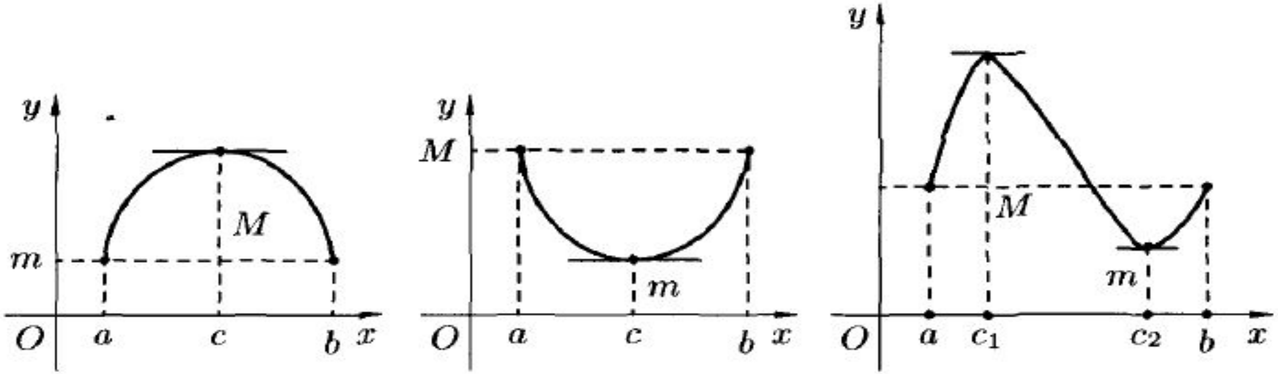
Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение.

Теорема 1 (Ролль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$



Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений , соответственно, M и m.

Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a;b]$ и, следовательно, ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка $[a;b]$.

Если $M \neq m$, то функция достигает хотя бы одно из значений M или m во *внутреней* точке c интервала $(a;b)$, так как $f(a) = f(b)$.

Пусть, например, функция принимает значение M в точке $x = c \in (a;b)$, т. е. $f(c) = M$. Тогда для всех $x \in (a;b)$ выполняется соотношение

$$f(c) \geqslant f(x).$$

Найдем производную $f'(x)$ в точке $x = c$: $\quad f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$

В силу условия $f(c) \geqslant f(x)$. верно неравенство $f(c+\Delta x) - f(c) \leqslant 0$.

Если $\Delta x > 0$ (т. е. $\Delta x \to 0$ справа от точки $x = c$), то

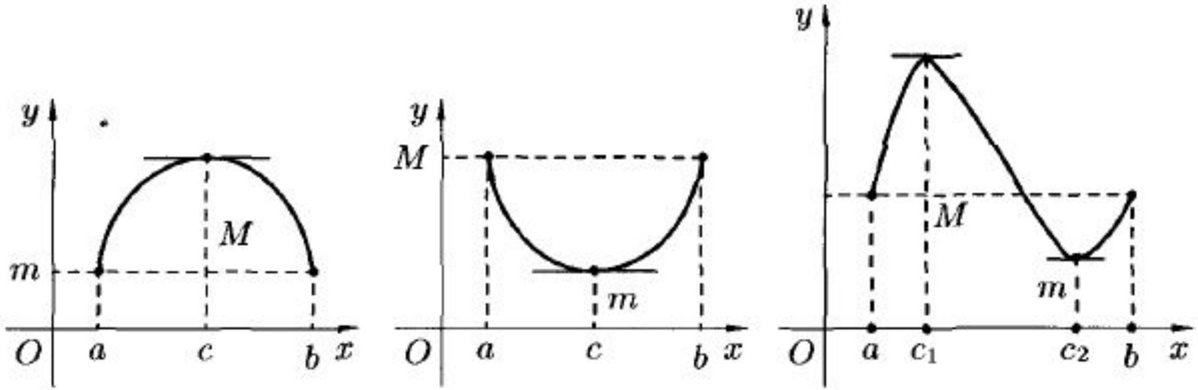
$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \quad \text{и поэтому} \quad f'(c) \leqslant 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то
$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geqslant 0 \text{ и } f'(c) \geqslant 0.$$

Таким образом, $f'(c) = 0$.

В случае, когда $f(c) = m$, доказательство аналогичное.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox



Теорема 2 (Коши). Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$

Отметим, что $\varphi(b)-\varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка c, такая, что $\varphi'(c) = 0$, чего не может быть по условию теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}(\varphi(x)-\varphi(a)).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, так как является линейной комбинацией функций $f(x)$ и $\varphi(x)$; на концах отрезка она принимает одинаковые значения $F(a) = F(b) = 0$.

На основании теоремы Ролля найдется точка $x = c \in (a;b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$, следовательно,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c) = 0.$$

Отсюда следует

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c) \quad \text{и} \quad \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

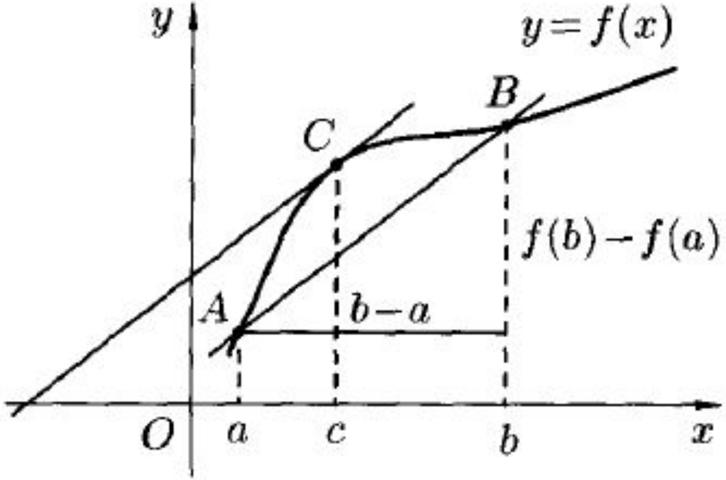
Теорема 3 (Лагранж). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Решение: Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши. Действительно, положив $\varphi(x) = x$, находим $\varphi(b) - \varphi(a) = b - a$, $\varphi'(x) = 1$, $\varphi'(c) = 1$.

Подставляя эти значения в формулу $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, получаем $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ или $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Полученную формулу называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой о конечном приращении***: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a;b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.



Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Запишем формулу в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),$$

где $a<c<b$. Отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент секущей AB, а величина $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой $x=c$.

Следовательно, геометрический смысл теоремы Лагранжа таков: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $C(c; f(c))$ в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.

Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Правила Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, который основан на применении производных.

Теорема .4 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$.

Применим к функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ теорему Коши для отрезка $[x_0; x]$, лежащего в окрестности точки x_0. Тогда $\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где c лежит между x_0 и x (рис. 144). Учитывая, что $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$, получаем

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Пример 1. . Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-10x^2+9x}{2x^5+3x^2-4x-1}$.

