МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

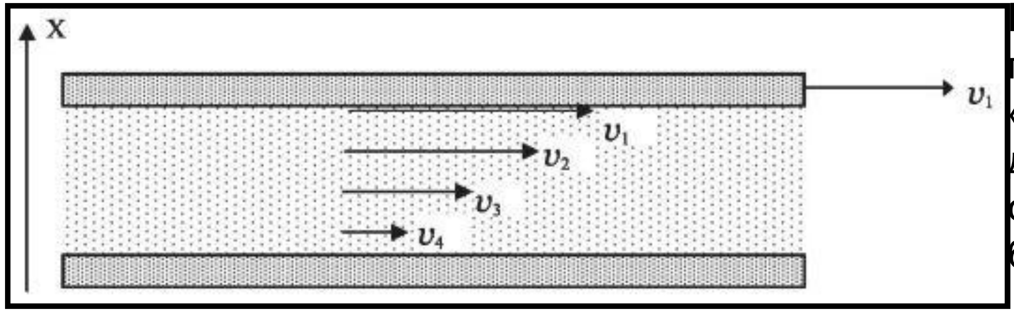
САЛОМАТИНА Е.А.

ВЯЗКОСТЬ ЖИДКОСТИ

- внутреннее трение. Уравнение Ньютона
- ньютоновские и неньютоновские жидкости
- ламинарное и турбулентное движение
- гидравлическое сопротивление
- Методы определения вязкости

1. Внутреннее трение (вязкость) жидкости. Уравнение ньютона

В реальной жидкости вследствие взаимного притяжения и теплового движения молекул имеет место внутреннее трение, или вязкость. Рассмотрим это явление на следующем опыте. (Течение вязкой жидкости между пластинами)



Поместим слой жидкости между двумя параллельными твердыми пластинами. «Нижняя» пластина закреплена. Если двигать «верхнюю» пластину с постоянной скоростью v1, то с такой же скоростью будет двигаться самый «верхний» 1-й слой жидкости, который считаем «прилипшим» к верхней пластине. Этот слой влияет на нижележащий непосредственно под ним 2-й слой, заставляя его двигаться со скоростью v2, причем v2 < v1. Каждый слой (выделим n слоев) передает движение нижележащему слою с меньшей скоростью. Слой, непосредственно «прилипший» к «нижней» пластине, остается неподвижным.Слои взаимодействуют друг с другом: n-й слой ускоряет (n+1)-й слой, но замедляет (n-1)-й слой. Таким образом, наблюдается изменение скорости течения жидкости в направлении, перпендикулярном поверхности слоя (ось x). Такое изменение характеризуют производной dv/dx, которую называют **градиентом скорости**.

Силы, действующие между слоями и направленные по касательной к поверхности слоев, называются **силами внутреннего трения** или **вязкости**. Эти силы пропорциональны площади взаимодействующих слоев S и градиенту скорости. Для многих жидкостей силы внутреннего трения подчиняются **уравнению Ньютона**:

$$F_{mp}=\eta\frac{\partial v}{\partial x}S,\ \eta=const.$$

Коэффициент пропорциональности **η** называют коэффициентом внутреннего трения или **динамической вязкостью**.

2. Ньютоновское и неньютоновские жидкости. Кровь

Жидкость, которая подчиняется уравнению, называют **ньютоновской**. Коэффициент внутреннего трения ньютоновской жидкости зависит от ее строения, температуры и давления, но не зависит от градиента скорости.

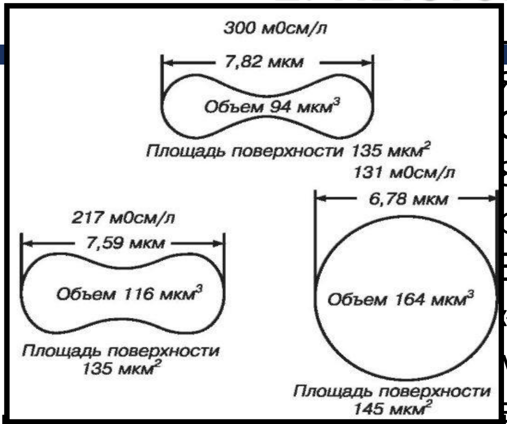
Ньютоновская жидкость - жидкость, вязкость которой не зависит от градиента скорости. Свойствами ньютоновской жидкости обладают большинство жидкостей (вода, растворы, низкомолекулярные органические жидкости) и все газы.Вязкость определяется с помощью специальных приборов - вискозиметров. Значения коэффициента вязкости **η** для некоторых жидкостей представлены в таблице.

