

# Сочетания и размещения

## Классическое определение вероятности

**Вероятность** события  $A$  при проведении некоторого испытания называют отношением числа тех исходов, в результате которых наступает событие  $A$ , к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

### **Алгоритм нахождения вероятности случайного события:**

1. число  $N$  всех возможных исходов данного события;
2. количество  $N(A)$  тех исходов, в которых наступает событие  $A$ ;
3. частное  $\frac{N(A)}{N}$  — вероятность события  $A$  ( $P(A)$ ).

## *Правило умножения*

Для того чтобы найти число всех равновозможных исходов независимого проведения двух испытаний А и Б, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания Б.

**Определение 1:**

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n = n!$$

»

« $n$  факториал»

## Теорема 1 (о перестановках):

$n$  различных элементов можно расставить по одному на  $n$  различных мест ровно  $n!$  способами.

$$P_n = n!$$



Сколькими способами 4 скворца  
могут разместиться в скворечнике?

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Сколькими способами 4 скворца  
могут разместиться в скворечнике,  
если один из них прилетел раньше  
и уже занял себе домик?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

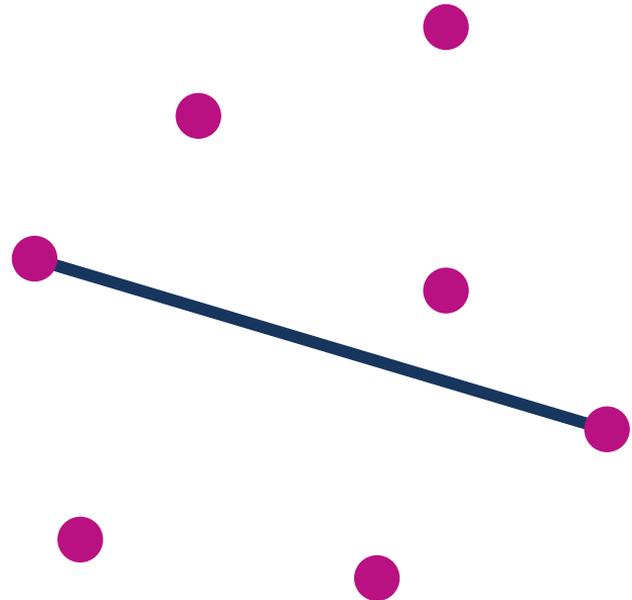
# Пример:

Каждые два из семи городов соединены мостами.  
Определить количество мостов.

Решение:

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Ответ: 21 мост.



## Теорема 2:

Если множество состоит из  $n$  элементов и требуется выбрать 2 элемента без учёта их порядка, то такой выбор можно получить  $\frac{n(n-1)}{2}$  способами.

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

## Определение 2:

Число всех выборов 2 элементов без учета их порядка из  $n$  данных элементов называют **числом сочетаний** из  $n$  элементов по 2 и обозначают  $C_n^2$ .

# Пример:

В классе 14 девочек и 10 мальчиков.

Сколькими способами можно выбрать для дежурства:

- а) двух учеников;                      б) двух девочек;                      в) двух мальчиков?

Решение:

$$\text{а) } C_{24}^2 = \frac{24 \cdot 23}{2} = 276$$

$$\text{б) } C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$$

$$\text{в) } C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ответ: а) 276, б) 91, в) 45.

В соревнованиях принимало участие 5 команд.  
Сколько возможно вариантов распределения  
первых двух призовых мест среди этих команд?

$$5 \cdot 4 = 20$$

### Теорема 3:

Если множество состоит из  $n$  элементов и требуется выбрать 2 элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно получить  $n \cdot (n - 1)$  способами.

$$A_n^2 = n(n - 1)$$

### Определение 3:

Число всех выборов 2 элементов с учетом их порядка из  $n$  данных элементов называют **числом размещений** из  $n$  элементов по 2 и обозначают  $A_n^2$ .

# Пример:

В пятизначном числе известны первые три цифры. Сколькими способами его можно продолжить, используя цифры от 1 до 9 и 0, не повторяя их.

Решение:

$$a \ b \ c \ \underbrace{* \ *}_{A_{10}^2}$$

$$A_n^2 = n(n - 1)$$

$$A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$$

Ответ: 90.

#### Определение 4:

Число всех выборов

$k$  элементов из  $n$  данных  
без учёта порядка называют  
числом **сочетаний** из  $n$  элементов по  $k$ .

Число всех выборов

$k$  элементов из  $n$  данных  
с учётом их порядка называют  
числом **размещений** из  $n$  элементов по  $k$ .

#### Теорема 4:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

# Пример:

Решить уравнение  $C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$ .

Решение:

$$C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$$

$$\frac{x!}{4!(x-4)!} = \frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{3!(x-3)!} \quad | : x!$$

$$\frac{1}{4!(x-4)!} = \frac{1}{(x-3)!} + \frac{1}{3!(x-3)!} \quad | \cdot (x-3)!$$

$$\frac{x-3}{4!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3!} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{24} = 1 + \frac{1}{6}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\frac{x-3}{24} = \frac{7}{6}$$

$$x-3 = \frac{24 \cdot 7}{6}$$

$$x = 31$$

Ответ: 31.

# Пример:

Номера машин состоят из 3 различных букв русского алфавита (всего их 33) и 4 различных цифр.

Сколько различных номеров можно составить?

Решение:

$$\underbrace{* * *}_{A_{33}^3} \underbrace{* * * *}_{A_{10}^4}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{33}^3 = \frac{33!}{(33-3)!} = \frac{33!}{30!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30} = 31 \cdot 32 \cdot 33 = 32736$$

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$$

$$32736 \cdot 5040 = 164989440$$

Ответ: 164989440.

# Пример:

Сколькими способами из 15 фломастеров и 11 карандашей можно выбрать по 5 карандашей и фломастеров?

Решение:

выбор фломастеров

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$$

выбор карандашей

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$$

$$3003 \cdot 462 = 1387386$$

Ответ: 1387386.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Число всех выборов  
 $k$  элементов из  $n$  данных  
без учёта порядка называют  
числом **сочетаний** из  $n$  элементов по  $k$ .

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Число всех выборов  
 $k$  элементов из  $n$  данных  
с учётом их порядка называют  
числом **размещений** из  $n$  элементов по  $k$ .

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$