<u>Решение.</u> Функции $f(x)=x^{10}-10x^2+9x$ и $g(x)=2x^5+3x^2-4x-1$ являются бесконечно малыми при $x\to 1$, дифференцируемы, и существует

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{10}-10x^2+9x\right)'}{\left(2x^5+3x^2-4x-1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{10x^9-20x+9}{10x^4+6x-4}=-\frac{1}{12}.$$

Тогда применимо правило Лопиталя и $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-10x^2+9x}{2x^5+3x^2-4x-1}=-\dfrac{1}{12}$.

При $x \to x_0$, величина c также стремится к x_0; перейдем в равенстве $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

к пределу: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$, то $\lim\limits_{c \to x_0} \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)} = l$. Поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = l$.

Коротко полученную формулу читают так: предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Замечания: 1. Теорема **Лопиталя** верна и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x = x_0$, но $\lim f(x) = 0$ и $\lim \varphi(x) = 0$.

Достаточно положить $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $\varphi(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.

2. Теорема **Лопиталя** справедлива и в том случае, когда $x \to \infty$. Действительно, положив $x = \frac{1}{z}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z\to 0}\frac{f(\frac{1}{z})}{\varphi(\frac{1}{z})} = \lim_{z\to 0}\frac{(f(\frac{1}{z}))'}{(\varphi(\frac{1}{z}))'} = \lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})}{\varphi'(\frac{1}{z})(-\frac{1}{z^2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, теорему **Лопиталя** можно применить еще раз: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и т. д.

***Пример* 1.** Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1} = 1.$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x}{1}=9$$

Пример 3: Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}.$$

Решение. Числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x\to 1$, а потому имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся правилом Лопиталя, то есть рассмотрим предел отношения производных функций:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

Пример. 4 Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. Числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x\to 1$, а потому имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Воспользуемся правилом Лопиталя, то есть рассмотрим предел отношения производных функций:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{\operatorname{sh}^2 x\cdot\ln(1+x)}$.

Р е ш е н и е. Вначале используем асимптотические равенства при $x\to 0$: $\operatorname{sh}x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$. Теперь воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{\operatorname{sh}^2 x\cdot\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=-\frac{1}{3}.$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}+2\sin x}{x}$.

<u>Р е ш е н и е.</u> Отношение производных числителя и знаменателя равно

$$2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+2\cos x$$

и не имеет предела при $x\to 0$. Следовательно, правило Лопиталя неприменимо.

Воспользуемся свойствами пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}+2\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=0+2=2.$$

Теорема 2 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$)

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрест ности точки x_0 (кроме, может быть, точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, $\varphi'(x) \neq 0$.

Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Пример .7. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cdot\cos^2 5x}{\cos^2 3x\cdot 5} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 10x}{1+\cos 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{10\cos 10x}{6\cos 6x} = \frac{5}{3}.$$

Пример 8. . Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

<u>Р е ш е н и е.</u> Функции $f(x)=\ln x$ и $g(x)=1+2\ln\sin x$ стремятся к бесконечности.

Их производные существуют при $x>0$, и предел

$$\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(1+2\ln\sin x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2x\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{tg}x}{2x}=\frac{1}{2}$$ существует.

Значит, можем воспользоваться правилом Лопиталя

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(1+2\ln\sin x)'}=\frac{1}{2}.$$

Раскрытие неопределенностей различных видов

$$0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^{\infty},\ \infty^0,\ 0^0$$

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, которые называют *основными*. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0 сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

1. Пусть $f(x) \to 0$, $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Тогда очевидны следующие преобразования:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)\varphi(x)) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \left(\text{или } \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right).$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x$.

<u>Решение.</u> Преобразуем неопределенность вида $0\cdot\infty$ к виду $\frac{\infty}{\infty}$: $\sqrt{x}\ln x=\dfrac{\ln x}{x^{-1/2}}$.

Тогда, пользуясь правилом Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1/2}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}=\lim_{x\to+0}\left(-2\sqrt{x}\right)=0.$$

Пример 10.

$$\lim_{x\to2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}(2-x)=[\infty\cdot0]=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

2. Пусть $f(x) \to \infty$, $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Тогда можно поступить так:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - \varphi(x)) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)} \frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Пример 11. $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x \cdot (x-1)} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x(2+x)}\right)=\frac{1}{2}.$$

Пример 13. . Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

<u>Р е ш е н и е.</u> Преобразуем неопределенность вида $\infty-\infty$ к виду $\dfrac{0}{0}$,

и воспользуемся эквивалентностью $\operatorname{arctg}x \sim x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2\operatorname{arctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}.$$

Теперь применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{arctg}x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{3}.$$

3. Пусть или $f(x) \to 1$ и $\varphi(x) \to \infty$. или $f(x) \to \infty$ и $\varphi(x) \to 0$, или $f(x) \to 0$ и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Неопределенности вида 1^∞, ∞^0, 0^0

Для нахождения предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$

удобно сначала прологарифмировать выражение $A = f(x)^{\varphi(x)}$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение: Имеем неопределенность вида 1^∞. Логарифмируем выражение $A = (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$, получим: $\ln A = \frac{1}{x^2}\ln\cos 2x$. Затем находим предел:

$$\lim_{x\to 0}\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} =$$

$= -2$, т. е. $\ln\lim\limits_{x\to 0} A = -2$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0} A = e^{-2}$, и $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$.

Пример 15. Найти $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0, обозначим дан ную функцию через y, т. е. $y=(\sin x)^x$ и прологарифмируем ее: $\ln y = x\cdot\ln\sin x = \dfrac{\ln\sin x}{\dfrac{1}{x}}$.

Вычислим предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталя (имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0} x\cdot\ln\sin x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x = 1.$$

Решение можно оформить короче, если воспользоваться «готовой» формулой

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)\ln f(x)} = \exp\Bigl(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\ln f(x)\Bigr)$$

(использовано основное логарифмическое тождество: $f^{\varphi} = e^{\ln f^{\varphi}}$).

***Пример* 16.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = [\infty^0] = \exp\left(\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x \ln\frac{1}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right) = e^{0\cdot 1} = e^0 = 1.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

Найти пределы следующих функций:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\left(e^x+e^{-x}\right)\cos x)}{x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n},(n>0)$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x)$;

л) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

н) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$;

о) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;

п) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

р) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Монотонность функции

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема 1. (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ для $\forall x \in (a;b)$.

Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$. Возьмем произвольные точки x и $x + \Delta x$ на интервале $(a;b)$ и рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$ возрастает, поэтому если

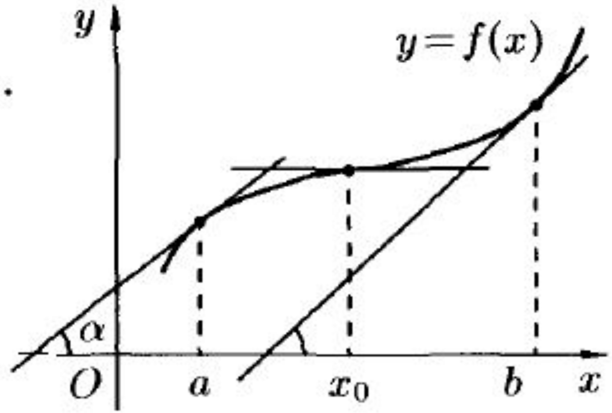
$\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$ и $f(x+\Delta x) > f(x)$; если $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$ и $f(x+\Delta x) < f(x)$. В обоих случаях $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$, так

как числитель и знаменатель дроби имеют одинаковые знаки. По условию теоремы функция $f(x)$ имеет производную в точке x и является пределом рассматриваемого отношения. Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$.

Геометрически теорема означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox или в некоторых точках (на рисунке в точке с абсциссой x_0) параллельны оси Ox.



Теорема 2. (достаточные условия). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a; b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$

Пусть $f'(x) > 0$. Возьмем точки x_1 и x_2 из интервала $(a; b)$, причем $x_1 < x_2$. Применим к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $c \in (x_1; x_2)$. По условию $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ на интервале $(a; b)$ возрастает.

Рассмотренные теоремы позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность.

Пример Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на возрастание и убывание.

Решение: Функция определена на $\mathbb{R}=(-\infty;\infty)$. Ее производная равна:

$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1);$$

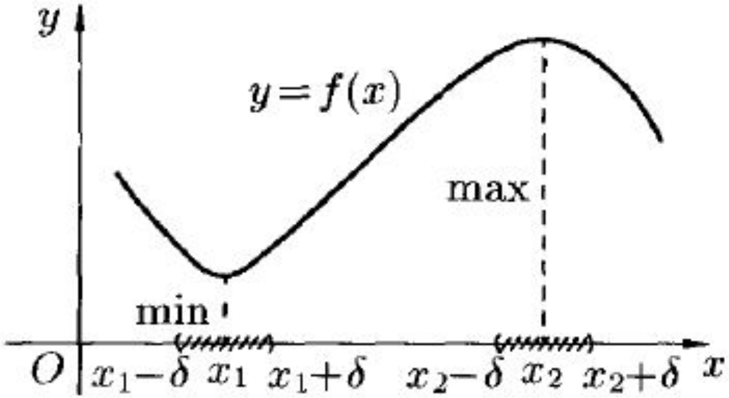
$$f'(x)>0 \quad \text{при} \quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty);$$

$$f'(x)<0 \quad \text{при} \quad x\in(-1;1).$$

Ответ: данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;\infty)$; убывает на интервале $(-1;1)$.

Максимум и минимум функций

Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.



Аналогично определяется точка минимума функции: x_0 — *точка минимума* функции, если $\exists\delta > 0$ $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > f(x_0)$.

На рисунке x_1 — точка минимума, а точка x_2 — точка максимума функции $y = f(x)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции.

Максимум (минимум) функции называется *экстремумом* функции.

Понятие экстремума всегда связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь *во внутренних точках* области определения. Рассмотрим условия существования экстремума функции.

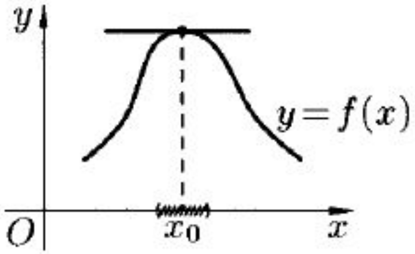
Теорема 3. (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$

Пусть, для определенности, x_0 — точка максимума. Значит, в окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$. Но тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, если $\Delta x > 0$, и $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, если $\Delta x < 0$.

По условию теореме производная $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

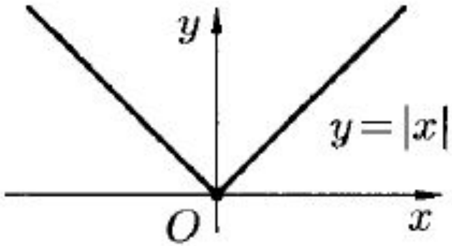
существует. Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x_0) \geqslant 0$, если $\Delta x < 0$, и $f'(x_0) \leqslant 0$, если $\Delta x > 0$. Поэтому $f'(x_0) = 0$. Аналогично доказывается утверждение теоремы, если x_0 — точка минимума функции $f(x)$.

Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox (см. рис.).



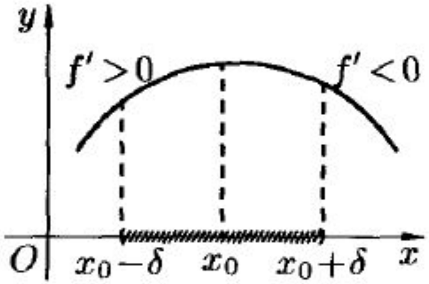
Отметим, что обратная теорема неверна, т. е. если $f'(x_0) = 0$, то это не значит, что x_0 — точка экстремума. Например, для функции

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ производной не имеет, но точка $x = 0$ — точка минимума

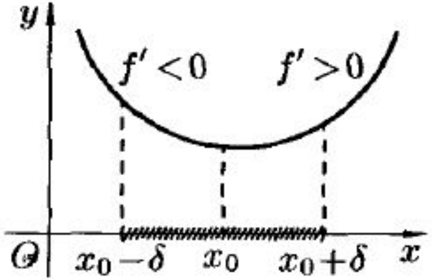


Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими***.

Теорема 4.(достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) *производная $f'(x)$ меняет знак* с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.



Рассмотрим δ-окрестность точки x_0. Пусть выполняются условия: $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$, а на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$ она убывает. Отсюда следует, что значение $f(x)$ в точке x_0 является наибольшим на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т. е. $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$. Это и означает, что x_0 — точка максимума функции.



Графическая интерпретация доказательства теоремы представлена на рисунке

Аналогично теорема доказывается для случая, когда $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$.

Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы.

Из теорем вытекает следующее правило исследования функции на экстремум:

1) найти критические точки функции $y = f(x)$;

2) выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;

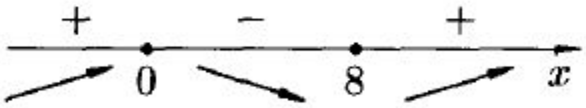
3) исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных критических точек;

4) в соответствии с теоремой (достаточное условие экстремума) выписать точки экстремума (если они есть) и вычислить значения функции в них.

