Курс лекций по теоретической механике

Динамика

Лекция 8

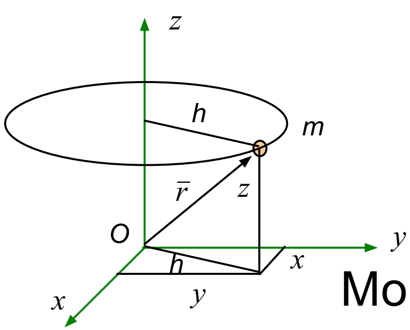
Законы сохранения. Элементы теории моментов инерции. Кинетический момент твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела. Пример решения задачи на использование теоремы об изменении момента количества движения системы. Элементарная теория гироскопа.

- **Элементы теории моментов инерции** – При вращательном движении твердого тела мерой инерции (сопротивления изменению движения) является момент инерции относительно оси вращения. Рассмотрим основные понятия определения и способы вычисления моментов инерции.

1. Момент инерции материальной точки относительно оси:

$$\boxed{I_z = mh^2 = m(x^2 + y^2)}$$

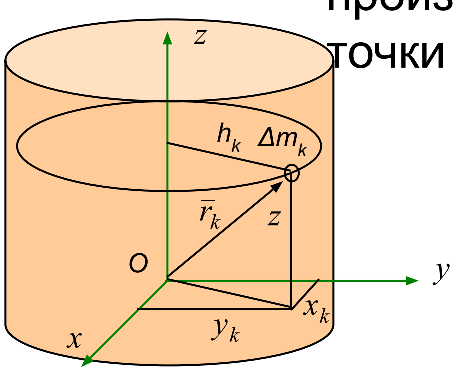
Момент инерции материальной точки относительно оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния точки до оси.



2. Момент инерции твердого тела относительно оси:

$$\boxed{I_z = \sum \Delta m_k h_k^2 = \sum \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2)}$$

Момент инерции твердого тела относительно оси равен сумме произведений массы каждой точки на квадрат расстояния этой точки до оси.



При переходе от дискретной малой массы к бесконечно малой массе точки предел такой суммы определяется интегралом:

$$\boxed{I_z = \int h^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm}$$

-осевой момент инерции твердого тела

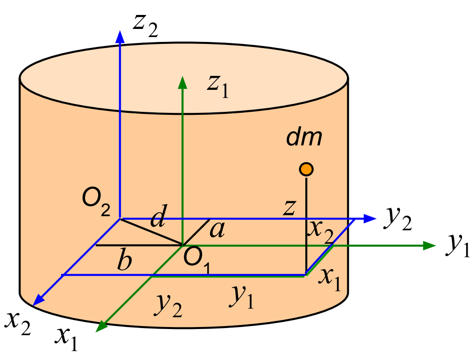
$$\boxed{I_{xy} = \int xydm}$$ **- центробежный момент инерции твердого тела.**

Кроме осевого момента инерции твердого тела существуют другие виды моментов инерции:

$$\boxed{I_O = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm}$$ **- полярный момент инерции твердого тела.**

3. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей – формула перехода к параллельным осям:

$$I_{z2} = \int (x_2^2 + y_2^2) dm = \int ((x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2) dm = \underbrace{\boxed{\int (x_1^2 + y_1^2) dm}}_{I_{z1}} + \underbrace{\boxed{2a\int x_1 dm}}_{S_{y1}} + \underbrace{\boxed{2b\int y_1 dm}}_{S_{x1}} + \underbrace{\boxed{(a^2 + b^2)}}_{d^2}\int \underbrace{\boxed{dm.}}_{M}$$



Таким образом:

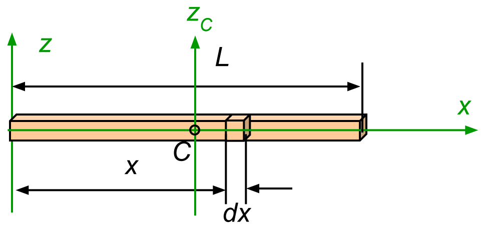
$$\boxed{I_{z2} = I_{z1} + 2aS_{y1} + 2bS_{x1} + d^2 M.}$$

Если ось z_1 проходит через центр масс, то статические моменты равны нулю:

$$\boxed{I_{z2} = I_{zC} + d^2 M.}$$

4. Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси:

