Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически с помощью уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $t \in [\alpha, \beta]$ – параметр, функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в каждой точке отрезка $[\alpha, \beta]$, причем $x'(t) \neq 0 \; \forall \, t \in [\alpha, \beta]$,

тогда функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[x(\alpha), x(\beta)]$ и значение производной в точке $x_0 = x(t_0)$, $t_0 \in [\alpha, \beta]$ вычисляется по формуле:

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

Производная функции, заданной неявно

Пусть дифференцируемая функция $y = y(x)$ задано неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

Чтобы найти производную $y'_x = \frac{dy}{dx}$, продифференцируем по переменной x уравнение $F(x, y) = 0$, при этом помним, что $y = y(x)$ – функция независимой переменной x:

$$(F(x, y))' = 0,$$

и разрешаем полученное уравнение относительно y'.

Примеры вычисления производных

Пример 1. Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Найдем производную $\frac{dy}{dx} = y'_x$ по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Так как

$$x'_t = (a\cos t)' = -a\sin t, \quad y'_t = (b\sin t)' = b\cos t,$$

получим

$$y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Пример 2. Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если

$$\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = t^2 + 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Найдем производную $\frac{dy}{dx} = y'_x$ по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Так как

$$x'_t = (t^3 + t)' = 3t^2 + 1, \quad y'_t = (t^2 + 5)' = 2t,$$

получим

$$y'_x = \frac{2t}{3t^2+1}.$$

Пример 3. Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если функция $y(x)$ задана уравнением:

$$x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Продифференцируем уравнение по переменной x:

$$(x^2 + 3xy + y^2 + 1)' = 0;$$

$(3xy)' = 3(x' \cdot y + x \cdot y') = 3y + 3xy'$ – производная произведения;

$(y^2)' = 2y \cdot y'$ – производная сложной функции (степенной функции от функции $y(x)$).

Таким образом,

$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0,$$

откуда находим y':

$$y'(3x + 2y) = -(2x + 3y);$$

$$y' = -\frac{2x+3y}{3x+2y}.$$

Пример 4. Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если функция $y(x)$ задана уравнением:

$$x^3+\ln y-x^2e^y=0.$$

Р е ш е н и е. Продифференцируем уравнение по переменной x:

$$(x^3+\ln y-x^2e^y)'=0;$$

$(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{y'}{y}$ – производная сложной функции (логарифмической функции от функции $y(x)$);

$(x^2e^y)'=(x^2)'\cdot e^y+x^2\cdot(e^y)'=2xe^y+x^2e^y\cdot y'$ – производная произведения, в котором второй множитель является сложной функцией (показательной функцией от функции $y(x)$).

Таким образом,

$$3x^2+\frac{y'}{y}-2xe^y-x^2e^yy'=0,$$

откуда находим y':

$$\frac{y'}{y}-x^2e^yy'=2xe^y-3x^2;$$

$$y'\left(\frac{1}{y}-x^2e^y\right)=2xe^y-3x^2;$$

$$y'=-\frac{(2xe^y-3x^2)y}{1-x^2e^yy}.$$

Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если

$$\begin{cases} x = a\ln t, \\ y = be^t \end{cases}$$

- $y'_x = \frac{a}{bte^t}$
- $y'_x = \frac{b}{a}te^t$
- $y'_x = be^t$
- $y'_x = \frac{be^t}{a\ln t}$

Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 6, \\ y = t^2 + 5t. \end{cases}$$

- $y'_x = \frac{t^2+5t}{3t^2+6}$
- $y'_x = \frac{2t+5}{6t}$
- $y'_x = \frac{6t}{2t+5}$
- $y'_x = 2t + 5$

Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если функция $y(x)$ задана уравнением:

$$x^3 - 5xy^2 + y + 4 = 0.$$

- ○ $y' = \frac{1-10xy}{5y^2-3x^2}$
- ○ $y' = \frac{5y^2-3x^2}{10xy+1}$
- ◉ $y' = \frac{5y^2-3x^2}{1-10xy}$
- ○ $y' = 5y^2 + 10xy - 3x^2$
- ○ $y' = \frac{3x^2-5y^2}{1-10xy}$

Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если функция $y(x)$ задана уравнением:

$$x^4 - \ln xy + e^{xy} = 0.$$

- $y' = \frac{1 - yxe^{xy}}{4x^4 y}$
- $y' = \frac{1 - 4x^4 - yxe^{xy}}{x(\ln x + xe^{xy})}$
- $y' = \frac{y(1 - 4x^4 - yxe^{xy})}{x(yxe^{xy} - 1)}$
- $y' = 4x^3 - \frac{1}{x} + ye^{xy}$

Вторая производная функции, заданной неявно

Если функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, первую производную находим дифференцируя уравнение $F(x, y) = 0$ по переменной x и разрешая его относительно y':

$$y' = f(x, y).$$

Вторую производную функции y находим дифференцируя выражение первой производной по переменной x, при этом помним, что $y = y(x)$ и $y' = f(x, y)$:

$$y'' = (y')' = (f(x, y))'.$$

Пример. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x^2 + y^2 = a^2$.

Р е ш е н и е. Дифференцируем уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ по переменной x и разрешаем его относительно y':

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Полученное уравнение дифференцируем по переменной x:

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{x'y - y'x}{y^2} = -\frac{y - y'x}{y^2},$$

подставим $y' = -\frac{x}{y}$:

$$y'' = -\frac{y - \left(-\frac{x}{y}\right)x}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}.$$

Дифференцируя полученное выражение для y'' и подставляя $y' = -\frac{x}{y}$, можем найти производную третьего порядка:

$$y''' = \left(-\frac{a^2}{y^3}\right)' = -a^2(y^{-3})' = -a^2(-3y^{-4}y') = 3a^2y^{-4}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3a^2x}{y^5}.$$

Вторая производная функции, заданной параметрически

Если функция задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $t \in [\alpha, \beta]$ – параметр, функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в каждой точке отрезка $[\alpha, \beta]$, причем $x'(t) \neq 0 \; \forall t \in [\alpha, \beta]$, тогда функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[x(\alpha), x(\beta)]$ и

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Вторую производную $y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ найдем, дифференцируя по переменной x выражение для y'_x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{(y'_x)'_t dt}{x'_t dt} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично, $y''' = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$.

Пример. Найти производную второго порядка от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2), \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Р е ш е н и е. Найдем первую производную:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t.$$

Тогда

$$y''_x = \frac{2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2\left(1 + t^2\right).$$

Найти производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции

$\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 4t - t^4, \end{cases}$ в точке $t_0 = -3$

- $-\frac{32}{3}$
- -24
- $-\frac{3}{32}$
- $-\frac{1}{24}$

Найти производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции

$$\begin{cases} x = \frac{\sin t}{3+\sin t}, \\ y = \frac{\cos t}{3+\sin t}, \end{cases} \text{ в точке } t_0 = \pi.$$

- $-\frac{1}{3}$
- -1
- 3
- 0

Вычислить значение $y''(1)$ для функции $y(x)$, заданной неявно уравнением

$2x^3 + y^3 - 3xy = 0$, если $y(1) = 2$.

- $y''(1) = \frac{4}{3}$
- $y''(1) = -\frac{4}{3}$
- $y''(1) = -\frac{2}{3}$
- $y''(1) = \frac{2}{3}$

Вычислить значение $y''(2\pi)$ для функции $y(x)$, заданной неявно уравнением

$$\cos(xy) = y^2, \quad \text{если } y(2\pi) = 1.$$

- $y''(2\pi) = -\frac{1}{4}$
- $y''(2\pi) = \frac{1}{2}$
- $y''(2\pi) = -\frac{1}{2}$
- $y''(2\pi) = \frac{1}{4}$