***Пример*.** Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение: Очевидно, $D(y) = \mathbb{R}$. Находим $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$, т. е. $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$.

Производная не существует при $x_1 = 0$ и равна нулю при $x_2 = 8$. Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала $(-\infty; 0)$, $(0; 8)$, $(8; \infty)$. Отметим знаки производной слева и справа от каждой из критических точек.



Следовательно, $x_1 = 0$ — точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 0$, и $x_2 = 8$ — точка минимума, $y_{\min} = y(8) = -\frac{4}{3}$.

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Теорема 5. Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум — при $f''(x_0) > 0$

Пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Так как

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0,$$

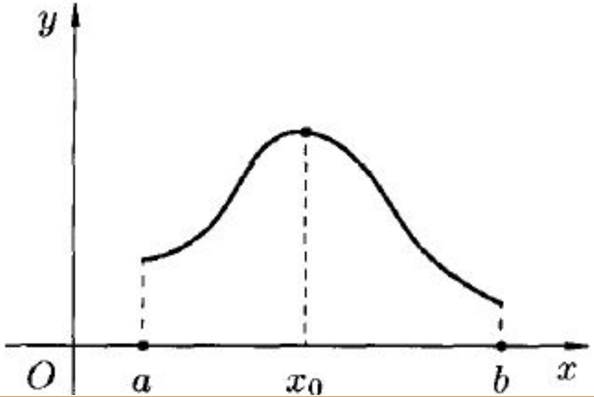
то $\dfrac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ в достаточно малой окрестности точки x_0. Если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$; если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$.

Таким образом, при переходе через точку x_0 первая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, x_0 есть точка минимума.

Аналогично доказывается, что если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция имеет максимум.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Как известно, такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, т. е. при $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции



Получаем следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на $[a; b]$:

1) найти критические точки функции на интервале $(a; b)$;

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$;

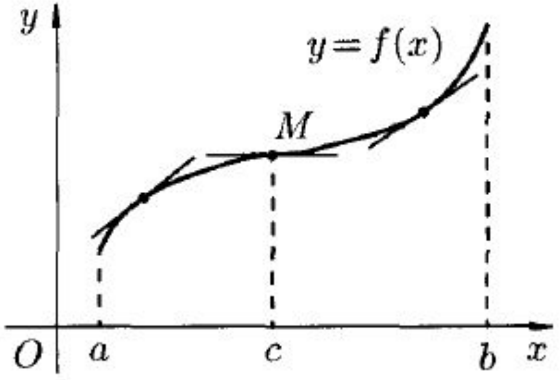
4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечания: 1. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет *лишь одну критическую точку* и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. На рисунке $f(x_0) = f_{\text{нб}} = f_{\max}$ (нб — наибольшее, max – максимальное).

2. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ не имеет критических точек, то это озачает, что на нем функция монотонно возрастает или убывает. Следовательно, свое наибольшее значение (M) функция принимает на одном конце отрезка, а наименьшее (m) — на другом.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

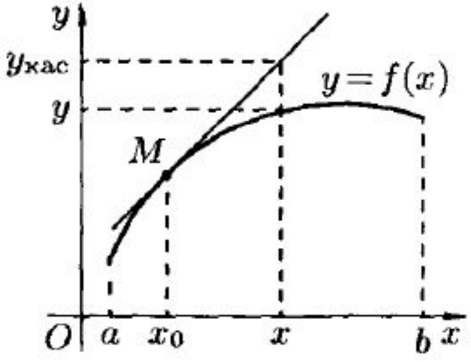


Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба.*

На рисунке кривая $y = f(x)$ выпукла вверх в интервале $(a; c)$, выпукла вниз в интервале $(c; b)$, точка $M(c; f(c))$ — точка перегиба.

Интервалы выпуклости вниз и вверх находят с помощью следующей теоремы.

Теорема 25.11. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$ имеет отрицательную вторую производную, т е $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх Если же $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a; b)$ — график выпуклый вниз



Пусть $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a; b)$. Возьмем на графике функции произвольную точку M с абсциссой $x_0 \in (a; b)$ и проведем через M касательную (см. рис.). Покажем, что график функции расположен ниже этой касательной. Для этого сравним в точке $x \in (a; b)$ ординату y кривой $y = f(x)$ с ординатой $y_{\text{кас}}$ ее касательной. Уравнение касательной, как известно, есть

$$y_{\text{кас}} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{т. е.} \quad y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда $y - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа, $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где c лежит между x_0 и x. Поэтому

$$y - y_{\text{кас}} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{т. е.} \quad y - y_{\text{кас}} = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0).$$

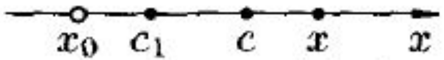
Разность $f'(c) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле Лагранжа:

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0), \quad \text{где } c_1 \text{ лежит между } x_0 \text{ и } c.$$

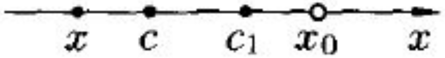
Таким образом, получаем $y - y_{\text{кас}} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0).$

Исследуем это равенство:

1) если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно,

$y - y_{\text{кас}} < 0$, т. е. $y < y_{\text{кас}}$: 

2) если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно,

$y - y_{\text{кас}} < 0$, т. е. $y < y_{\text{кас}}$: 

Итак, доказано, что во всех точках интервала $(a; b)$ ордината касательной больше ординаты графика, т. е. график функции выпуклый вверх.

Аналогично доказывается, что при $f''(x) > 0$ график выпуклый вниз.

Для нахождения точек перегиба графика функции используется следующая теорема.

Теорема 7 . (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Это значит, что слева от $x = x_0$ график выпуклый вверх, а справа — выпуклый вниз. Следовательно, точка $(x_0; f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

***Пример*.** Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

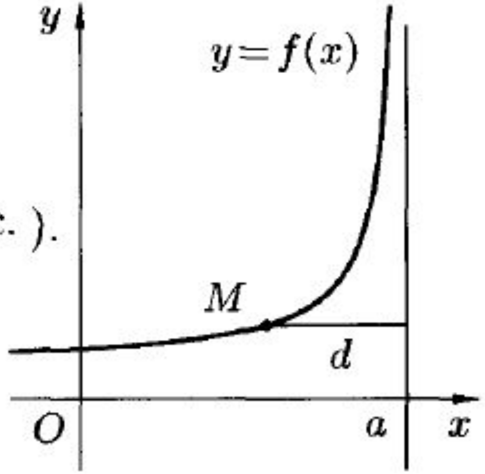
Решение: Находим, что $y' = 5x^4 - 1$, $y'' = 20x^3$. Вторая производная существует на всей числовой оси; $y'' = 0$ при $x = 0$.

