

Полный факторный эксперимент (ПФЭ)

Полный факторный эксперимент применяется в тех случаях, когда есть предположение, что технологический процесс в исследуемой области определения факторов может быть достаточно точно описан линейными уравнениями вида

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^k b_{ij} x_i x_j$$

ПФЭ – это эксперимент, в котором реализуют все возможные сочетания рассматриваемых уровней варьирования факторов.

Причем факторы варьируют на двух уровнях: min -1, max +1.

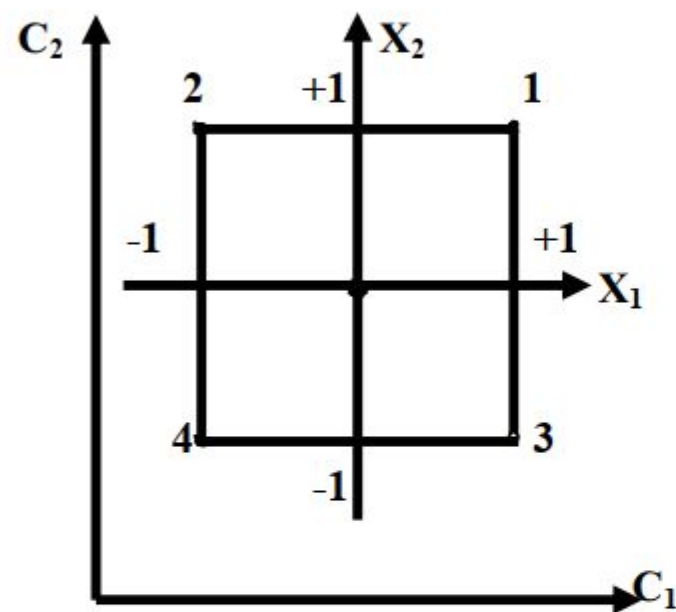
Число опытов составляет

$$N = 2^k$$

где k – количество факторов.

Матрица планирования эксперимента 2^2

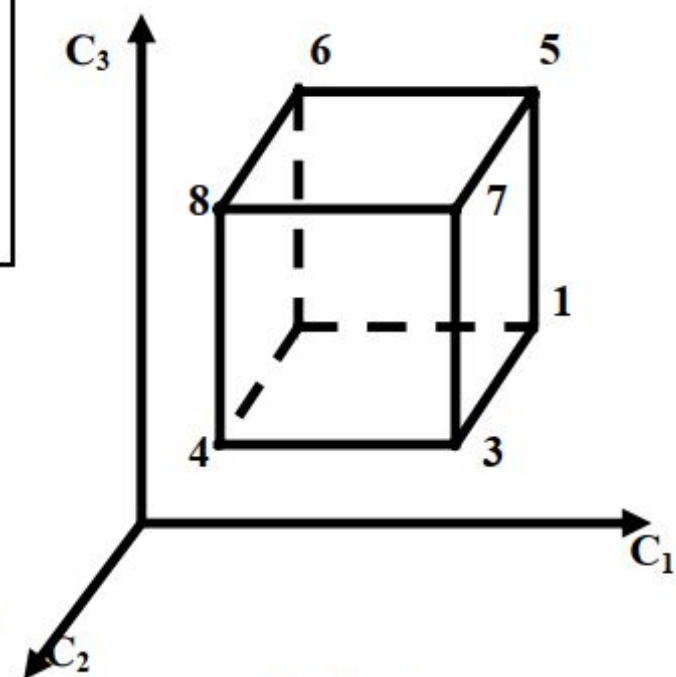
Номер опыта	X_1	X_2	y
1	+1	+1	y_1
2	-1	+1	y_2
3	+1	-1	y_3
4	-1	-1	y_4



a) $k=2$

Матрица планирования эксперимента 2^3

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	y
1	+	+	+	y_1
2	-	+	+	y_2
3	+	-	+	y_3
4	-	-	+	y_4
5	+	+	-	y_5
6	-	+	-	y_6
7	+	-	-	y_7
8	-	-	-	y_8



в) $k=3$

Матрица эксперимента составляется таким образом, чтобы реализовались всевозможные комбинации значений факторов.

