

# Теория информации и кодирования

Раздел 1.

Практическое занятие 2

Определение характеристик  
случайных процессов

## **Вариант 1.**

## **Летучка**

Перечислить и объяснить суть характеристик случайных событий

## **Вариант 2.**

Перечислить и объяснить суть свойств простейшего потока событий

# **Содержание занятия**

- 1. Контроль подготовленности студентов к занятию**
- 2. Решение задач по теме занятия**

## Уровни информации

### Прагматический уровень:

$$I = \log_2 P_1 - \log_2 P_0 = \log_2 (P_1 / P_0)$$

$P_0$  и  $P_1$  — вероятности достижения цели соответственно до и после получения информации;

если  $P_0 = P_1$  то  $I=0$ , т. е. не увеличивается и не уменьшается вероятность достижения цели;

$P_1 > P_0$  то информация уменьшает исходную неопределенность и увеличивает вероятность достижения цели;

$P_1 < P_0$  то информация увеличивает исходную неопределенность и уменьшает вероятность достижения цели;

**Семантический уровень** — информация по содержанию, отражающему состояние объекта или системы. Полезность не учитывается.

**Синтаксический уровень** — только вероятностные свойства информации И не учитывают смысловое содержание, полезность и т.д.

## Формула полной вероятности

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)$$

где  $P(B)$  — вероятность того, что наступило событие  $B$ ;  
 $P(A_i)$  — вероятность того, что произошло событие  $A_i$ ;  
 $P(B|A_i)$  — условная вероятность того, что наступило событие  $B$ , если произошло событие  $A_i$ .

## Формула Байеса (теорема гипотез)

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j) P(A_j)}$$

Процесс получения информации рассматривается как выбор одного сообщения из конечного наперед заданного множества  $N$  равновероятных сообщений, а количество информации  $I$ , которое содержится в выбранном сообщении, определять как логарифм от  $N$

$$I = \text{Log } N \quad (\text{Хартли})$$

Выбор основания логарифма принципиального значения не имеет): если используются двоичные логарифмы, то за единицу количества информации принимается БИТ.

Для системы, имеющей  $N$  состояний с разными вероятностями количество информации равно

$$I = - \sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i \quad (\text{Шеннон})$$

## Требования к мере количества информации

Требования, которым должна удовлетворять мера количества информации, можно сформулировать следующим образом:

- 1)** Количество информации, содержащейся в данном сообщении, должно определяться не его конкретным содержанием, а степенью неопределенности, которая снимается при получении данного сообщения.
- 2)** Количество информации должно равняться нулю, если в системе возможно только одно событие (состояние). Это требование логически вытекает из предыдущего требования.
- 3)** Количество информации, содержащейся в данном сообщении, должно быть пропорционально его длине. То есть, количество информации должно обладать свойством аддитивности. Это значит, что вдвое более длинное сообщение должно содержать вдвое большее количество информации.

**Формула определения количества информации,  
которая передана по каналу связи с помехами**

Количество  
информации,  
которая  
передана  
по каналу связи  
(полученная  
адресатом)