Отмечаем, что $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty; 0)$ — выпуклый вверх, в интервале $(0; \infty)$ — выпуклый вниз. Точка $(0; 5)$ есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Построение графика функции значительно облегчается, если знать его асимптоты. Понятие асимптоты рассматривалось при изучении формы гиперболы



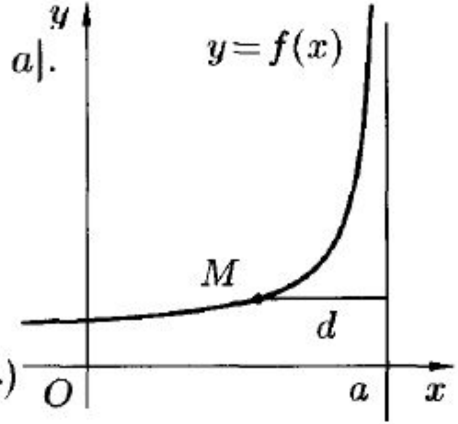
Напомним, что *асимптотой* кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой (рис.).

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$,

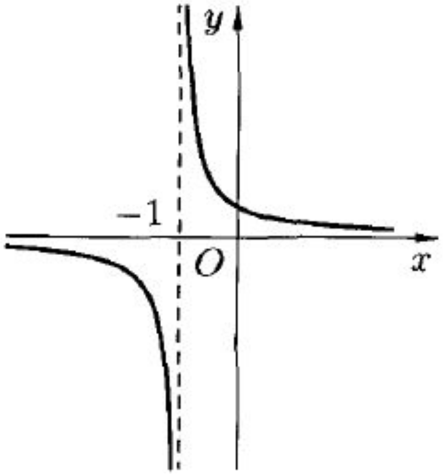
если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Действительно, в этом случае непосредственно из рисунка видно, что расстояние точки $M(x;y)$ кривой от прямой $x=a$ равно $d=|x-a|$. Если $x\to a$, то $d\to 0$. Согласно определению асимптоты, прямая $x=a$ является асимптотой кривой $y=f(x)$. Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения x, вблизи которых функция $f(x)$ неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва второго рода.



Например, кривая $y=\dfrac{2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту (см. рис.) $x=-1$, так как $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{2}{x+1}=+\infty$,

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{2}{x+1}=-\infty.$$



Пример 1. График функции $y=\frac{1}{x-2}$ имеет вертикальную асимптоту $x=2$. Действительно,

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty \text{ и } \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty.$$

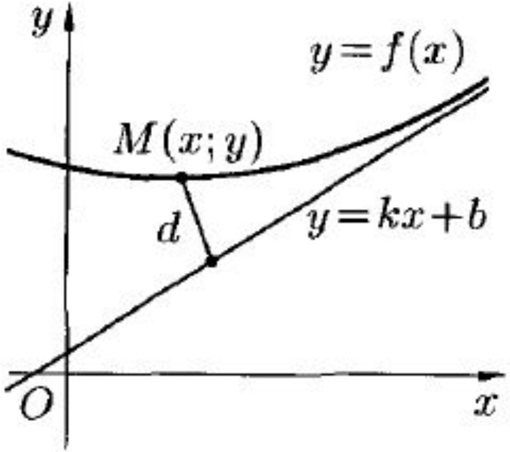
График функции имеет *горизонтальную асимптоту* $y=b$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из пределов

$$\lim f(x) \text{ или } \lim f(x) \text{ равен } b.$$

Пример 2. График функции $y=\operatorname{arctg}x$ имеет горизонтальные асимптоты $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=-\frac{\pi}{2}$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$.

Уравнение *наклонной асимптоты* будем искать в виде $y = kx + b$.

Найдем k и b.



Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка кривой $y = f(x)$

По формуле расстояния от точки до прямой

$$\left(d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|\right)$$

находим расстояние от точки M

до прямой : $d = \left|\frac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}}\right|$.

Условие $d \to 0$ будет выполняться

лишь тогда, когда числитель дроби стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{x \to \infty} (kx - y + b) = 0.$$

Отсюда следует, что $kx - y + b = \alpha$, где $\alpha = \alpha(x)$ бесконечно малая: $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. Разделив обе части равенства $y = b + kx - \alpha$ на x и перейдя к пределу при $x \to \infty$, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{b}{x} + k - \frac{\alpha}{x}\right).$$

Так как $\frac{b}{x} \to 0$ и $\frac{\alpha}{x} \to 0$, то

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x}.} \qquad \boxed{b = \lim_{x\to\infty} (y - kx).}$$

Итак, если существует наклонная асимптота $y = kx + b$, то k и b находятся по формулам

Верно и обратное утверждение: если существуют конечные пределы

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x}.}, \qquad \boxed{b = \lim_{x\to\infty} (y - kx).}$$

то прямая $y = kx + b$, является наклонной асимптотой.

Если хотя бы один из пределов $\boxed{k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x}.}$ или $\boxed{b = \lim\limits_{x\to\infty} (y - kx).}$

не существует или равен бесконечности, то кривая $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Поэтому $y = b$ — уравнение *горизонтальной асимптоты.*

Замечание: Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x}.} \qquad \text{и} \qquad \boxed{b = \lim_{x\to\infty} (y - kx).}$$

следует отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = xe^x$.

Решение: Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, то график функции при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не имеет.

При $x \to -\infty$ справедливы соотношения $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,

$$b = \lim_{x\to-\infty}(xe^x - 0x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

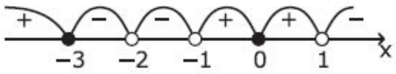
Пример 1. Построить график функции с минимальным использованием математического аппарата:

$$f(x)=\frac{4x^5+12x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}.$$

Решение. Минимальное использование математического аппарата предполагает построение функции, не используя производные:

1) функция определена при $x\neq-2$; $x\neq\pm1$.

2) $f(x)\to\infty$ при $x\to-2$; $x\to\pm1$. Значит прямые $x=-2$; $x=\pm1$ являются вертикальными асимптотами графика функции.



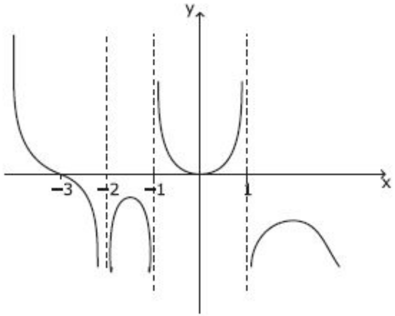
3) нули функции: $x=0$, $x=-3$, знаки функции найдем методом интервалов

4) исследуем поведение функции при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^5+12x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5+12x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}=-\infty;$$

5) для построения графика функции следует отметить на оси Ox нули функции $x=0$, $x=-3$, построить вертикальные асимптоты $x=-2$; $x=\pm1$; учитывая знаки и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\mp\infty$, построить график



Пример 2. Исследовать функцию и построить её график:

$$y=\frac{x^3+4}{x^2}.$$

Решение.