Вещество	Воздух	Вода		Глицерин	Кровь	Плазма
Температура, °С	20	20	100	20	36	36
η [Па·с]	$1{,}8\times10^{-5}$	1×10^{-3}	$0{,}3\times10^{-3}$	$1{,}5\times10^{-3}$	$4-6\times10^{-3}$	$1{,}5\times10^{-3}$

Значение вязкости крови, представленное в таблице, относится к здоровому человеку в спокойном состоянии. При тяжелой физической работе вязкость крови увеличивается. На величину вязкости крови влияют и некоторые заболевания. Так, при сахарном диабете вязкость крови увеличивается до 23×10 Пас, а при туберкулезе уменьшается до 1×10^{-3} Пас. Вязкость сказывается на таком клиническом параметре, как скорость оседания эритроцитов (СОЭ).

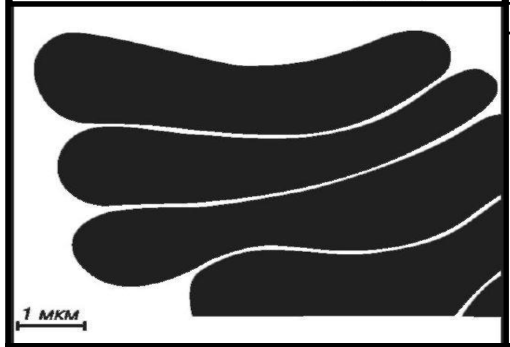
Неньютоновская жидкость - жидкость, вязкость которой зависит от градиента скорости. Свойствами неньютоновской жидкости обладают структурированные дисперсные системы (суспензии, эмульсии), растворы и расплавы некоторых полимеров, многие органические жидкости и др.При прочих равных условиях вязкость таких жидкостей значительно больше, чем у ньютоновских жидкостей. Это связано с тем, что благодаря сцеплению молекул или частиц в неньютоновской жидкости образуются пространственные структуры, на разрушение которых затрачивается дополнительная энергия.

2. Ньютоновское и неньютоновские жидкости.

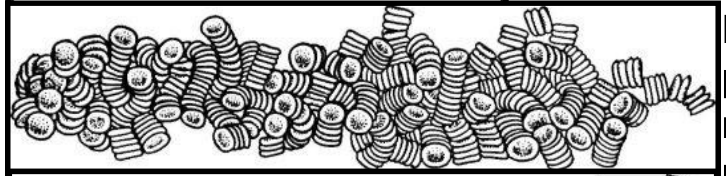


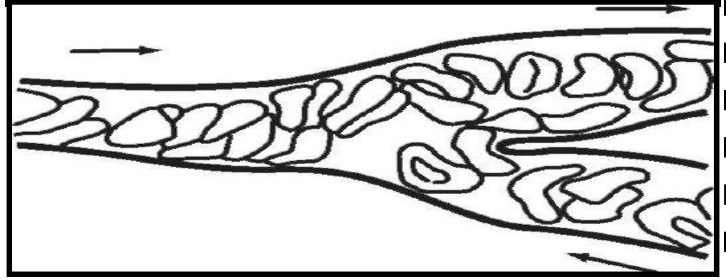
Цельная кровь (суспензия эритроцитов в белковом растворе - плазме) является неньютоновской жидкостью вследствие агрегации эритроцитов. Эритроцит в норме имеет форму двояковогнутого диска диаметром около 8 мкм. Он может существенно менять свою форму, например при различной осмолярности среды.

В неподвижной крови эритроциты агрегируют, образуя так называемые «монетные столбики», состоящие из 6-8 эритроцитов. Электронно-микроскопическое исследование тончайших срезов монетных столбиков выявило параллельность поверхностей прилежащих эритроцитов и постоянное межэритроцитарное расстояние при агрегации.



