Полный факторный эксперимент (ПФЭ)

Полный факторный эксперимент применяется в тех случаях, когда есть предположение, что технологических процесс в исследуемой области определения факторов может быть достаточно точно описан линейными уравнениями вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^k b_{ij} x_i x_j$$

ПФЭ — это эксперимент, в котором реализуют все возможные сочетания рассматриваемых уровней варьирования факторов.

Причем факторы варьируют на двух уровнях: min -1, max +1.

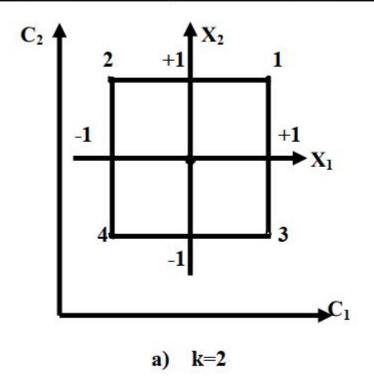
Число опытов составляет

$$N=2^k$$

где k – количество факторов.

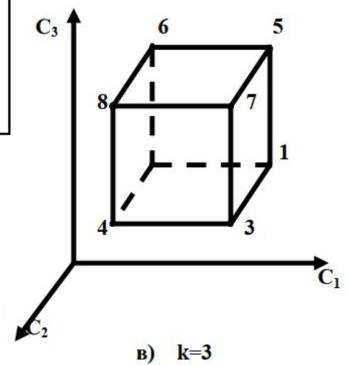
Матрица планирования эксперимента 2²

Номер опыта	\mathbf{x}_1	\mathbf{X}_{2}	y
1	+1	+1	\mathbf{y}_1
2	-1	+1	\mathbf{y}_2
3	+1	-1	y ₃
4	-1	-1	\mathbf{y}_4



Матрица планирования эксперимента 2³

Номер опыта	X ₁	X ₂	X ₃	у
1	+	+	+	y ₁
2	-	+	+	y ₂
3	+	-	+	y ₃
4	-	-	+	y ₄
5	+	+	-	y ₅
6	~	+	_	y ₆
7	+	1 -	-	y ₇
8	(-	-	-	y ₈



Матрица эксперимента составляется таким образом, чтобы реализовались всевозможные комбинации значений факторов.

При составлении матрицы плана, как правило, сначала используют кодированные значения факторов, а затем переходят к натуральным значениям факторов.

$$x_i = \frac{c_i - c_{oi}}{3} \qquad c_i = c_{oi} - x_i 3$$

где C_{oi} и C_{i} — натуральные значения факторов на НУ и текущее значение соответственно;

- x_i кодированное значение фактора (-1; 0; 1);
- _ интервал варьирования в натуральном выражении фактора, т.е. ∆с в физических единицах (м, МПа и т.п.).

Расчет коэффициентов уравнения регрессии

Построив матрицу планирования, осуществляют эксперимент. Получив экспериментальные данные, рассчитывают значения коэффициентов регрессии.

Значение свободного члена (во) берут как среднее арифметическое всех значений параметра оптимизации в матрице:

a)
$$s_o = \frac{\sum_{1}^{N} y_u}{N}$$

где y_u — значения параметра оптимизации в u-м опыте; N — число опытов в матрице.

Линейные коэффициенты (ві) регрессии рассчитывают по формуле

$$\theta_i = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{iu} y_u}{N},$$

где xiu — кодированное значение фактора xi в u-м опыте.

Коэффициенты регрессии, характеризующие парное взаимодействие факторов, находят по формуле

$$\boldsymbol{s}_{ij} = \frac{\sum_{i} x_{iu} x_{ju} y_{u}}{N}$$

Таким образом, коэффициент \mathbf{b}_0 (а) рассчитывается усреднением всех значений показателя качества (КО).

Коэффициенты b_i (б) — это произведение значений фактора на значения показателей качества, а также усредненное деление на количество строк плана эксперимента N.

Соответственно коэффициенты при парных взаимодействиях $b_{ij}(B)$ – это усредненные значения произведений факторов и показателей качества.

При расчете коэффициентов в электронных таблицах Excel используется функция *ЛИНЕЙН*.

Расчет коэффициентов уравнения регрессии можно проводить как для кодированных значений фактора, так и для значений в натуральном выражении, т.е. в приведенных формулах а), б), в) в качестве \mathbf{x}_{iu} и \mathbf{x}_{ju} можно подставлять либо -1 и +1, либо натуральные значения факторов.

При этом если расчет выполнен для *кодированных значений* факторов, то по величине и знаку коэффициента можно судить о степени и характере влияния каждого фактора на показатель качества.

Определение статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии

Методика оценки значимости заключается в следующем: коэффициент уравнения регрессии <u>значим</u>, если его абсолютная величина больше половины доверительного интервала, т.е. больше погрешности в оценке значения критерия оптимизации (показателя качества).

Величина доверительного интервала (погрешность в оценке показателя) равна:

 $\Delta b_i = \frac{t_{\alpha n} S_{\{y\}}}{\sqrt{Nn}}$

где $t_{\alpha n}$ — табличное значение критерия Стьюдента; Nn — число строк плана эксперимента и число параллельных опытов соответственно;

√у – стандартное отклонение воспроизводимости.

Пример:

При реализации полного факторного эксперимента: N = 8; k = 3; n = 3 было получено уравнение регрессии

$$y = 85,98 + 2,6 x_1 + 0,54 x_2 + 1,13 x_3 - 0,22 x_1 x_2 + 0,96 x_1 x_3 - 0,31 x_2 x_3$$

Дисперсия воспроизводимости составляет 0,65. Оценить значимость коэффициентов.

Определяем значение критерия Стьюдента при доверительной вероятности $\alpha = 0.95$.

Определяем значение числа степеней свободы

$$f = N (n-1) = 8 (3-1) = 16$$

Для $\alpha = 0.95$ и f = 16 табличное значение критерия Стьюдента равно $t_{\alpha n} = 2.16$.

Тогда погрешность в оценке показателя качества составит:

$$\Delta b_i = \frac{t_{\alpha n} S_{\{y\}}}{\sqrt{Nn}} = \pm \frac{2,16 \cdot \sqrt{0,65}}{\sqrt{8 \cdot 3}} = \pm 0,355$$