Выделим элементарный объем $dV = Adx$ на расстоянии x:



Элементарная масса: $dm = \rho A dx$

$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho A dx = \rho A \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \boxed{\frac{ML^2}{3}}$$

Для вычисления момента инерции относительно центральной оси (проходящей через центр тяжести) достаточно изменить расположение оси и задать пределы интегрирования ($-L/2$, $L/2$). Здесь продемонстрируем формулу перехода к параллельным осям:

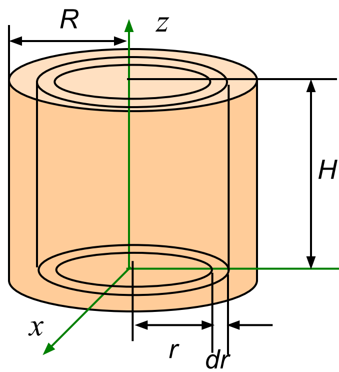
$$I_z = I_{zC} + d^2 M.$$

$$\Rightarrow \frac{ML^2}{3} = I_{zC} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M.$$

$$I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \boxed{\frac{ML^2}{12}}.$$

5. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии:

Выделим элементарный объем $dV = 2\pi r dr H$ (тонкий цилиндр радиуса r) :



Элементарная масса:

$$dm = \rho 2\pi r dr H$$

$$I_{zy} = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H =$$

$$= \rho 2\pi H \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{MR^2}{2}}$$

Здесь использована формула объема цилиндра $V=\pi R^2 H$.

Для вычисления момента инерции пустотелого (толстого) цилиндра достаточно задать пределы интегрирования от R_1 до R_2 ($R_2 > R_1$):

$$I_z = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4}\Big|_{R1}^{R2} = \rho 2\pi H\left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4}\right) = \boxed{\frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}}.$$

Поскольку высота цилиндров в результате не входит в формулы моментов инерции, то они остаются справедливыми для тонкого сплошного диска и обода колеса (тонкого кольца).

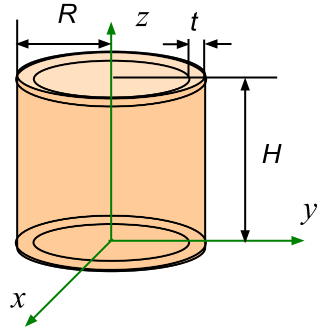
6. Момент инерции тонкого цилиндра относительно оси симметрии ($t \ll R$):

В силу малости толщины цилиндра считаем, что все точки находятся на одинаковом расстоянии R до оси и интегрирования не требуется.
Объем $V = 2\pi RtH$. (тонкий цилиндр радиуса R с толщиной стенки t).

$$I_z = R^2 \rho 2\pi RtH = \boxed{MR^2}.$$

То же самое можно получить с использованием формулы для толстостенного цилиндра, учитывая малость t:

$$I_z = \frac{M((R^2 + (R-t)^2)}{2} = \boxed{\frac{M(2R^2 - 2Rt + t^2)}{2}.} \ll 2R^2.$$



■ Кинетический момент твердого тела

Выделим дискретный малый объем массы Δm_i:

$$\Delta K_{zi} = h_i \Delta m_i v_i = h_i \Delta m_i \omega_z h_i = \omega_z h_i^2 \Delta m_i.$$

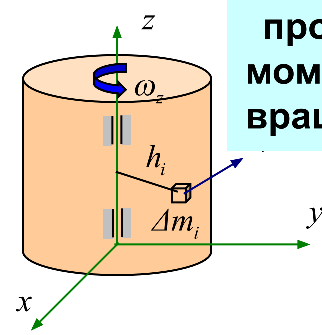
$$K_z = \sum \Delta K_{zi} = \omega_z \sum h_i^2 \Delta m_i = \boxed{\omega_z I_z}.$$

Или переходя к бесконечно малым:

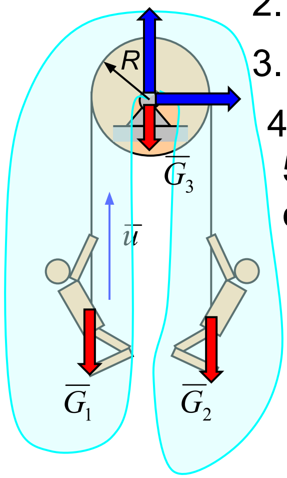
$$dK_z = hdmv = hdm\omega_z h = \omega_z h^2 dm.$$

$$K_z = \int dK_z = \omega_z \int h^2 dm = \boxed{\omega_z I_z.}$$

Кинетический момент вращающегося тела равен произведению угловой скорости на момент инерции относительно оси вращения.