1) область определения функции $D(x)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

2) функция общего вида (не является четной или нечетной)

$$y(-x)=\frac{-x^3+4}{x^2}\neq\pm y(x);$$

3) функция не является периодической;

4) найдем асимптоты

а) точка разрыва $x=0$, причем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2}=\infty,$$

следовательно, $x=0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой графика;

б) найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=$$

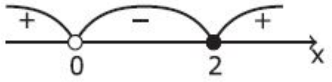
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Наклонная асимптота имеет уравнение $y=x$.

5) найдем экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания:

$$y'=\left(x+\frac{4}{x^2}\right)'=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3};$$

$y'=0$ при $x=2$; при $x=0$ y' не существует.



Точки $x=0$ и $x=2$ разбивают область определения функции на промежутки $(-\infty;0),(0;2),(2;+\infty)$. Определим знак производной методом интервалов и в зависимости от него возрастание или убывание функции.

Результаты исследования представим в виде таблицы.

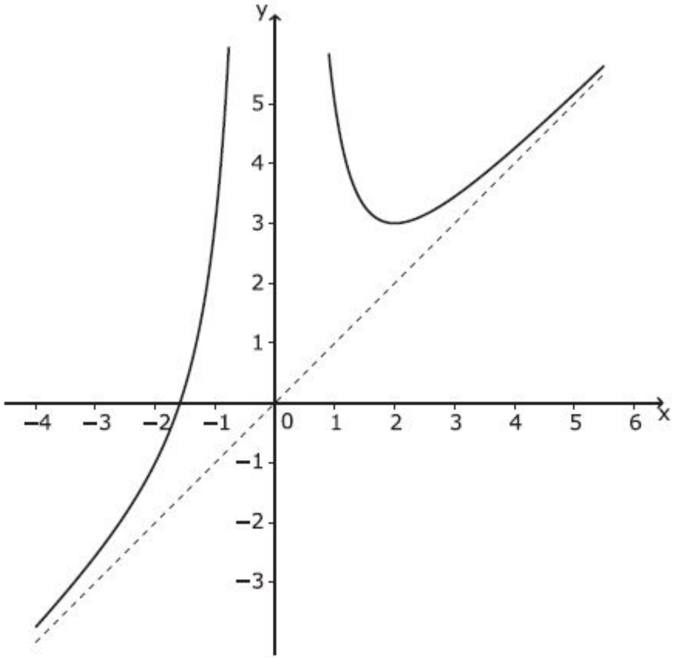
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	∞	–	0	+
y	↗	∞	↘	$3_{\min}$	↗

6) найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки его перегиба. Так как $y'' = \dfrac{24}{x^4} > 0$, то график всюду вогнут. Точек перегиба график функции не имеет;

7) найдем точки пересечения графика с осью Ox:

$$\frac{x^3+4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{4}.$$

Используя полученные данные, строим график функции



Пример 3:

Исследовать и построить график функции $y = 11 + 9x - 3x^2 - x^3$

1. Функция определена всюду, т.е. область определения $(-\infty;+\infty)$
2. Фvнкшия общего вида
3. Вертикальные асимптоты. Т.к. нет особенностей в области определения, то функция вертикальных асимптот не имеет.
4. Асимптоты $y = kx + b$. Т.к. функция представляет собой многочлен, то ни наклонных, ни горизонтальных асимптот нет
5. Интервалы монотонности и точки экстремумов.

   а). Найдем производную:

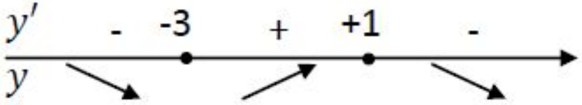
   $$y' = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)' = 9 - 6x - 3x^2 = -3(x^2 + 2x - 3)$$

   $$y' = 0; \qquad x^2 + 2x - 3 = 0;$$

б). Найдем критические точки: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2;$

$x_1 = -3; \quad x_2 = +1.$

в).



y убывает на $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty);$

y возрастает на $(-3; 1).$

$y(1) = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)|_1 = (11 + 9 - 3 - 1) = 16$ максимум;

$y(-3) = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)|_{-3} = -16$ мининум.

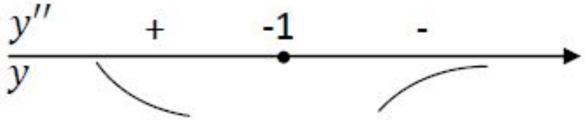
6. Интервалы выпуклости вогнутости, точки перегиба.

а). Найдем $y'' = (9 - 6x - 3x^2)' = -6 - 6x = -6(x + 1).$

б). Найдем критические точки 2-го рода:

$y'' = 0; \quad x + 1 = 0; \quad x = -1.$

в).



y вогнута на $(-\infty; -1);$

y выпукла на $(-1; +\infty).$

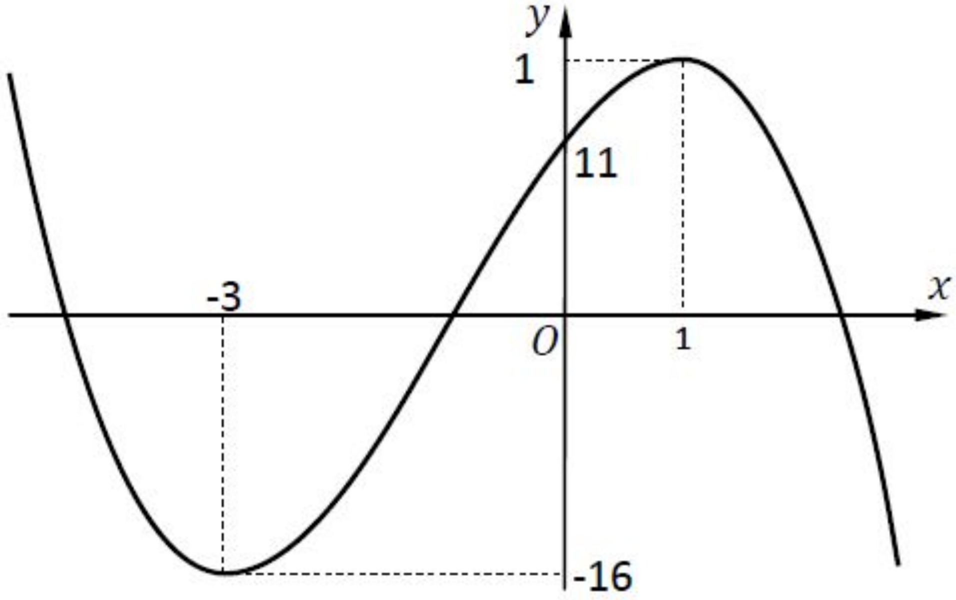
В точке $x = -1$ имеется перегиб

7. Точки пересечения с осью $0x$ найти не можем (сложно)

$$11 + 9x - 3x^2 - x^3 = 0.$$

Точка пересечения с осью $0y$:

$$y(0) = (11 + 9x - 3x^2 - x^3)|_{x=0} = 11.$$



Из графика видно, что функция 3 раза пересекает ось X.

