Основы алгебры логики

Доцент каф.
Информационных технологий
Сорокина В.В.

От логических переменных до одноразрядного сумматора

Основы алгебры логики

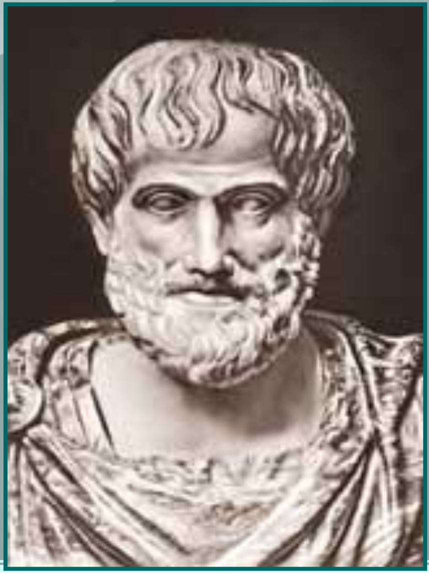
- Формы мышления
- Логические выражения
- Логические операции
- Законы алгебры логики
- Таблицы истинности
- Логические задачи

Логические основы компьютера

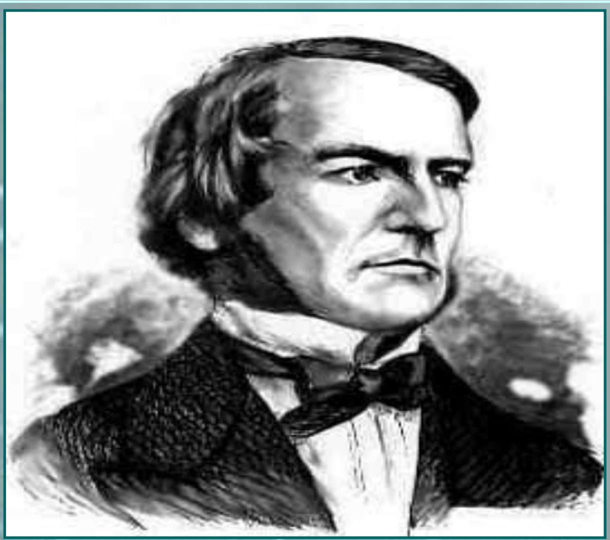
- Базовые логические элементы
- Построение логических схем
- Одноразрядный сумматор
- Триггер
- Регистры
- Контрольная работа

…мы мышления и история развития …бры логики

История логики насчитывает около двух с половиной тысячелетий. Первые учения о формах и способах мышления возникли в Древнем Китае и Индии. Основоположником формальной логики является **Аристотель** (384-322 гг. до н.э.) – древнегреческий философ, который впервые отделил логические формы мышления от его содержания.



Алгебра логики – **наука об операциях, аналогичных математическим, над высказываниями или над объектами, которые могут принимать только два значения – «ИСТИНА» или «ЛОЖЬ».**



В 1842 году английский математик **Джорж Буль** разработал *математическую логику* или *алгебру логики*, которую впоследствии стали называть *«булевой алгеброй».*

Спустя 100 лет алгебра логики стала основой теории цифровых вычислительных машин, ее используют в компьютерной логике, электронике, в основе всех микропроцессорных операций.

Формы мышления и история развития алгебры логики

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Многие философы и математики развивали отдельные положения логики и иногда даже намечали контуры современного исчисления высказываний, но ближе всех к созданию математической логики подошел уже во второй половине XVII века выдающийся немецкий ученый **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646— 1716), указавший пути для перевода логики “из словесного царства, полного неопределенностей, в царство математики, где отношения между объектами или высказываниями определяются совершенно точно”. Лейбниц надеялся даже, что в будущем философы, вместо того чтобы бесплодно спорить, станут брать бумагу и вычислять, кто из них прав. При этом в своих работах Лейбниц затрагивал и двоичную систему счисления.