На рисунке ниже показана агрегация цельной крови во влажных мазках, которая представляет собой большие конгломераты, состоящие из многих монетных столбиков.При перемешивании крови агрегаты разрушаются, а после прекращения перемешивания вновь восстанавливаются.



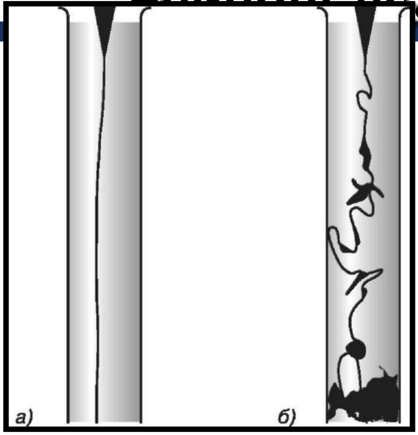


При протекании крови по капиллярам агрегаты эритроцитов распадаются и
вязкость падает.Вживление специальных прозрачных окошек в кожные складки позволило сфотографировать течение крови в капиллярах. На рисунке слева отчетливо видна деформация кровяных клеток.Деформируясь, эритроциты могут продвигаться один за другим в капиллярах диаметром всего 3 мкм. Именно в таких тонких капиллярных сосудах и происходит газообмен между кровью и тканями

.Вблизи стенки капилляра образуется очень тонкий слой плазмы, который играет роль смазки.

Благодаря этому сопротивление движению эритроцитов уменьшается.

3. Ламинарное и турбулентное течения, число Рейнольдса.



В жидкости течение может быть ламинарным или турбулентным. На рисунке это показано для одной окрашенной струи жидкости, текущей в другой.

В случае (а) струя окрашенной жидкости сохраняет неизменную форму и не смешивается с остальной жидкостью. В случае (б) окрашенная струя разрывается случайными завихрениями, картина которых меняется с течением времени. К турбулентному течению понятие «трубка тока» неприменимо.

Ламинарное (**слоистое**) **течение** - такое течение, при котором слои жидкости текут, не перемешиваясь, скользя друг относительно друга. Ламинарное течение является стационарным - скорость течения в каждой точке пространства остается постоянной.Рассмотрим ламинарное течение ньютоновской жидкости в трубе радиуса R и длины L, давления на концах которой постоянны (P1 и P2). Выделим цилиндрическую трубку тока радиуса r.На жидкость внутри этой трубки

действуют сила давления $F_Д = \pi r^2(P_1 - P_2)$ и сила вязкого трения $F_{тр} = 2\pi r L\eta \frac{dv}{dr}$

($2\pi rL$ - площадь боковой поверхности).

Так как течение стационарное, то сумма этих сил равна нулю.

$$\pi r^2(P_1 - P_2) + 2\pi rL\eta dv/dr = 0. \quad (8.2)$$

Разделим переменные в уравнении (8.2): $dv = -[(P_1 - P_2)/(2L\eta)]rdr$, или, в интегральном виде:

$$\int dv = -\frac{P_1 - P_2}{2L\eta}\int r dr.$$

Интегрируя v, получим

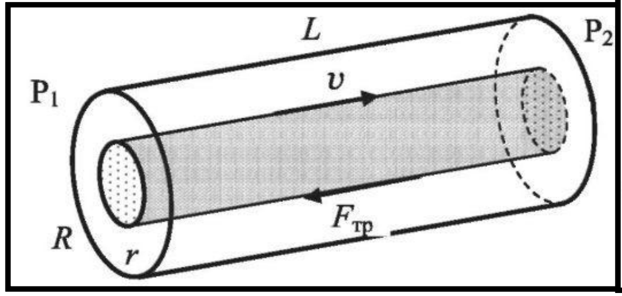
$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4L\eta}r^2 + C. \quad (8.3)$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия $v(R) = 0$:

$$C = \frac{P_1 - P_2}{4L\eta}R^2.$$

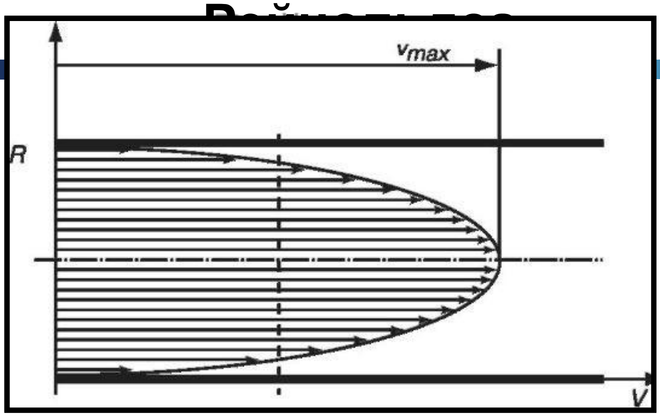
Подставив это значение в (8.3), получим зависимость скорости течения от расстояния до оси трубки:

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4L\eta}(R^2 - r^2). \quad (8.4)$$



ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ
ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ

3. Ламинарное и турбулентное течения, число Рейнольдса



В соответствии с приведенным выражением имеет место параболическая зависимость скорости v слоев жидкости от расстояния от них до оси трубы r (огибающая всех векторов скорости есть парабола).Наибольшую скорость имеет слой, текущий вдоль оси трубы (r = 0), слой, «прилипший» к стенке (r = R), неподвижен.

Турбулентное (**вихревое**) **течение** - такое течение, при котором скорости частиц жидкости в каждой точке беспорядочно меняются. Такое движение сопровождается появлением звука. Турбулентное течение - это хаотическое, крайне нерегулярное, неупорядоченное течение жидкости. Элементы жидкости совершают движение по сложным неупорядоченным траекториям, что приводит к перемешиванию слоев и образованию местных завихрений.Структура турбулентного течения представляет собой нестационарную совокупность очень большого числа малых вихрей, наложенных на основное «среднее течение».При этом говорить о течении в ту или иную сторону можно только в среднем за какой-то промежуток времени.Турбулентное течение связано с дополнительной затратой энергии при движении жидкости: часть энергии расходуется на беспорядочное движение, направление которого отличается от основного направления потока, что в случае крови приводит к дополнительной работе сердца. Шум, возникающий при турбулентном течении крови, может быть использован для диагностирования заболевания. Этот шум прослушивается, например, на плечевой артерии при измерении давления крови.

Турбулентное движение крови может возникнуть вследствие неравномерного сужения просвета сосуда (или локального выпирания). Турбулентное течение создает условия для оседания тромбоцитов и образования агрегатов. Этот процесс часто является пусковым в формировании тромба. Кроме того, если тромб слабо связан со стенкой сосуда, то под действием резкого перепада давления вдоль него вследствие турбулентности он может начать двигаться.

3. Ламинарное и турбулентное течения, число Рейнольдса.

Понятия ламинарности и турбулентности применимы как к течению жидкости по трубам, так и к обтеканию ею различных тел. В обоих случаях характер течения зависит от скорости течения, свойств жидкости и характерного линейного размера трубы или обтекаемого тела.

Английский физик и инженер Осборн Рейнольдс (1842-1912) составил безразмерную комбинацию, величина которой и определяет характер течения. Впоследствии эта комбинация была названа **числом Рейнольдса** (Re):

$$Re = \rho v d/\eta. \quad (8.5)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, η – коэффициент динамической вязкости, v – скорость потока, d – характерный линейный размер трубы или тела, обтекаемого жидкостью.

Условием ламинарности течения является выполнение неравенства

$$Re < Re_{кр}, \quad (8.6)$$

где $Re_{кр}$ – *критическое* значение, зависящее от формы сечения трубы или от формы обтекаемого тела.

