Сочетания и размещения

Классическое определение вероятности

Вероятностью события А при проведении некоторого испытания называют
отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Алгоритм нахождения вероятности случайного события:

1. число N всех возможных исходов данного события;
2. количество $N(A)$ тех исходов, в которых наступает событие А;
3. частное $\frac{N(A)}{N}$ – вероятность события A ($P(A)$).

Правило умножения

Для того чтобы найти число всех равновозможных исходов независимого проведения двух испытаний А и Б, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания Б.

Определение 1: «факториал»

$$\boxed{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot (n-1) \cdot n = n!}$$

«n факториал»

Теорема 1 (о перестановках):

n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно $n!$ способами.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Сколькими способами 4 скворца могут разместиться в скворечнике?

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Сколькими способами 4 скворца могут разместиться в скворечнике, если один из них прилетел раньше и уже занял себе домик?

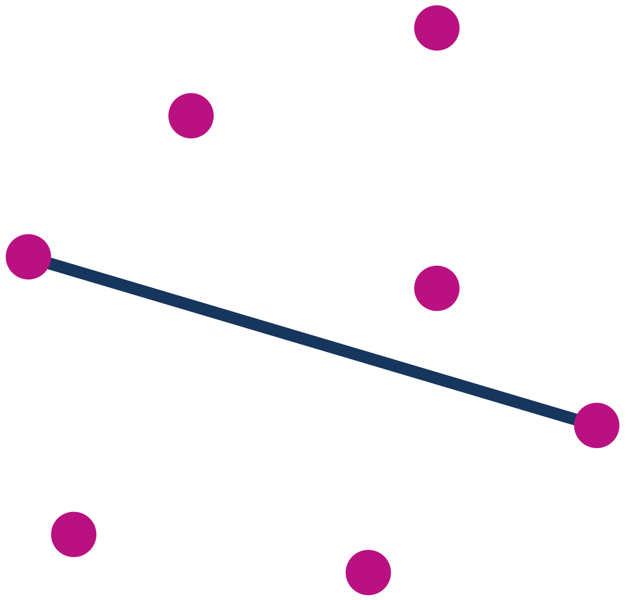
$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Пример:

Каждые два из семи городов соединены мостами. Определить количество мостов.

Решение:

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$



Ответ: 21 мост.

Теорема 2:

Если множество состоит из n элементов
и требуется выбрать 2 элемента без учёта их порядка,
то такой выбор можно получить $\frac{n(n-1)}{2}$ способами.

$$\boxed{C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}}$$

Определение 2:

Число всех выборов 2 элементов <u>без учета их порядка</u>
из n данных элементов называют числом сочетаний
из n элементов по 2 и обозначают C_n^2.

Пример:

В классе 14 девочек и 10 мальчиков.
Сколькими способами можно выбрать для дежурства:
а) двух учеников; б) двух девочек; в) двух мальчиков?

Решение:

а) $C_{24}^2 = \frac{24 \cdot 23}{2} = 276$

$$\boxed{C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}}$$

б) $C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$

в) $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

Ответ: а) 276, б) 91, в) 45.

В соревнованиях принимало участие 5 команд. Сколько возможно вариантов распределения первых двух призовых мест среди этих команд?

$$5 \cdot 4 = 20$$

Теорема 3:

Если множество состоит из n элементов
и требуется выбрать 2 элемента, учитывая их порядок,
то такой выбор можно получить $\boldsymbol{n \cdot (n-1)}$ способами.

$$\boxed{A_n^2 = n(n-1)}$$

Определение 3:

Число всех выборов 2 элементов <u>с учетом их порядка</u>
из n данных элементов называют числом размещений
из n элементов по 2 и обозначают A_n^2.

Пример:

В пятизначном числе известны первые три цифры. Сколькими способами его можно продолжить, используя цифры от 1 до 9 и 0, не повторяя их.

Решение:

$$a\ b\ c\ \underbrace{*\ \ *}_{A_{10}^2}$$

$$\boxed{A_n^2 = n(n-1)}$$

$A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$

Ответ: 90.

Определение 4: Число всех выборов	Число всех выборов
k элементов из n данных без учёта порядка называют числом сочетаний из n элементов по k.	k элементов из n данных с учётом их порядка называют числом размещений из n элементов по k.

Теорема 4:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Пример:

Решить уравнение $C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$.

Решение:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$$

$$\frac{x!}{4!\,(x-4)!} = \frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{3!\,(x-3)!} \qquad |:x!$$

$$\frac{1}{4!\,(x-4)!} = \frac{1}{(x-3)!} + \frac{1}{3!\,(x-3)!} \qquad |\cdot(x-3)!$$

$$\frac{x-3}{4!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3!} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{24} = 1 + \frac{1}{6}$$

$$\frac{x-3}{24} = \frac{7}{6}$$

$$x - 3 = \frac{24 \cdot 7}{6} \quad 28$$

$$x = 31$$

Ответ: 31.

Пример:

Номера машин состоят из 3 различных букв русского алфавита (всего их 33) и 4 различных цифр.
Сколько различных номеров можно составить?

Решение:

$$\underbrace{*\ *\ *}_{A_{33}^{3}}\ \underbrace{*\ *\ *\ *}_{A_{10}^{4}}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{33}^{3} = \frac{33!}{(33-3)!} = \frac{33!}{30!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30} = 31 \cdot 32 \cdot 33 = 32736$$

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$$

$$32736 \cdot 5040 = 164989440$$

Ответ: 164989440.

Пример:

Сколькими способами из 15 фломастеров и 11 карандашей можно выбрать по 5 карандашей и фломастеров?

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Решение:

<u>выбор фломастеров</u>

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!\,(15-5)!} = \frac{15!}{5!\cdot 10!} = \frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 3003$$

<u>выбор карандашей</u>

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5!\,(11-5)!} = \frac{11!}{5!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 462$$

$3003\cdot 462 = 1387386$

Ответ: 1387386.

Треугольник Паскаля

$$C_1^0 \quad C_1^1$$
$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$
$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$
$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$
$$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$
$$\ldots$$

$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$\ldots$$

Каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Число всех выборов

k элементов из n данных

без учёта порядка называют

числом **сочетаний** из n элементов по k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Число всех выборов

k элементов из n данных

с учётом их порядка называют

числом **размещений** из n элементов по k.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$