

Дифференциальные и разностные уравнения

Практическое занятие 13

кафедра
«Информатика и информационная безопасность»

Решение линейных неоднородных разностных уравнений первого порядка

Пример 1: Решить уравнение $(s + 2)u(s + 1) - (s + 1)u(s) = s$.

Решение. Приведем уравнение к виду (11)

$$u(s + 1) = \frac{(s + 1)}{(s + 2)} u(s) + \frac{s}{(s + 2)}, \text{ здесь}$$

$$1 - P(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 2)}, \quad Q(s) = \frac{s}{(s + 2)}.$$

По формуле (13) выписываем решение разностного уравнения

$$u(s) = \prod_{t=0}^{s-1} \frac{p+1}{p+2} \left[\sum_{p=0}^{s-1} \frac{p}{(p+2) \prod_{t=0}^p \frac{t+1}{t+2}} + C \right].$$

Рассмотрим

$$\prod_{i=0}^{s-1} \frac{p+1}{p+2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot s}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot s \cdot (s+1)} = \frac{1}{s+1}, \text{ тогда}$$

$$u(s) = \frac{1}{s+1} \left[\sum_{p=0}^{s-1} \frac{p}{(p+2) \frac{1}{p+2}} + C \right] = \frac{1}{s+1} \left[\sum_{p=0}^{s-1} p + C \right].$$

Известно (школьная программа), что $\sum_{p=0}^{s-1} p = \frac{s(s-1)}{2}$.

Тогда решение разностного уравнения примет следующий вид

$$u(s) = \frac{1}{s+1} \left[\frac{s(s-1)}{2} + C \right].$$

Пример 2: Решить уравнение $u(s+1) + 3^{\frac{s}{2}} u(s) = 3^{s+1}$.

Решение. Приведем уравнение к виду (11)

$$u(s+1) = -3^{\frac{s}{2}} u(s) + 3^{s+1}, \text{ здесь}$$

$$1 - P(s) = -3^{\frac{s}{2}}, \quad Q(s) = 3^{s+1}$$

По формуле (13) выписываем решение разностного уравнения

$$u(s) = \prod_{t=0}^{s-1} \left(-3^{\frac{t}{2}} \right) \left[\sum_{p=0}^{s-1} \frac{3^{p+1}}{\prod_{t=0}^p \left(-3^{\frac{t}{2}} \right)} + C \right].$$

Отдельно вычислим

$$\prod_{t=0}^{s-1} \left(-3^{\frac{t}{2}} \right) = (-1)^s 3^{0 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{s-1}{2}} = (-1)^s 3^{\frac{1}{2}(1 + \dots + (s-1))} = (-1)^s 3^{\frac{s(s-1)}{2}}. \text{ Подставляя в}$$

решение, получим

$$\begin{aligned}
u(s) &= (-1)^s 3^{\frac{s(s-1)}{2}} \left[\sum_{p=0}^{s-1} \frac{3^{p+1}}{(-1)^{p+1} 3^{\frac{p(p+1)}{2}}} + C \right] = \\
&= (-1)^s 3^{\frac{s(s-1)}{2}} \left[\sum_{p=0}^{s-1} (-1)^{p+1} 3^{p+1-\frac{p(p+1)}{2}} + C \right] = \\
&= (-1)^s 3^{\frac{s(s-1)}{2}} \left[\sum_{p=0}^{s-1} (-1)^{p+1} 3^{-\frac{(p-2)(p+1)}{2}} + C \right] \\
\text{Ответ: } u(s) &= (-1)^s 3^{\frac{s(s-1)}{2}} \left[\sum_{p=0}^{s-1} (-1)^{p+1} 3^{-\frac{(p-2)(p+1)}{2}} + C \right].
\end{aligned}$$