Уже в XIX веке стало понятно, что система Буля хорошо подходит для описания электрических переключательных схем. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому, как утверждение может быть либо истинным, либо ложным. А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера.

Логика – это наука о формах и способах мышления, рассуждений и доказательств.

Мышление осуществляется через
понятия, высказывания и умозаключения.

Понятие – это форма мышления, выделяющая существенные и отличительные признаки объекта.

Умозаключение **–** это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких ***простых высказываний*** (суждений) может быть получено новое ***составное высказывание*** (суждение).

Высказывание – это формулировка в форме утверждения или отрицания об объекте и его свойствах. ***Высказывание может быть истинным или ложным.***

Примеры высказываний

Истинное высказывание: «Буква «А» - гласная».

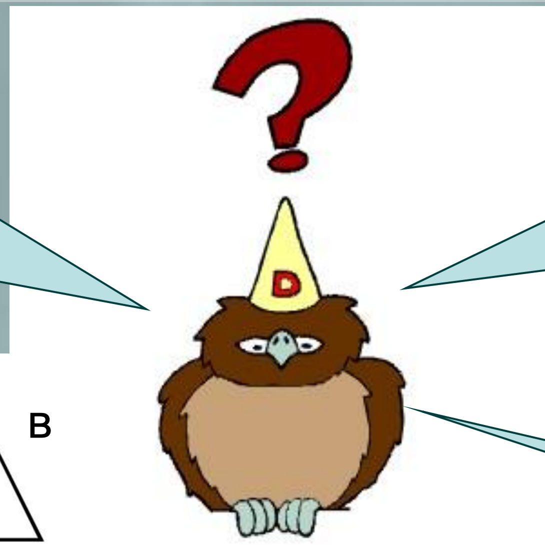
Ложное высказывание: «Компьютер был изобретен в середине XIX века».

Какие из предложений являются высказываниями?
Какие из высказываний истинные?

1. Какой длины эта лента? — *Не высказывание*
2. Прослушайте сообщение. — *Не высказывание*
3. Делайте утреннюю зарядку! — *Не высказывание*
4. Назовите устройства ввода информации. — *Не высказывание*
5. Кто отсутствует? — *Не высказывание*
6. Париж – столица Англии. — *Ложное высказывание*
7. Число 11 является простым. — *Истинное высказывание*
8. 4+5=10 — *Ложное высказывание*
9. Без труда не вытащишь и рыбку из пруда. — *Истинное высказывание*
10. Сложите числа 2 и 5. — *Не высказывание*
11. Некоторые медведи живут на Севере. — *Истинное высказывание*
12. Все медведи – бурые. — *Ложное высказывание*
13. Чему равно расстояние от Москвы до Ленинграда? — *Не высказывание*
14. Сумма углов треугольника – 180 градусов. — *Истинное высказывание*

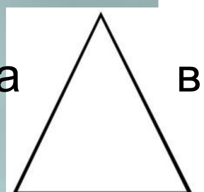
Примеры умозаключений

Дано высказывание: «Все углы равнобедренного треугольника равны». Получите путем умозаключений из предыдущего другое высказывание: «Этот треугольник равносторонний».



Пусть основанием треугольника является сторона С

⇓



Тогда А=В

⇘

Так как в треугольнике все углы равны, следовательно, основанием может быть любая другая сторона, например, А.

⇗

Тогда В=С

⇑

Следовательно, А=В=С.
Треугольник равносторонний.

Логические выражения

Логическая переменная – простое высказывание, которое можно обозначить буквой, и имеющее значение «ИСТИНА» или «ЛОЖЬ».

⇓

A = «Миля больше километра» = ИСТИНА

B = «Фут больше мили» = ЛОЖЬ

Логическая функция – составное высказывание, состоящее из логических переменных, связанных логическими операциями.

⇓

F(A,B) = A и B

Логические операции – логические действия над логическими переменными.