Пример 4. Исследовать и построить график функции $y = \frac{3x}{x-1} + 3x$

Решение:

Функция определена и непрерывна на числовой оси, кроме точки x=1. Функция нечетная, т.к $f(-x) = f(x)$. Прямая x=1 является вертикальной асимптотой, т.к.

$lim_{x\to\pm\infty} (\frac{3x}{x-1} + 3x) = +\infty$ $lim_{x\to\pm\infty}(\frac{3x}{x-1} \qquad) = -\infty$

Находим наклонную асимптоту:

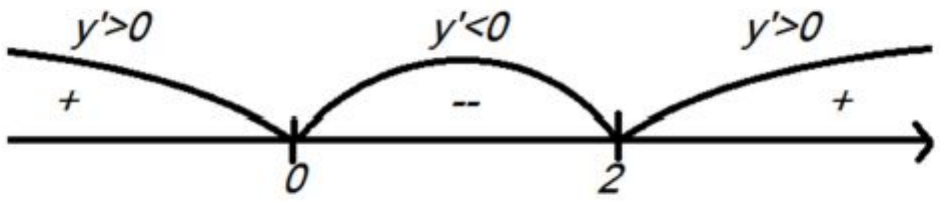
$к = lim_{x\to\pm\infty} [(\frac{3x}{x-1} + 3x): x] = 3$; $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (\frac{3x}{x-1}+3x-3x) = 3$,

следовательно, прямая y=3x+3 является наклонной асимптотой.

Находим первую производную:

$y'=\frac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2}+3=-\frac{3}{(x-1)^2}+3$ $y'=0 \Rightarrow -\frac{3}{(x-1)^2}+3=0 \Rightarrow \frac{3-3(x-1)^2}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow 3-3\,(x-1)^2=0$ $\Rightarrow 3-3x^2+6x-3=0 \Rightarrow 3x(2-x)=0$. Следовательно: $x=0$, $x=2$.

Располагаем значения $x=0$ и $x=2$ на числовой оси.



Для каждого промежутка определяем знак первой производной:

На промежутках $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ – функция возрастает, т.к. $y'>0$.

На промежутке $(0;\ 2)$ – функция убывает, т.к. $y'<0$; этот промежуток содержит значение $x=1$, при котором функция имеет разрыв. При $x=0$, функция имеет максимум, при $x=2$ – минимум. Исследуем вторую производную:

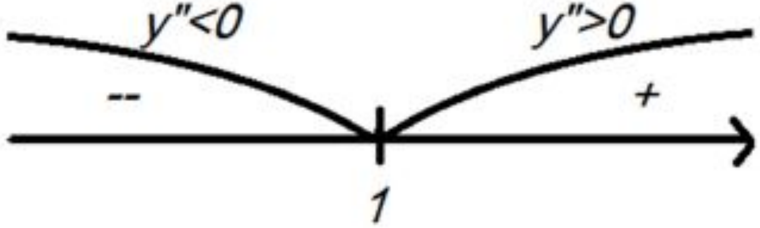
$y'' = \left(-\frac{3}{(x-1)^2} + 3\right)' = \frac{3*2(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{6}{(x-1)^3}$.

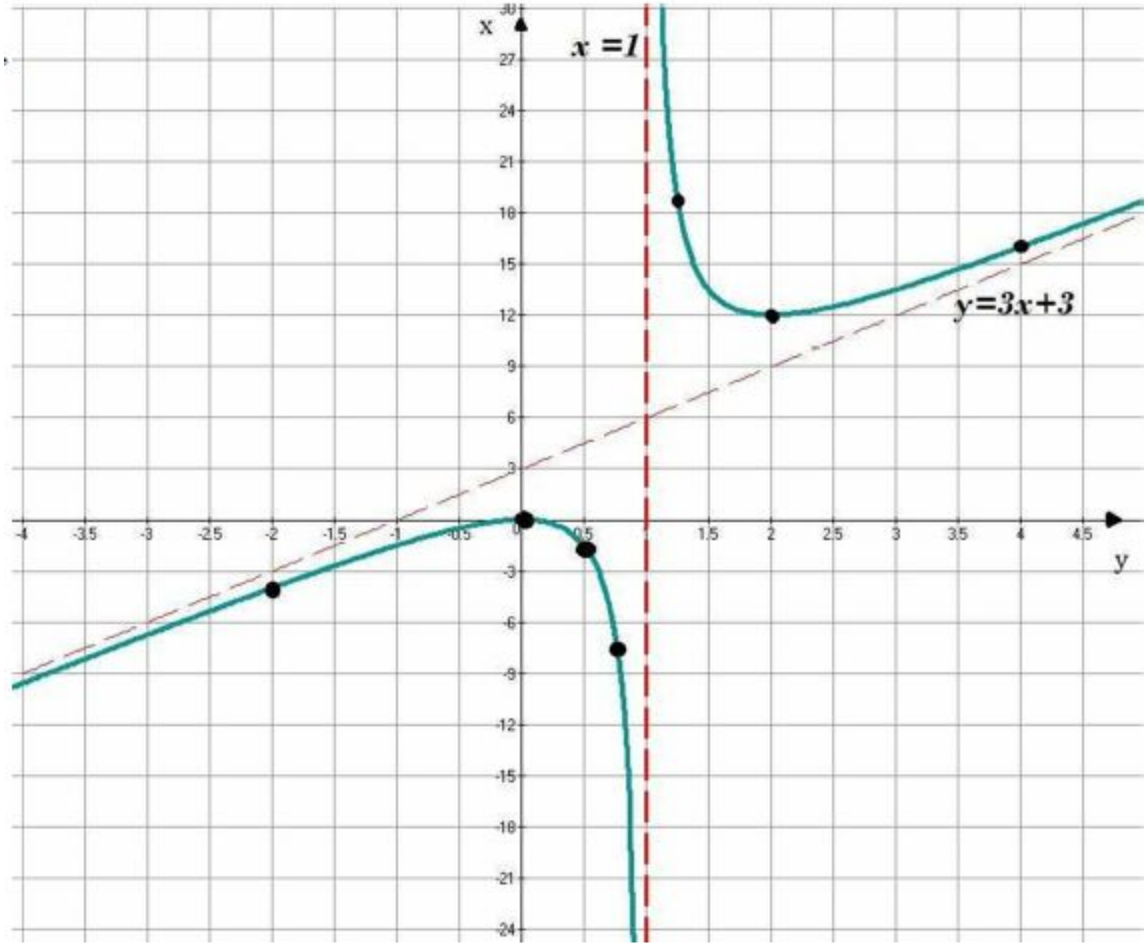
$y''=0 \Rightarrow \frac{6}{(x-1)^3}=0$, но данное выражение не может быть равно 0, т.е. $\frac{6}{(x-1)^3}$ не равно 0, следовательно функция не имеет точки перегиба.