Критическое значение определяется опытным путем. Так, для течения в длинных *цилиндрических трубах* $Re_{кр} = 2300$, а характерный линейный размер d равен диаметру трубы (D):

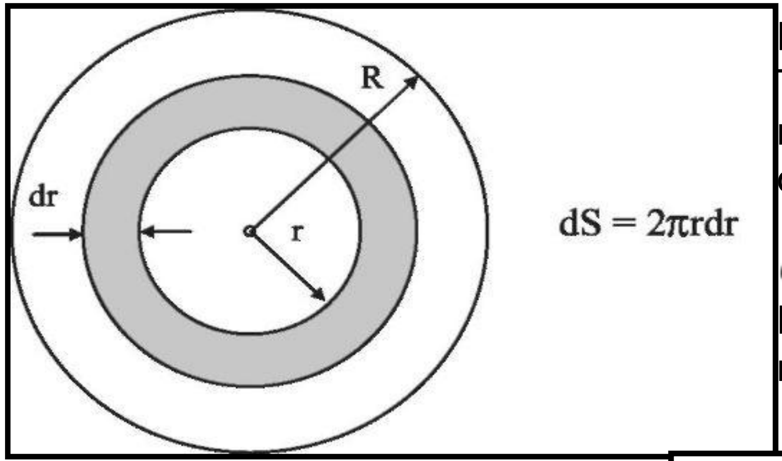
$$Re = \rho v D/\eta, \qquad Re_{кр} = 2300. \quad (8.7)$$

Число Рейнольдса используют при моделировании гидро- и аэродинамических систем, в частности кровеносной системы. Модель должна иметь такое же число Рейнольдса, как и сам объект, в противном случае соответствия между ними не будет.

Важным свойством турбулентного течения (по сравнению с ламинарным) является высокое сопротивление потоку. Если бы удалось «погасить» турбулентность, то удалось бы достичь огромной экономии мощности двигателей кораблей, подводных лодок, самолетов.

4. Формула Пуазейля, гидравлическое сопротивление.

Рассмотрим, от чего зависит объем жидкости, протекающей по горизонтальной трубе. При ламинарном течении жидкости по трубе радиуса R и длины L объем Q жидкости, протекающей через горизонтальную трубу за одну секунду, можно вычислить следующим образом. Выделим тонкий цилиндрический слой радиуса r и толщины dr.



Площадь его поперечного сечения равна $dS=2\pi r dr$
Так как выделен тонкий слой, жидкость в нём перемещается с одинаковой скоростью v. За одну секунду перенесет объём жидкости

$$dQ=v\cdot dS=2\pi v r dr$$

Подставив сюда формулу для скорости цилиндрического слоя жидкости получим:

$$dQ=\pi[(P_1-P_2)/(2L\eta)](R^2-r^2)rdr.$$

Интегрируя по всему сечению трубы,

$$Q=\pi[(P_1-P_2)/(2L\eta)]\int_0^R(R^2-r^2)rdr,$$

получим формулу *Пуазейля*:

$$Q=(P_1-P_2)\pi R^4/8\eta L. \qquad (8.8)$$

Это соотношение справедливо для ламинарного течения ньютоновской жидкости.

Формулу Пуазейля можно записать в виде, справедливом для труб переменного сечения. Заменим выражение (P1 - P2)/L на градиент давления dP/d/, тогда получим

$$Q=\left(\frac{\pi R^4}{8\eta}\right)\frac{dP}{dl}$$

4. Формула Пуазейля, гидравлическое сопротивление.

Как видно из (8.8), при заданных внешних условиях объем жидкости, протекающей по трубе, пропорционален **четвертой степени** ее радиуса. Это очень сильная зависимость. Так, например, если при атеросклерозе радиус сосудов уменьшится в 2 раза, то для поддержания нормального кровотока перепад давлений нужно увеличить в 16 раз, что практически невозможно. В результате возникает кислородное голодание соответствующих тканей. Этим объясняется возникновение «грудной жабы». Облегчения можно достичь, вводя лекарственное вещество, которое расслабляет мышцы артериальных стенок и позволяет увеличить просвет сосуда и, следовательно, поток крови.Поток крови, проходящей через сосуды, регулируется специальными мышцами, окружающими сосуд. При их сокращении просвет сосуда уменьшается и соответственно убывает поток крови. Таким образом, незначительным сокращением этих мышц очень точно контролируется поступление крови в ткани.В организме путем изменения радиуса сосудов (сужения или расширения) за счет изменения объемной скорости кровотока регулируется кровоснабжение тканей, теплообмен с окружающей средой.

