approx 0,15}$

Решение задачи № 3

Условие задачи

Сообщение, передаваемое со спутника на Землю, на **70%** состоит из нулей, т.е. сообщение, содержащее **N** разрядов, включает **70%** нулей и **30%** единиц

$$\mathbf{N_{дв.\ разр.} = 0{,}7*N_{разр\ «1»} + 0{,}3*N_{разр\ «0»}}$$

Известно, что при получении сообщения, состоящего из $\mathbf{N_{дв.\ разр.}}$ → ($\mathbf{N_{получ}}$) вероятность правильного приема составляет **0,8 ($\mathbf{P_{пр}=0{,}8}$),** и вероятность ошибки составляет **0,2 ($\mathbf{P_{ош}=0{,}2}$).**

Требуется

Определить условную вероятность того, что передатчиком отправлен **«0»** при условии, что приемником получена **«1».** Другими словами, определить условную вероятность ошибки.

Обсуждение хода решения задачи

1) Определение всех возможных событий при приеме сообщений:

*) событие $\mathbf{B_0}$ – передатчиком в канал связи передается **«0»**;

*) событие $\mathbf{B_1}$ – передатчиком в канал связи передается **«1»**;

*) событие $\mathbf{A_0}$ – приемником принят из канала связи **«0»**;

*) событие $\mathbf{A_1}$ – приемником принята из канала связи **«1»**;

2) Определение безусловная вероятностей перечисленных событий:

*) $\mathbf{P(B_0)}$ – безусловная вероятность передачи «0», [$\mathbf{P(B_0)}$ = 0,7];

*) $\mathbf{P(B_1)}$ – безусловная вероятность передачи «1»; [$\mathbf{P(B_1)}$ = 0,3]

*) $\mathbf{P(A_0)}$ – безусловная вероятность приема «0»;

*) $\mathbf{P(A_1)}$ – безусловная вероятность приема «1»;

3**) Определение условных вероятностей перечисленных событий**

*) $\mathbf{P(A_0/B_0)}$ – условная вероятность того, что принят **«0»** при условии, что передан **«0»,** т.е. вероятность правильного приема $\mathbf{P_{пр} = P(A_0/B_0) = 0,8}$;

*) $\mathbf{P(A_1/B_0)}$ – условная вероятность того, что принята **«1»** при условии, что передан **«0»**, т.е. вероятность ошибочного приема

$\mathbf{P_{ош} = P(A_1/B_0) = 0,2}$;

*) $\mathbf{P(A_1/B_1)}$ – условная вероятность того, что принята **«1»** при условии, что передана **«1»**, т.е. вероятность правильного приема

$\mathbf{P_{пр} = P(A_1/B_1) = 0,8}$;

*) $\mathbf{P(A_0/B_1)}$ – условная вероятность того, что принят **«0»** при условии, что передана **«1»**, т.е. вероятность неправильного (ошибочного) приема $\mathbf{Рош = P(A_0/B_1) = 0,2}$;

*) $\mathbf{P(B_0/A_1)}$ – условная вероятность того, что передан **«0»** при условии, что принята **«1»**, т.е. вероятность ошибки

*) $\mathbf{P(B_1/A_1)}$ – условная вероятность того, что передана **«1»** при условии, что получена **«1»**, т.е. вероятность правильного приема

3**) Определение условных вероятностей перечисленных событий**

*) $\mathbf{P(A_0/B_0)}$ – условная вероятность того, что принят **«0»** при условии, что передан **«0»,** т.е. вероятность правильного приема $\mathbf{P_{пр} = P(A_0/B_0) = 0{,}8}$;

*) $\mathbf{P(A_1/B_0)}$ – условная вероятность того, что принята **«1»** при условии, что передан **«0»**, т.е. вероятность ошибочного приема

$\mathbf{P_{ош} = P(A_1/B_0) = 0{,}2}$;

*) $\mathbf{P(A_1/B_1)}$ – условная вероятность того, что принята **«1»** при условии, что передана **«1»**, т.е. вероятность правильного приема

$\mathbf{P_{пр} = P(A_1/B_1) = 0{,}8}$;

*) $\mathbf{P(A_0/B_1)}$ – условная вероятность того, что принят **«0»** при условии, что передана **«1»**, т.е. вероятность неправильного (ошибочного) приема $\mathbf{Pош = P(A_0/B_1) = 0{,}2}$;

*) $\mathbf{P(B_0/A_1)}$ – условная вероятность того, что передан **«0»** при условии, что принята **«1»**, т.е. вероятность ошибки

*) $\mathbf{P(B_1/A_1)}$ – условная вероятность того, что передана **«1»** при условии, что получена **«1»**, т.е. вероятность правильного приема

4) Определение вероятности того, что передатчиком передан «0» при условии что получена «1» [$P(B_0/A_1)$]

В соответствии с формулой Байеса

$$P(B_0/A_1) = [P(B_0)*P(A_1/B_0)] \,/\, P(A_1)$$

В соответствии с формулой полной системы событий вероятность приема **«1»** **[P(A1)]**

$$P(A_1) = P(B_1)*P(A_1/B_1) + P(B_0)*P(A_1/B_0)\ ;$$

$$P(A_1) = 0{,}3*0{,}8 + 0{,}7*0{,}2 = 0{,}24 + 0{,}14 = 0{,}38;$$

$$P(B_0/A_1) = 0{,}7*0{,}2/0{,}38 = 0{,}14/0{,}38 = 0{,}37.$$

Вывод: Условная вероятность того, что передатчиком передан **«0»** при условии что получена **«1»** равна **0,37**.

Задание № 1

По каналу, подверженному воздействию помех, передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, при чем априорные вероятности передачи этих команд соответственно равны 0,7 и 0,3. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из символов (1 и 0) уменьшается до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного устройства зарегистрирована комбинация 10110. Какая команда была передана и какова вероятность, что это именно эта команда?

Задание 2

Принимаются 2 (две) группы сообщений, объединенных по определенным признакам. В одной группе ошибки могут быть только обнаружены, а во второй исправлены.

Определить метод классификации, т. е. к какой группе может быть отнесено принятое сообщение?

Задание 3

Источник сообщений генерирует множество кодовых комбинаций, одна из которых имеет априорную вероятность p (x)=1/8, а апостериорные вероятности, соответствующие последовательному приему символов y=1, z=0, u=1, равны

$p(x/y) = p(x/1) = 1/6$

$p(x/yz) = p(x/10) = 1$

$p(x/yzu) = p(x/101) = 1$

Определить увеличение информации о сообщении x в процессе приема символов y, z, u.