При составлении матрицы плана, как правило, сначала используют кодированные значения факторов, а затем переходят к натуральным значениям факторов.

$$x_i = \frac{C_i - C_{oi}}{\zeta}$$

$$C_i = C_{oi} - x_i \zeta$$

где C_{oi} и C_i – натуральные значения факторов на НУ и текущее значение соответственно;

x_i – кодированное значение фактора (-1; 0; 1);

ζ – интервал варьирования в натуральном выражении фактора, т.е. Δc в физических единицах (м, МПа и т.п.).

Расчет коэффициентов уравнения регрессии

Построив матрицу планирования, осуществляют эксперимент. Получив экспериментальные данные, рассчитывают значения коэффициентов регрессии.

Значение свободного члена (θ_0) берут как среднее арифметическое всех значений параметра оптимизации в матрице:

$$\text{a) } \theta_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N},$$

где y_i – значения параметра оптимизации в i -м опыте; N – число опытов в матрице.

Линейные коэффициенты (β_i) регрессии рассчитывают по формуле

$$\text{б) } \beta_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{N},$$

где x_{iu} – кодированное значение фактора x_i в u -м опыте.

Коэффициенты регрессии, характеризующие парное взаимодействие факторов, находят по формуле

$$\text{в) } \beta_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} y_u}{N}$$

Таким образом, коэффициент b_0 (а) рассчитывается усреднением всех значений показателя качества (КО).

Коэффициенты b_i (б) – это произведение значений фактора на значения показателей качества, а также усредненное деление на количество строк плана эксперимента N.

Соответственно коэффициенты при парных взаимодействиях b_{ij} (в) – это усредненные значения произведений факторов и показателей качества.

При расчете коэффициентов в электронных таблицах Excel используется функция **ЛИНЕЙН**.

Расчет коэффициентов уравнения регрессии можно проводить как для кодированных значений фактора, так и для значений в натуральном выражении, т.е. в приведенных формулах **а), б), в)** в качестве x_{iu} и x_{ju} можно подставлять либо -1 и +1, либо натуральные значения факторов.

При этом если расчет выполнен для **кодированных значений факторов**, то по величине и знаку коэффициента можно судить о степени и характере влияния каждого фактора на показатель качества.

Определение *статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии*

Методика оценки значимости заключается в следующем: коэффициент уравнения регрессии ***значим***, если его абсолютная величина больше половины доверительного интервала, т.е. больше погрешности в оценке значения критерия оптимизации (показателя качества).

Величина доверительного интервала (погрешность в оценке показателя) равна:

$$\Delta b_i = \frac{t_{\alpha n} S_{\{y\}}}{\sqrt{Nn}}$$

где $t_{\alpha n}$ – табличное значение критерия Стьюдента;

Nn – число строк плана эксперимента и число параллельных опытов соответственно;

$S_{\{y\}}$ – стандартное отклонение воспроизводимости.

$$S_{\{y\}} = \sqrt{S_y^2}$$

Пример:

При реализации полного факторного эксперимента: $N = 8$; $k = 3$; $n = 3$ было получено уравнение регрессии

$$y = 85,98 + 2,6 x_1 + 0,54 x_2 + 1,13 x_3 - 0,22 x_1 x_2 + 0,96 x_1 x_3 - 0,31 x_2 x_3$$

Дисперсия воспроизводимости составляет 0,65. Оценить значимость коэффициентов.

Определяем значение критерия Стьюдента при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$.

Определяем значение числа степеней свободы

$$f = N(n-1) = 8(3-1) = 16$$

Для $\alpha = 0,95$ и $f = 16$ табличное значение критерия Стьюдента равно

$$t_{\alpha n} = 2,16.$$

Тогда погрешность в оценке показателя качества составит:

$$\Delta b_i = \frac{t_{\alpha n} S_{\{y\}}}{\sqrt{Nn}} = \pm \frac{2,16 \cdot \sqrt{0,65}}{\sqrt{8 \cdot 3}} = \pm 0,355$$