Логические выражения

«Неверно, что миля больше километра и фут больше мили»

«Верно, что миля больше километра или фут больше мили»

«Если число простое, то оно нечетное»

Значение

Сложные высказывания могут быть соединительные, разделительные, условные, эквивалентные, с внешним отрицанием.

Логические операции

НЕ, —, $\neg$	**Инверсия**, **логическое отрицание**
И, $\wedge$, and, &, *, $\cdot$	**Конъюнкция**, **логическое умножение**
ИЛИ, $\vee$, or, +	**Дизъюнкция**, **логическое сложение**
$\rightarrow$	**Импликация**, **логическое следование**
=, $\leftrightarrow$	**Эквивалентность**, **логическое равенство**

ИСТИНА – 1

ЛОЖЬ - 0

Таблица истинности определяет значение сложного высказывания при всех возможных значениях простых высказываний

Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую войдут логические переменные, обозначающие высказывания, и знаки логических операций, обозначающие логические функции.

Инверсия - логическое отрицание

Логическое отрицание делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное – истинным.

От лат. inversio - переворачиваю

В переводе на естественный язык
«Не А»
«Неверно, что А»

Таблица истинности функции логического отрицания

A	$F=\overline{A}$
0	1
1	0

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Луна – спутник Земли» = ИСТИНА

Не А – «Неверно, что число 10 – четное» = ЛОЖЬ

Не В – «Неверно, что число 10 – отрицательное» = ИСТИНА

Не С – «Неверно, что Луна – спутник Земли» = ЛОЖЬ

ИСТИНА – 1

ЛОЖЬ - 0

Конъюнкция - логическое умножение

езультат логического умножения является истинным огда и только тогда, когда истинны все входящие в его простые высказывания.

От лат. conjunctio - связываю

Таблица истинности функции логического умножения

A	B	F=A*B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В переводе на естественный язык

«и А, и В» ***«как А, так и В»***

«А вместе с В» ***«А несмотря на В»***

«А, в то время как В»

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Число 10 кратно 2» = ИСТИНА

А и В – «Число 10 – четное и отрицательное» - ЛОЖЬ

А и С – «Число 10 как четное, так и кратно 2» - ИСТИНА

И , $\wedge$, and, &, *, ·

Дизъюнкция - логическое сложение

езультат логического сложения является истинным огда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него ростых высказываний.

От лат. disjunctio – различаю

Таблица истинности функции логического сложения

A	B	F=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

В переводе на естественный язык
«А или В»

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Число 10 - простое» = ЛОЖЬ

А или В – «Число 10 – четное или отрицательное» ИСТИНА

А или С – «Число 10 четное или простое» - ИСТИНА

В или С – «Число 10 отрицательное или простое» - ЛОЖЬ

ИЛИ, $\vee$, or, +

Эквивалентность - логическое равенство

езультат логического равенства является истинным огда и только тогда, когда оба высказывания дновременно либо истинны, либо ложны.

От лат. aeguivalens – равноценное

Таблица истинности функции логического равенства

A	B	F=A↔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В переводе на естественный язык

«А эквивалентно В»

«А тогда и только тогда, когда В»

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Число 10 - простое» = ЛОЖЬ

А ↔ В – «Число 10 – четное, тогда и только тогда, когда оно - отрицательное» - ЛОЖЬ

В ↔ С – «Число 10 такое же простое, как и отрицательное» ИСТИНА

=, ↔

Неравнозначность (исключающее ИЛИ)

езультат неравнозначности является истинным огда, когда является истинным либо один ее ргумент, либо другой, но не оба вместе.

Таблица истинности функции неравнозначности

A	B	$F=A\oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XOR, $\oplus$

В переводе на естественный язык
«А или В, но не оба», «А либо В», «либо А, либо В», «либо не А, либо не В», «или А, или В», «только А или только В»

Пример: Даны высказывания

А – «Студент получил двойку» = ЛОЖЬ

В – «Студент получил тройку» = ИСТИНА

С – «Студент сдал экзамен» = ИСТИНА

или А, или В – «Студент получил или двойку, или тройку» ИСТИНА

или В, или С – «Студент или получил тройку, или сдал экзамен» ЛОЖЬ

Импликация - логическое следование

езультат логического следования является ложным
огда и только тогда, когда из истины следует ложь.

