

Сочетания и размещения

Классическое определение вероятности

Вероятность события A при проведении некоторого испытания называют отношением числа тех исходов, в результате которых наступает событие A , к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Алгоритм нахождения вероятности случайного события:

1. число N всех возможных исходов данного события;
2. количество $N(A)$ тех исходов, в которых наступает событие A ;
3. частное $\frac{N(A)}{N}$ — вероятность события A ($P(A)$).

Правило умножения

Для того чтобы найти число всех равновозможных исходов независимого проведения двух испытаний А и Б, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания Б.

Определение 1:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n = n!$$

»

« n факториал»

Теорема 1 (о перестановках):

n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно $n!$ способами.

$$P_n = n!$$



Сколькими способами 4 скворца
могут разместиться в скворечнике?

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Сколькими способами 4 скворца
могут разместиться в скворечнике,
если один из них прилетел раньше
и уже занял себе домик?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

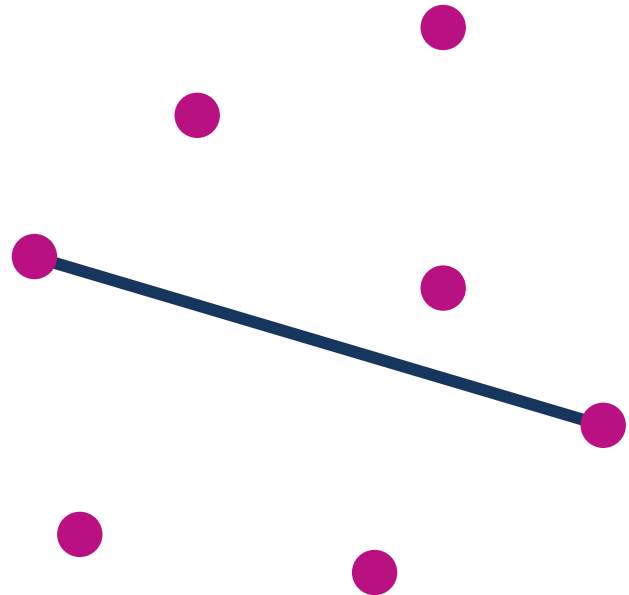
Пример:

Каждые два из семи городов соединены мостами.
Определить количество мостов.

Решение:

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Ответ: 21 мост.



Теорема 2:

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать 2 элемента без учёта их порядка, то такой выбор можно получить $\frac{n(n-1)}{2}$ способами.

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Определение 2:

Число всех выборов 2 элементов без учета их порядка из n данных элементов называют **числом сочетаний** из n элементов по 2 и обозначают C_n^2 .

Пример:

В классе 14 девочек и 10 мальчиков.

Сколькими способами можно выбрать для дежурства:

а) двух учеников;

б) двух девочек;

в) двух мальчиков?

Решение:

$$\text{а) } C_{24}^2 = \frac{24 \cdot 23}{2} = 276$$

$$\text{б) } C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$$

$$\text{в) } C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ответ: а) 276, б) 91, в) 45.

В соревнованиях принимало участие 5 команд.
Сколько возможно вариантов распределения
первых двух призовых мест среди этих команд?

$$5 \cdot 4 = 20$$

Теорема 3:

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать 2 элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно получить $n \cdot (n - 1)$ способами.

$$A_n^2 = n(n - 1)$$

Определение 3:

Число всех выборов 2 элементов с учетом их порядка из n данных элементов называют **числом размещений** из n элементов по 2 и обозначают A_n^2 .

Пример:

В пятизначном числе известны первые три цифры. Сколькими способами его можно продолжить, используя цифры от 1 до 9 и 0, не повторяя их.

Решение:

$$a \ b \ c \ \underbrace{* \ *}_{A_{10}^2}$$

$$A_n^2 = n(n - 1)$$

$$A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$$

Ответ: 90.

Определение 4:

Число всех выборов

k элементов из n данных
без учёта порядка называют
числом **сочетаний** из n элементов по k .

Число всех выборов

k элементов из n данных
с учётом их порядка называют
числом **размещений** из n элементов по k .

Теорема 4:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Пример:

Решить уравнение $C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$.

Решение:

$$C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$$

$$\frac{x!}{4!(x-4)!} = \frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{3!(x-3)!} \quad | : x!$$

$$\frac{1}{4!(x-4)!} = \frac{1}{(x-3)!} + \frac{1}{3!(x-3)!} \quad | \cdot (x-3)!$$

$$\frac{x-3}{4!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3!} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{24} = 1 + \frac{1}{6}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\frac{x-3}{24} = \frac{7}{6}$$

$$x-3 = \frac{24 \cdot 7}{6}$$

$$x = 31$$

Ответ: 31.

Пример:

Номера машин состоят из 3 различных букв русского алфавита (всего их 33) и 4 различных цифр.

Сколько различных номеров можно составить?

Решение:

$$\underbrace{* * *}_{A_{33}^3} \underbrace{* * * *}_{A_{10}^4}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{33}^3 = \frac{33!}{(33-3)!} = \frac{33!}{30!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30} = 31 \cdot 32 \cdot 33 = 32736$$

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$$

$$32736 \cdot 5040 = 164989440$$

Ответ: 164989440.

Пример:

Сколькими способами из 15 фломастеров и 11 карандашей можно выбрать по 5 карандашей и фломастеров?

Решение:

выбор фломастеров

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$$

выбор карандашей

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$$

$$3003 \cdot 462 = 1387386$$

Ответ: 1387386.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Треугольник Паскаля

	C_1^0	C_1^1					1	1				
	C_2^0	C_2^1	C_2^2				1	2	1			
	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			1	3	3	1		
	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		1	4	6	4	1	
C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5		1	5	10	10	5	1
		...										

Каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Число всех выборов
 k элементов из n данных
без учёта порядка называют
числом **сочетаний** из n элементов по k .

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Число всех выборов
 k элементов из n данных
с учётом их порядка называют
числом **размещений** из n элементов по k .

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$