Причины движения крови по сосудам

Главная движущая сила кровотока - разность давлений в начале и в конце сосудистой системы: в большом круге кровообращения - разность давлений в аорте и правом предсердии, в малом круге - в легочной артерии и левом предсердии.

Дополнителные факторы, способствующие движению крови по венам в сторону сердца:

1. полулунные клапаны вен конечностей, которые открываются под напором крови только в сторону сердца;
2. присасывающее действие грудной клетки, связанное с отрицательным давлением в ней при вдохе;
3. сокращение мышц конечностей, например, при хотьбе. При этом происходит надавливание на стенки вен, и кровь, благодаря клапанам и присасывающему действию грудной клетки при вдохе, выжимается в участки, расположенные ближе к сердцу.

4. Формула Пуазейля, гидравлическое сопротивление.

Проведем аналогию между формулой Пуазейля и формулой закона Ома для участка цепи тока: I = ΔU/R. Для этого перепишем формулу (8.8) в следующем виде:

$$Q=\frac{(P_1-P_2)}{\left[\frac{8\eta L}{\pi R^4}\right]}$$

Если сравнить эту формулу с законом Ома для электрического тока, то объем жидкости, протекающей через сечение трубы за одну секунду, соответствует силе тока; разность давлений на концах трубы соответствует разности потенциалов; а величина $8\eta L/(\pi R^4)$ соответствует электрическому сопротивлению. Ее называют гидравлическим сопротивлением:

Гидравлическое сопротивление трубы прямо пропорционально ее длине и обратно пропорционально *четвертой степени* **радиуса**.

Если изменением кинетической энергии жидкости на некотором участке можно пренебречь, то рассмотренная аналогия применима и к потоку переменного сечения:

гидравлическим сопротивлением участка называется отношение перепада давлений к объему жидкости, протекающему за 1 **секунду**:

$$X=\frac{8\eta L}{\pi R^4} \qquad (8.10)$$

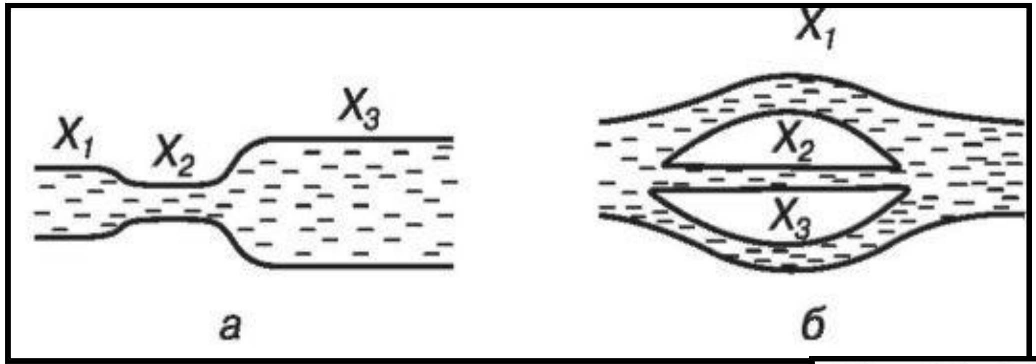
Наличие гидравлического сопротивления связано с преодолением сил внутреннего трения.

$$X=\frac{(P_1-P_2)}{Q} \qquad (8.11)$$

4. Формула Пуазейля, гидравлическое сопротивление

Законы гидродинамики значительно сложнее законов постоянного тока, поэтому и законы соединения труб (кровеносных сосудов) сложнее законов соединения проводников. Так, например, места резкого сужения потока (даже при небольшой длине) обладают большим собственным гидравлическим сопротивлением. Этим и объясняется значительное увеличение гидравлического сопротивления кровеносного сосуда при образовании небольшой бляшки.

Наличие собственного сопротивления у мест резкого сужения потока необходимо учитывать при расчете сопротивления участка, состоящего из труб различного диаметра



На рисунке а показано последовательное сопротивление (б-параллельное) трех труб. Места сужения обладают собственным сопротивлением X_{12} и X_{23}. Поэтому сопротивление участка равно

$$X = X_1 + X_{12} + X_2 + X_{23} + X_3, \qquad (8.12)$$

$$X = (1/X_1 + 1/X_2 + 1/X_3)^{-1}. \qquad (8.13)$$

Электрический аналог (8.13) формулы для расчета гидродинамического сопротивления параллельного соединения (рис 8.10, б) также требует учета сопротивлений мест соединения труб.