Пример: Два человека одинакового веса $G_1 = G_2$ висят на канате, переброшенном через сплошной блок весом $G_3 = G_1/4$. В некоторый момент один из них начал подниматься по канату с относительной скоростью u. Определить скорости подъема каждого из людей.



1. Выбираем объект движения (блок с людьми):
2. Отбрасываем связи (опорное устройство блока):
3. Заменяем связь реакциями (подшипника):
4. Добавляем активные силы (силы тяжести):
5. Записываем теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения блока: $\dfrac{dK_z}{dt} = M_z^e = G_1 R - G_2 R = 0.$

Так как момент внешних сил равен нулю, то кинетический момент должен оставаться постоянным: $K_z = const. \Rightarrow K_{z0} = K_z.$

В начальный момент времени $t = 0$ было равновесие и $K_{z0} = 0$.

После начала движения одного человека относительно каната вся система пришла в движение, но кинетический момент системы должен остаться равным нулю: $K_z = 0$.
Кинетический момент системы складывается из кинетических моментов обоих людей и блока:

$$K_z = K_{z1} + K_{z2} + K_{z3} = -\frac{G_1}{g}(u - v_2)R + \frac{G_2}{g} v_2 R + I_3\omega_3 = 0.$$

Здесь v_2 – скорость второго человека, равная скорости троса,

$$I_z = \frac{M_3 R^2}{2} = \frac{G_3 R^2}{2g} = \frac{G_1 R^2}{4 \cdot 2g}. \qquad \omega_3 = \frac{v_2}{R}. \qquad -\frac{G_1}{g}(u - v_2)R + \frac{G_1}{g} v_2 R + \frac{G_1 R^2}{4 \cdot 2g}\frac{v_2}{R} = 0.$$

$$\boxed{v_2 = \frac{8u}{17}.} \qquad \boxed{v_1 = u - \frac{8u}{17} = \frac{9u}{17}.}$$

Дифференциальное уравнение вращения твердого тело относительно оси:

Запишем теорему об изменении кинетического момента твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

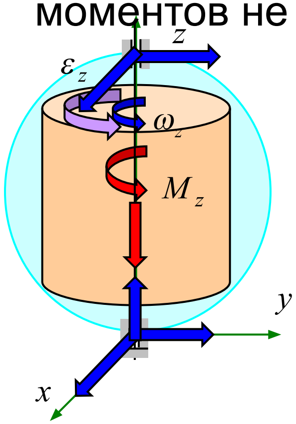
$$\boxed{\frac{dK_z}{dt} = M_z^e.}$$

Кинетический момент вращающегося твердого тела равен:

$$K_z = \omega_z I_z.$$

Момент внешних сил относительно оси вращения равен вращающему моменту (реакции и сила тяжести моментов не создают):

$$M_z^e = M_z = M_{\text{вращ}}.$$



Подставляем кинетический момент и вращающий момент в теорему

$$\frac{d(\omega_z I_z)}{dt} = M_z = M_{\text{вращ}}.$$

$$\boxed{I_z \ddot{\varphi} = M_z = M_{\text{вращ}}.}$$

Пример: Определить период малых свободных колебаний однородного стержня массы *M* и длиной *l*, подвешенного одним концом к неподвижной оси вращения.

$$\boxed{I_z \ddot{\varphi} = M_z = -Mg\frac{l}{2}\sin\varphi.}$$

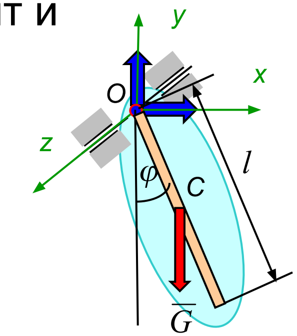
Или:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mg}{I_z}\frac{l}{2}\sin\varphi = 0.$$

В случае малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgl}{2I_z}\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

$$k = \sqrt{\frac{Mgl}{2I_x}}$$



Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{2I_x}{Mgl}}.$$

Момент инерции стержня:

$$I_z = \frac{Ml^2}{3}.$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.}$$