—  
—

Априорная  
неопределенность  
адресата

—

Апостериорная  
неопределенность  
адресата

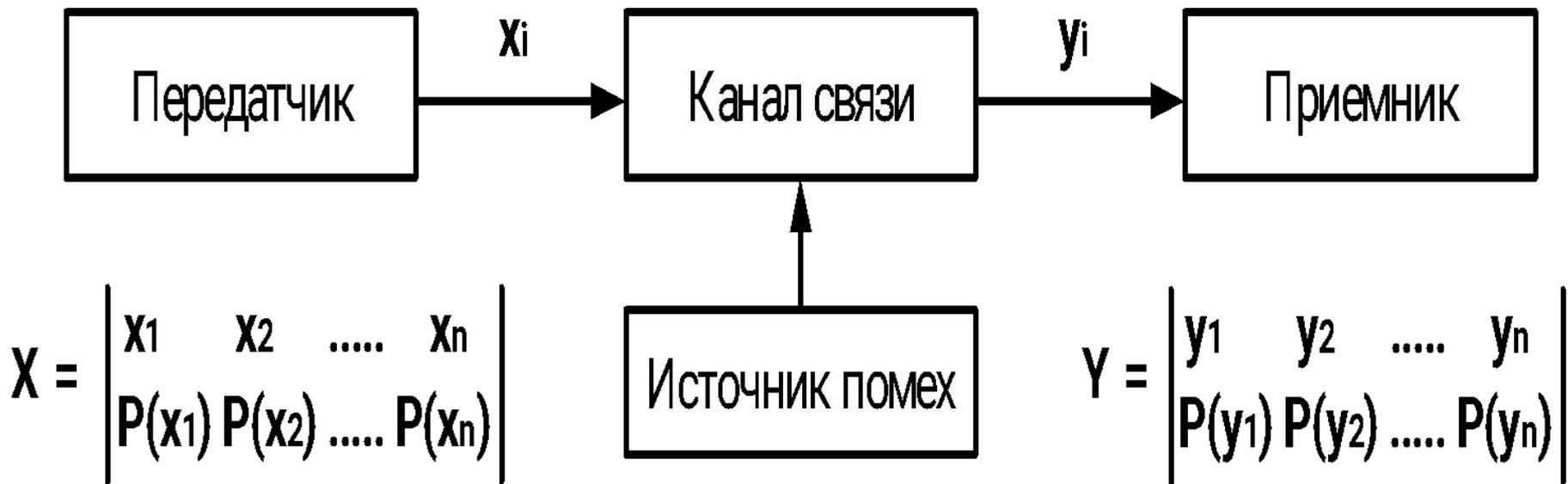
Величина снятой неопределенности должна зависеть от вероятности наступления события (или вероятности принятого сообщения), т.е. чем меньше вероятность наступления данного события, тем большее количество информации содержится в сообщении об этом событии.

Соответственно, сообщение о событии, наступление которого предварительно точно известно, вообще не содержит информации (т.е. его передача не имеет смысла).

**Вопрос.** В каком сообщении содержится больше информации?:

-о результатах подбрасывания монеты («орел» или «решка») или

-о результатах бросания игральной кости (1,2,3,4,5,6).



### Структура системы связи

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

$$\sum_{j=1}^n P(y_j) = 1$$

# Решение задачи № 1

## Условие задачи.

На узле коммутации пакетов сообщений три маршрутизатора (**М1**, **М2**, **М3**) обрабатывают пакеты сообщений, получаемые циркулярно по трем каналам связи.

Из всего полученного ансамбля сообщений (100%):

- маршрутизатор **М1** получает и обрабатывает **25 %** сообщений;
- маршрутизатор **М2** получает и обрабатывает **35 %** сообщений;
- маршрутизатор **М3** получает и обрабатывает **40 %** сообщений.

Из статистики контроля каналов связи известно, что информация, полученная -маршрутизатором **М1**, содержит **5 %** сообщений с ошибками;

- маршрутизатором **М2** – **4 %** сообщений с ошибками;
- маршрутизатором **М3** – **2 %** сообщений с ошибками.

## Требуется:

1) Определить вероятность того, что выбранное из ЗУ узла коммутации сообщение окажется с ошибкой.

2) Определить вероятность того, что выбранное из ЗУ по случайному принципу сообщение окажется полученным маршрутизатором **М1**, **М2**, **М3**, (т. е. апостериорную вероятность).

## Обсуждение хода решения задачи 1

1) Определение событий, которые возможны в системе?

\*В чем состоит суть события **A**?

\*В чем состоит суть события **B** ?

\*В чем состоит суть события **B<sub>2</sub>**?

\*В чем состоит суть события **B<sub>3</sub>** ?

2) Определение полной (безусловной) вероятности наступления события **A** (т.е. выбранное сообщение содержит ошибку) - **P(A)**.

3) Определение апостериорной вероятности того, что выбранное из ЗУ сообщение окажется полученным маршрутизатором **M1** (**M2**, **M3**).