От лат. implicatio – тесно связывать

Таблица истинности функции логического следования

A	B	F=A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В переводе на естественный язык

«если А, то В» ***«В, если А»***

«Когда А, тогда и В»

«А достаточно для В»

«А только тогда, когда В»

Пример: Даны высказывания

А – «Число 10 – четное» = ИСТИНА

В – «Число 10 – отрицательное» = ЛОЖЬ

С – «Число 10 - простое» = ЛОЖЬ

А → В – «Если число 10 – четное, то оно - отрицательное» - ЛОЖЬ

А → С – «Число 10 простое, если четное» - ЛОЖЬ

«Если число делится на 10, то оно делится на 5» ИСТИНА

А – условие, В - следствие

Примеры записи высказываний в виде логических выражений

1

«Летом Петя поедет в деревню и, если будет хорошая погода, то он будет рыбачить.»

A B C

$F = A * (B \rightarrow C)$

При составлении логического выражения необходимо учитывать порядок выполнения логических операций:

1. **действия в скобках**
2. **инверсия**
3. **конъюнкция**
4. **дизъюнкция**
5. **неравнозначность**
6. **эквивалентность**
7. **импликация**

2

«Точка X принадлежит интервалу [A;B]»

$(X>=A) * (X<=B)$

3

«Точка X не принадлежит интервалу [A;B]»

$\overline{(X>=A) * (X<=B)}$

$(X<A) + (X>B)$

4

«Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя.»

B C

D – идет дождь

$\overline{B \rightarrow (\overline{D} \rightarrow C)}$

Примеры записи высказываний в виде логических выражений

5

«Если урок будет интересным, то никто из школьников – Миша, Вика, Света – не будет смотреть в окно»

У — Урок будет интересным

М — Миша будет смотреть в окно

В — Вика будет смотреть в окно

С — Света будет смотреть в окно

$У \longrightarrow \overline{M*B*C}$

6

«Я пойду гулять тогда и только тогда, когда выучу все уроки.»

$\underbrace{\text{Я пойду гулять}}_{B}$ … $\underbrace{\text{выучу все уроки}}_{C}$

$B \longleftrightarrow C$

Упражнения с логическими выражениями

7

По мишеням произведено три выстрела. Рассмотрено высказывание:
P_k = «Мишень поражена к-тым выстрелом», где к=1, 2, 3.
Что означают следующие высказывания:
а) $P_1 + P_2 + P_3$ б) $P_1 * P_2 * P_3$ в) $\overline{P_1 * P_2 * P_3}$

8

Построить таблицу истинности для выражения $F=(A+B)*(\overline{A}+\overline{B})$

A	B	A+B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	F
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

9

Вычислить значение булевского выражения $\overline{X1*X2+\overline{X3}+\overline{X4}}$, при X1=1, X2=0, X3=1, X4=0.

$\overline{1*0 + \overline{1} + \overline{0}} = 1*0 +0 +1 = 0 + 0 + 1= 1$

Законы алгебры логики

Закон	Для «ИЛИ»	Для «И»
Переместительный	$X + Y = Y + X$	$X*Y = Y*X$
Сочетательный	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$	$(X*Y)*Z=X*(Y*Z)$
Распределительный	$X*(Y+Z) = X*Y+X*Z$	$X+Y*Z = (X+Y)*(X+Z)$
Правила де Моргана	$\overline{X+Y} = \overline{X} * \overline{Y}$	$\overline{X*Y} = \overline{X} + \overline{Y}$
Идемпотентности	$X + X = X$	$X * X = X$
Поглощения	$X+X*Y = X$	$X*(X+Y)= X$
Склеивания	$(X*Y)+(\overline{X}*Y)=Y$	$(X+Y)*(\overline{X}+Y)=Y$
Операции переменной с ее инверсией	$X+\overline{X}=1$	$X*\overline{X}=0$
Операция с константами	$X+0=X; X+1=1$	$X*1=X; X*0=0$
Двойного отрицания	$\overline{\overline{X}}=X$	$\overline{\overline{X}}=X$

