Дифференциальные и разностные уравнения

Практическое занятие 13

кафедра
«Информатика и информационная безопасность»

Решение линейных неоднородных разностных уравнений первого порядка

Пример 1: Решить уравнение $(s+2)u(s+1)-(s+1)u(s)=s$.

Решение. Приведем уравнение к виду (11)

$$u(s+1)=\frac{(s+1)}{(s+2)}u(s)+\frac{s}{(s+2)},$$ здесь

$$1-P(s)=\frac{(s+1)}{(s+2)}, \qquad Q(s)=\frac{s}{(s+2)}.$$

По формуле (13) выписываем решение разностного уравнения

$$u(s)=\prod_{t=0}^{s-1}\frac{p+1}{p+2}\left[\sum_{p=0}^{s-1}\frac{p}{(p+2)\prod_{t=0}^{p}\frac{t+1}{t+2}}+C\right].$$

Рассмотрим

$$\prod_{t=0}^{s-1}\frac{p+1}{p+2}=\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot s}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot s\cdot(s+1)}=\frac{1}{s+1},\ \text{тогда}$$

$$u(s)=\frac{1}{s+1}\left[\sum_{p=0}^{s-1}\frac{p}{(p+2)\dfrac{1}{p+2}}+C\right]=\frac{1}{s+1}\left[\sum_{p=0}^{s-1}p+C\right].$$

Известно (школьная программа), что $\sum_{p=0}^{s-1}p=\frac{s(s-1)}{2}$.

Тогда решение разностного уравнения примет следующий вид

$$u(s)=\frac{1}{s+1}\left[\frac{s(s-1)}{2}+C\right].$$

Пример 2: Решить уравнение $u(s+1)+3^{\frac{s}{2}}u(s)=3^{s+1}$.

Решение. Приведем уравнение к виду (11)

$u(s+1)=-3^{\frac{s}{2}}u(s)+3^{s+1}$, здесь

$1-P(s)=-3^{\frac{s}{2}}, \qquad Q(s)=3^{s+1}$

По формуле (13) выписываем решение разностного уравнения

$$u(s)=\prod_{t=0}^{s-1}\left(-3^{\frac{s}{2}}\right)\left[\sum_{p=0}^{s-1}\frac{3^{p+1}}{\prod_{t=0}^{p}\left(-3^{\frac{p}{2}}\right)}+C\right].$$

Отдельно вычислим

$\prod_{t=0}^{s-1}\left(-3^{\frac{s}{2}}\right)=(-1)^s\,3^{0+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{s-1}{2}}=(-1)^s\,3^{\frac{1}{2}(1+\ldots+(s-1))}=(-1)^s\,3^{\frac{s(s-1)}{2}}$. Подставляя в решение, получим

$$u(s)=(-1)^s 3^{\frac{s(s-1)}{2}}\left[\sum_{p=0}^{s-1}\frac{3^{p+1}}{(-1)^{p+1}3^{\frac{p(p+1)}{2}}}+C\right]=$$

$$=(-1)^s 3^{\frac{s(s-1)}{2}}\left[\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{p+1}3^{p+1-\frac{p(p+1)}{2}}+C\right]=$$

$$=(-1)^s 3^{\frac{s(s-1)}{2}}\left[\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{p+1}3^{-\frac{(p-2)(p+1)}{2}}+C\right]$$

Ответ: $u(s)=(-1)^s 3^{\frac{s(s-1)}{2}}\left[\sum_{p=0}^{s-1}(-1)^{p+1}3^{-\frac{(p-2)(p+1)}{2}}+C\right].$