5. Методы определения вязкости жидкостей

Совокупность методов измерения вязкости жидкости называется **вискозиметрией**. Прибор для измерения вязкости называется вискозиметром. В зависимости от метода измерения вязкости используют следующие типы вискозиметров.

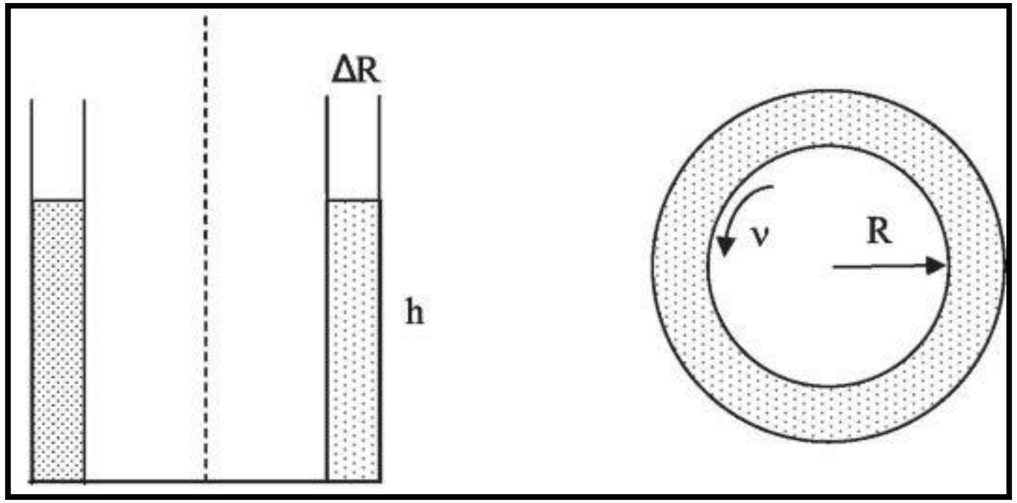
1. Капиллярный вискозиметр Оствальда основан на использовании формулы Пуазейля. Вязкость определяется по результату измерения времени протекания через капилляр жидкости известной массы под действием силы тяжести при определенном перепаде давлений.

2. Медицинский вискозиметр Гесса с двумя капиллярами, в которых движутся две жидкости (например, дистиллированная вода и кровь). Вязкость одной жидкости должна быть известна. Учитывая, что перемещение жидкостей за одно и то же время обратно пропорционально их вязкости, вычисляют вязкость второй жидкости.

3. Вискозиметр, основанный на методе Стокса, согласно которому при движении шарика радиуса R в жидкости с вязкостью η при небольшой скорости v сила сопротивления пропорциональна вязкости этой жидкости: $F=6\pi\eta Rv$ (формула Стокса). Эритроциты перемещаются в вязкой жидкости - плазме крови. Так как эритроциты имеют дискообразную форму и оседают в вязкой жидкости, то скорость их оседания (СОЭ) можно определить приближенно по формуле Стокса. О скорости оседания судят по количеству плазмы над осевшими эритроцитами. В норме скорость оседания эритроцитов равна: 7-12 мм/ч для женщин и 3-9 мм/ч для мужчин.

5. Методы определения вязкости жидкостей

4. Вискозиметр ротационный состоит из двух коаксиальных (соосных) цилиндров. Радиус внутреннего цилиндра - R, радиус внешнего цилиндра - R+ΔR (ΔR << R). Пространство между цилиндрами заполняют исследуемой жидкостью до некоторой высоты h. Затем внутренний цилиндр приводят во вращение, прикладывая определенный момент сил М, и измеряют установившуюся частоту вращения ν.