$A \longrightarrow B = \overline{A}+B$

$A \longleftrightarrow B =(\overline{A}+B)*(\overline{B}+A)$

Решение содержательных задач с помощью алгебры логики

Алгоритм

Внимательно изучить условие

↓

Выделить простые высказывания и обозначить их буквами

↓

Записать условие задачи на языке алгебры логики

↓

Составить формулу, в которой объединить логическим умножением формулы каждого утверждения, приравнять произведение к 1

↓

Упростить формулу согласно законам – минимизировать логическое выражение

↓

Проанализировать результат или построить таблицу истинности результирующего выражения и найти по таблице значения переменных, для которых значение функции равно 1

Решение логических задач с помощью алгебры логики

1

«Синоптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее:

***1**. Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.*

***2**. Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.*

***3**. Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра».*

Так какая же погода будет завтра?

$F1=A \longrightarrow B*\overline{C}$

$F2=C \longrightarrow B*A$

$F3=B \longrightarrow C*A$

A — Ветра нет

B — Пасмурно

C — Дождь

$$F1*F2*F3= (A \longrightarrow B*\overline{C})*(C \longrightarrow B*A)*(B \longrightarrow C*A)=$$

$$(\overline{A}+B*\overline{C}) \;*\; (\overline{C}+B*A) \;*\; (\overline{B}+C*A) =$$

$$\overline{A}*\overline{C}*\overline{B} + \underbrace{B*\overline{B}*\overline{C}}_{0} + \underbrace{\overline{B}*B*\overline{C}*A}_{0} + \underbrace{\overline{A}*\overline{C}*C*A}_{0} + \underbrace{B*\overline{C}*A*C*A}_{0} = \overline{A}*\overline{C}*\overline{B}$$

Высказывание истинно (=1), если каждый множитель =1. Поэтому

«погода будет ясная, без дождя, но ветреная»

Решение содержательных задач табличным способом

2

В оркестр приняли трех новых музыкантов: Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:

1) Смит – самый высокий;
2) играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
3) играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу;
4) когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их;
5) Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами.

	Скрипка	Флейта	Альт	Кларнет	Гобой	Труба
Браун	0	0	1	1	0	0
Смит	0	1	0	0	1	0
Вессон	1	0	0	0	0	1

Так как музыкантов трое, а инструментов 6 и каждый владеет только 2-мя, получается, что каждый играет только на тех инструментах, которыми другие не владеют.

0 - не играет на инструменте, 1 – играет на инструменте.

Ответ: Браун играет на альте и кларнете, Смит – на флейте и гобое, Вессон -- на скрипке и трубе.

Решение содержательных задач с помощью рассуждений

3

Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: «Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский». Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый?

Решение.
Если верно первое утверждение, то верно и второе, так как юноши изучают разные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение ложно.

Если верно второе утверждение, то первое и третье должны быть ложны. При этом получается, что никто не изучает китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно.

Остается считать верным третье утверждение, а первое и второе – ложными. Следовательно, Вадим не изучает китайский, китайский изучает Сергей.

Ответ: Сергей изучает китайский язык, Михаил – японский, Вадим – арабский.

Таблицы истинности

1 Докажите эквивалентность булевских выражений $A \longrightarrow B = \overline{A} + B$

A	B	$A \longrightarrow B$	$\overline{A}+B$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	1	1

2 Восстановите булевское выражение по таблице истинности

X1	X2	X3	F-?
0	0	0	0
0	0	1	**1**
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	**1**

$\overline{X1}*\overline{X2}*X3=F1$

$\overline{X1}*X2*X3=F2$

$X1*X2*X3=F3$

Ответ: F=F1+F2+F3