# 1) Определение сути возможных в системе событий

\*Суть события **A** состоит в том, что выбранное из ЗУ сообщение содержит ошибку;

\*Суть события **B<sub>1</sub>** состоит в том, что сообщение получено маршрутизатором **M1**;

\*Суть события **B<sub>2</sub>** состоит в том, что сообщение получено маршрутизатором **M2**;

\*Суть события **B<sub>3</sub>** состоит в том, что сообщение получено маршрутизатором **M3**;

## 2) Определение полной (безусловной) вероятности наступления события

Полная (безусловная) вероятность наступления события  $A$  [ $P(A)$ ] – это вероятность того, что выбранное сообщение содержит ошибку

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) P(A/B_i),$$

где  $P(A)$  – безусловная вероятность выборки из ЗУ сообщения с ошибкой;

$P(B_i)$  – безусловная вероятность выборки из ЗУ сообщения, принятого маршрутизатором  $M_i$  :

$P(A/B_i)$  – условная вероятность выборки из ЗУ сообщения с ошибкой, при условии, что оно получено маршрутизатором  $M_i$

$$P(A) = P(B_1) * P(A/B_1) + P(B_2) * P(A/B_2) + P(B_3) * P(A/B_3)$$

## Результат решения 2)

$$P(B1) = 0,25;$$

$$P(B2) = 0,35;$$

$$P(B3) = 0,4;$$

$$P(A/B1) = 0,05;$$

$$P(A/B2) = 0,04;$$

$$P(A/B3) = 0,02$$

$$P(A) = 0,25*0,05 + 0,35*0,04 + 0,4*0,02 = 0,0345$$

**Вывод:** Вероятность того, что из ЗУ будет выбрано сообщение с ошибкой составляет 0,0345 [P(A) = 0,0345]

### **3) Определение вероятности того, что выбранное из ЗУ ошибочное сообщение получено маршрутизатором М1, (М2, М3).**

Определение апостериорной вероятности того, что выбранное из ЗУ ошибочное сообщение получено маршрутизатором М1, (М2, М3) целесообразно вычислить по формуле Байеса,

$$P(B_i/A) = [P(B_i)*P(A/B_i)] / P(A),$$

где

**$P(B_i/A)$**  – условная вероятность того, что сообщение получено маршрутизатором  $M_i$  при условии, что в нем есть ошибка;

**$P(B_i)$**  – безусловная вероятность выборки из ЗУ сообщения, принятого  $i$ -м маршрутизатором  $M_i$

**$P(A/B_i)$**  – условная вероятность выборки из ЗУ сообщения с ошибкой, при условии, что оно получено маршрутизатором М1, (М2, М3).

## Результат решения 3)

$$P(B_1/A) = [P(B_1) * P(A/B_1)] / P(A) = (0,25 * 0,05) / 0,0345 = 0,362;$$

$$P(B_2/A) = [P(B_2) * P(A/B_2)] / P(A) = 0,014 / 0,0345 = 0,406;$$

$$P(B_3/A) = [P(B_3) * P(A/B_3)] / P(A) = 0,008 / 0,0345 = 0,232 .$$

**Вывод:** Условная вероятность того, что выбранное из ЗУ ошибочное сообщение получено маршрутизатором  $M_1$  равна 0,362 ( $M_2 - 0,406$ ,  $M_3 - 0,232$ ).

## Решение задачи № 2

### Условие задачи.

В производственном цеху трое рабочих разной квалификации изготавливают параллельно одинаковые детали (узлы).

Известно, что вероятность брака у первого рабочего составляет  $0,9$  ( $P_1=0,9$ ) (ученик), у второго –  $0,5$  ( $P_2=0,5$ ) (неквалифицированный рабочий), у третьего –  $0,2$  ( $P_3=0,2$ ) (квалифицированный рабочий).

Причем, первый изготовил  $800$  деталей ( $n_1 = 800$ );

второй изготовил  $600$  деталей ( $n_2 = 600$ );

третий изготовил  $900$  деталей ( $n_3 = 900$ ),

Отдел технического контроля берет случайную деталь из ящика, и она оказывается бракованной.

### Требуется:

- 1) Определить вероятность того, что ее изготовил 3-й рабочий.
- 2) Определить полную вероятность того, что деталь окажется бракованной.

## Обсуждение хода решения задачи 2

1) Определение событий, которые возможны в системе?