На выпуклость и вогнутость функцию определяем относительно точки разрыва x=1. Расположим ее на числовой оси:

Для каждого промежутка определяем знак второй производной:

На промежутке (-∞;1) функция выпуклая, т.к. y''<0, на промежутке (1;+∞) функция вогнутая, т.к. y''>0.




x =1
y=3x+3
x
y

Упражнения для самостоятельной подготовки

Исследовать функцию и построить её график:

а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$; в) $y=e^{2x-x^2}$;

г) $y=3\sqrt[3]{x}-x$; д) $y=\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$; е) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

ж) $y=\sin^2 x$; з) $y=16x\cdot(x-1)^3$; и) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$.

Формула Тейлора

Функция $f(x)$, дифференцируемая $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку x_0, может быть представлена в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена r_n:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n$$

— *формула Тейлора*.

Остаточный член формулы Тейлора может быть записан *в форме Пеано*: $r_n = o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$, где $o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ — бесконечно малая функция более высокого порядка, чем $\left(x-x_0\right)^n$.

Если в окрестности точки $x = x_0$ существует $f^{(n+1)}(x)$, то остаточный член можно записать в форме Лагранжа:

$$r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}, \xi = x_0 + \theta\left(x-x_0\right), 0<\theta<1,$$

(т. е. ξ лежит между точками x_0 и x).

Если $x_0 = 0$, то получим *формулу Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + r_n,$$

где $r_n = \dfrac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, 0<\theta<1.$

Приведем разложение некоторых функций по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n,\ r_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1\ .$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m},$$

$$r_{2m} = (-1)^m \cos(\theta x)\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},\ 0 < \theta < 1,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + r_{2m+1},$$

$$r_{2m+1} = (-1)^{m+1}\cos(\theta x)\cdot\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}, 0 < \theta < 1;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{3!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{(n)!}x^n + r_n,$$

$$r_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}, 0 < \theta < 1.$$

Пример 1. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до $0,0001$.

Решение. По формуле Маклорена имеем:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n,\ r_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Полагая $x = \dfrac{1}{2}$, получим:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + r_n,$$

где $r_n = \dfrac{e^{\frac{\theta}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

Так как, $0 < \theta < 1$, $0 < e < 3$, то $r_n = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}(n+1)!}$, но $e^{\frac{1}{2}} < 2$, поэтому $r_n < \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.

Требуется определить n так, чтобы выполнялось неравенство $r_n < 0,0001$:

$$n = 3 \Rightarrow r_3 < \frac{1}{8 \cdot 24},\ r_3 < \frac{1}{192};$$

$$n = 4 \Rightarrow r_3 < \frac{1}{16 \cdot 120}, \qquad r_3 < \frac{1}{1920};$$

$$n = 5 \Rightarrow r_5 < \frac{1}{32 \cdot 720},\ r_3 < 0,0001.$$

Для определения $\sqrt{e}$ с точностью до $0,0001$ получаем приближенное равенство

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} + \frac{1}{2^5 \cdot 5!} \approx 1,6487.$$

Пример 2. Представить функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в виде многочлена пятой степени относительно двучлена $(x-1)$.

Решение.

Вычислим значения функции $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ и ее производных до пятого порядка включительно при $x_0=1$:

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}},\quad f(1)=1;$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}},\quad f'(1)=\frac{1}{3};$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot x^{-\frac{5}{3}},\ f'(1)=-\frac{2}{9};$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}\cdot x^{-\frac{8}{3}},\quad f'''(1)=\frac{10}{27};$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{80}{81}\cdot x^{-\frac{11}{3}},\quad f^{IV}(1)=-\frac{80}{81};$$

$$f^{V}(x)=\frac{880}{243}\cdot x^{-\frac{14}{3}},\qquad f^{V}(1)=\frac{880}{243}.$$

Следовательно, по формуле Тейлора получим

$$\sqrt[3]{x}=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3-$$

$$-\frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-1)^5+r_5,$$

где $r_5=\dfrac{f^{IV}(\xi)}{6!}(x-1)^6=-\dfrac{12320}{729\cdot 6!}\xi^{-\frac{17}{3}}(x-1)^6,\ 1<\xi<x.$

Пример 3. Представить функцию $f(x)=a^x\ (a>0)$ в виде многочлена третьей степени относительно x.

Решение.

$$f(x)=a^x,\quad f(0)=1;$$

$$f'(x)=a^x\ln a,\quad f'(0)=\ln a;$$

$$f''(x)=a^x\ln^2 a,\quad f''(0)=\ln^2 a;$$

$$f'''(x)=a^x\ln^3 a,\quad f'''(x)=\ln^3 a;$$

$$f^{IV}(x)=a^x\ln^4 a,\quad f^{IV}(x)=\ln^4 a\cdot a^{\theta x}.$$

По формуле Маклорена получаем

$$a^x=1+x\cdot\ln a+\frac{x^2\cdot\ln^2 a}{2!}+\frac{x^3\cdot\ln^3 a}{3!}+r_3,$$

где $r_3=\dfrac{x^4\cdot\ln^4 a}{4!}\cdot a^{\theta x}$.

Пример 4. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^3}.$$

Решение. Так как знаменатель равен x^3, то достаточно найти разложение числителя до $o(x^3)$. Поэтому для первого слагаемого воспользуемся разложением

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Положим $n=1$, $\alpha=\frac{1}{3}$, заменим x на $(-x^2)$ и учтем, что $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$. Тогда

$$\sin x - x\cdot\sqrt[3]{1-x^2} = \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}x^3+o(x^3),$$

$$\frac{\sin x - x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^3}=\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^3}=\frac{1}{2},\ \left(\text{т. к. }\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0\right).$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Вычислить с точностью до 10^{-3}:

а) $\cos 41^\circ$; б) $\sqrt[3]{121}$; в) $\sqrt[3]{e}$; г) $\sqrt[7]{129}$; д) $\sin 36^\circ$.

2. Представить в виде многочлена третьей степени относительно $(x-x_0)$, где $x \neq 0$, функцию $\dfrac{1}{x}$.

3. Разложить функцию $f(x)=x^3-2x^2+3x+5$ по степеням $(x-2)$.

4. Вычислить предел с помощью формулы Тейлора:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cdot\sin x - x\cdot(x+1)}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}, (a>0)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.