\*) событие **B** – брак детали,

\*) вероятность этого события обозначим как **P(B)**.

\*) событие **A<sub>i</sub>** – деталь собрал **i**-й рабочий;

\*) условная вероятность того, что деталь бракованная и ее собрал **i**-й рабочий – **P(B/A<sub>i</sub>)** .

2) Определение безусловной вероятности того, что деталь произвел **i**-й рабочий:

$$P(A_1) = n_1 / N; \quad P(A_2) = n_2 / N; \quad P(A_3) = n_3 / N;$$

$$\text{где } N = (n_1 + n_2 + n_3).$$

3) Определение полной вероятности события **B** [**P(B)**]

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) * P(B/A_i)$$

$$P(B) = P(A_1) * P(B/A_1) + P(A_2) * P(B/A_2) + P(A_3) * P(B/A_3)$$

## Результат решения

1) Безусловная вероятность того, что деталь произвел  $i$ -й рабочий:

$$P(A_1) = n_1 / N = 800/2300 = 8/23;$$

$$P(A_2) = n_2 / N = 600/2300 = 6/23;$$

$$P(A_3) = n_3 / N = 900/2300 = 9/23;$$

$$\text{где } N = (n_1 + n_2 + n_3) = 2300.$$

2) Полная вероятность брака детали (события  $B$ )

$$P(B) = 0,9 * 800/2300 + 0,5 * 600/2300 + 0,2 * 900/2300 = \\ = 0,313 + 0,13 + 0,078 = 0,521$$

3) Определение вероятности того, что бракованную деталь собрал 3-й рабочий

$$P(A_3/B) = [P(A_3) * P(B/A_3)] / P$$

$$(B) = [0,2 * 900/2300] / 0,521 = 0,078 / 0,521 = 0,1497 \approx 0,15$$

# Решение задачи № 3

## Условие задачи

Сообщение, передаваемое со спутника на Землю, на **70%** состоит из нулей, т.е. сообщение, содержащее **N** разрядов, включает **70%** нулей и **30%** единиц

$$N_{\text{дв. разр.}} = 0,7 * N_{\text{разр «1»}} + 0,3 * N_{\text{разр «0»}}$$

Известно, что при получении сообщения, состоящего из  $N_{\text{дв. разр.}} \rightarrow$  ( $N_{\text{получ}}$ ) вероятность правильного приема составляет **0,8** ( $P_{\text{пр}} = 0,8$ ), и вероятность ошибки составляет **0,2** ( $P_{\text{ош}} = 0,2$ ).

## Требуется

Определить условную вероятность того, что передатчиком отправлен «0» при условии, что приемником получена «1». Другими словами, определить условную вероятность ошибки.

## Обсуждение хода решения задачи

1) Определение всех возможных событий при приеме сообщений:

\*) событие  $\mathbf{B}_0$  – передатчиком в канал связи передается «0»;

\*) событие  $\mathbf{B}_1$  – передатчиком в канал связи передается «1»;

\*) событие  $\mathbf{A}_0$  – приемником принят из канала связи «0»;

\*) событие  $\mathbf{A}_1$  – приемником принята из канала связи «1»;

2) Определение безусловная вероятностей перечисленных событий:

\*)  $\mathbf{P}(\mathbf{B}_0)$  – безусловная вероятность передачи «0»,  $[\mathbf{P}(\mathbf{B}_0) = 0,7]$ ;

\*)  $\mathbf{P}(\mathbf{B}_1)$  – безусловная вероятность передачи «1»;  $[\mathbf{P}(\mathbf{B}_1) = 0,3]$

\*)  $\mathbf{P}(\mathbf{A}_0)$  – безусловная вероятность приема «0»;

\*)  $\mathbf{P}(\mathbf{A}_1)$  – безусловная вероятность приема «1»;

### 3) Определение условных вероятностей перечисленных событий

\*)  $P(A_0/B_0)$  – условная вероятность того, что принят «0» при условии, что передан «0», т.е. вероятность правильного приема  
 $P_{\text{пр}} = P(A_0/B_0) = 0,8;$

\*)  $P(A_1/B_0)$  – условная вероятность того, что принята «1» при условии, что передан «0», т.е. вероятность ошибочного приема  
 $P_{\text{ош}} = P(A_1/B_0) = 0,2;$

\*)  $P(A_1/B_1)$  – условная вероятность того, что принята «1» при условии, что передана «1», т.е. вероятность правильного приема  
 $P_{\text{пр}} = P(A_1/B_1) = 0,8;$

\*)  $P(A_0/B_1)$  – условная вероятность того, что принят «0» при условии, что передана «1», т.е. вероятность неправильного (ошибочного) приема  
 $P_{\text{ош}} = P(A_0/B_1) = 0,2;$

\*)  $P(B_0/A_1)$  – условная вероятность того, что передан «0» при условии, что принята «1», т.е. вероятность ошибки

\*)  $P(B_1/A_1)$  – условная вероятность того, что передана «1» при условии, что получена «1», т.е. вероятность правильного приема

### 3) Определение условных вероятностей перечисленных событий

\*)  $P(A_0/B_0)$  – условная вероятность того, что принят «0» при условии, что передан «0», т.е. вероятность правильного приема

$$P_{\text{пр}} = P(A_0/B_0) = 0,8;$$

\*)  $P(A_1/B_0)$  – условная вероятность того, что принята «1» при условии, что передан «0», т.е. вероятность ошибочного приема

$$P_{\text{ош}} = P(A_1/B_0) = 0,2;$$

\*)  $P(A_1/B_1)$  – условная вероятность того, что принята «1» при условии, что передана «1», т.е. вероятность правильного приема

$$P_{\text{пр}} = P(A_1/B_1) = 0,8;$$

\*)  $P(A_0/B_1)$  – условная вероятность того, что принят «0» при условии, что передана «1», т.е. вероятность неправильного

(ошибочного) приема  $P_{\text{ош}} = P(A_0/B_1) = 0,2;$

\*)  $P(B_0/A_1)$  – условная вероятность того, что передан «0» при условии, что принята «1», т.е. вероятность ошибки

\*)  $P(B_1/A_1)$  – условная вероятность того, что передана «1» при условии, что получена «1», т.е. вероятность правильного приема

**4) Определение вероятности того, что передатчиком передан «0» при условии что получена «1» [P(B<sub>0</sub>/A<sub>1</sub>)]**

В соответствии с формулой Байеса

$$P(B_0/A_1) = [P(B_0)*P(A_1/B_0)] / P(A_1)$$

В соответствии с формулой полной системы событий вероятность приема «1» [P(A<sub>1</sub>)]

$$P(A_1) = P(B_1)*P(A_1/B_1) + P(B_0)*P(A_1/B_0) ;$$

$$P(A_1) = 0,3*0,8 + 0,7*0,2 = 0,24 + 0,14 = 0,38;$$

$$P(B_0/A_1) = 0,7*0,2/0,38 = 0,14/0,38 = 0,37.$$

**Вывод:** Условная вероятность того, что передатчиком передан «0» при условии что получена «1» равна **0,37**.

## Задание № 1

По каналу, подверженному воздействию помех, передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, при чем априорные вероятности передачи этих команд соответственно равны 0,7 и 0,3. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из символов (1 и 0) уменьшается до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного устройства зарегистрирована комбинация 10110. Какая команда была передана и какова вероятность, что это именно эта команда?

## Задание 2

Принимаются 2 (две) группы сообщений, объединенных по определенным признакам. В одной группе ошибки могут быть только обнаружены, а во второй исправлены.

Определить метод классификации, т. е. к какой группе может быть отнесено принятое сообщение?

### Задание 3

Источник сообщений генерирует множество кодовых комбинаций, одна из которых имеет априорную вероятность  $p(x) = 1/8$ , а апостериорные вероятности, соответствующие последовательному приему символов  $y=1$ ,  $z=0$ ,  $u=1$ , равны

$$p(x/y) = p(x/1) = 1/6$$

$$p(x/yz) = p(x/10) = 1$$

$$p(x/yzu) = p(x/101) = 1$$

Определить увеличение информации о сообщении  $x$  в процессе приема символов  $y$ ,  $z$ ,  $u$ .