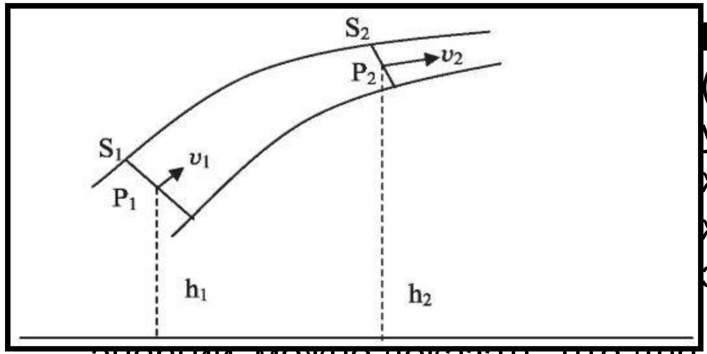


$\eta = \frac{KM}{h\nu}$, *где* $K = \frac{\Delta R}{4\pi^2 R^3}$ *- постоянная прибора*

Применяя ротационный вискозиметр, можно измерять вязкость при разных угловых скоростях вращения ротора. Данный метод позволяет установить зависимость между вязкостью и градиентом скорости, что важно для неньютоновских жидкостей.

1. **Уравнение Бернулли**

Для идеальной жидкости (сила трения полностью отсутствует) справедливо уравнение, которое было получено швейцарским математиком и физиком Даниилом Бернулли (1700-1782).
Рассмотрим тонкую трубку тока и выделим в ней два произвольных сечения .



В общем случае эти сечения находятся на различных высотах (h1 и h2), а их площади различны (S1 и S2). Вследствие уравнения неразрывности различны будут и скорости течения жидкости в этих сечениях (v1 и v2). Обозначим давления жидкости в этих сечениях P1 и P2 соответственно. Используя закон сохранения механической энергии, можно доказать, что для этих сечений выполняется следующее соотношение:

$$P_1+\frac{\varrho v_1^2}{2}+\varrho g h_1=P_2+\frac{\varrho v_2^2}{2}+\varrho g h_2$$

где ϱ- плотность жидкости. Так как выбор сечений трубки произволен,то соотношение можно записать в общем виде,который называется **уравнением Бернулли**:

$$P+\frac{\varrho v^2}{2}+\varrho g h=const$$

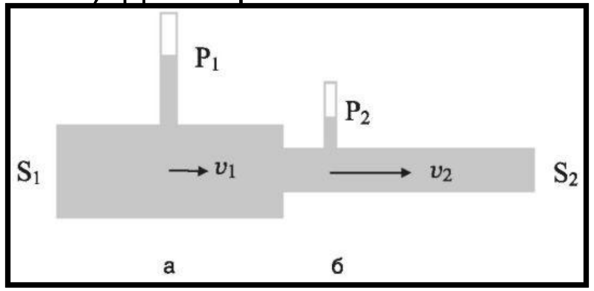
Давление P называют **статическим**. Это давление, которое оказывают друг на друга соседние слои жидкости. Его можно измерить манометром, который движется вместе с жидкостью.
Величину $\varrho v^2/2$ называют **динамическим** давлением. Оно обусловлено движением жидкости.
Гидростатическое давление $\varrho g h$ - это давление, создаваемое весом вертикального столба жидкости высотой h.
Уравнение Бернулли формулируется следующим образом:
При стационарном течении идеальной жидкости полное давление, равное сумме статического, динамического и гидростатического давлений, одинаково во всех поперечных сечениях трубки тока.

2. **Следствия уравнения Бернулли**

Горизонтальная трубка тока переменного сечения. Если h1 = h2 и уравнение принимает вид:

$$P_1+\frac{\varrho v_1^2}{2}=P_2+\frac{\varrho v_2^2}{2}$$

Отсюда следует, что статическое давление идеальной жидкости при течении по горизонтальной трубке возрастает там, где скорость ее уменьшается, и наоборот. Это можно продемонстрировать с помощью манометрических трубок, уровень поднятия жидкости в которых пропорционален статическому давлению. Видно, что в широком сечении (а), где скорость течения меньше, статическое давление больше, чем в узком сечении (б)



Наклонная трубка тока постоянного сечения. В такой трубке скорость жидкости везде одинакова (v = const), и уравнение принимает вид:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \qquad (7.6)$$

или

$$P_2 - P_1 = \rho g(h_1 - h_2), \rightarrow \Delta P = \rho g \Delta h. \qquad (7.7)$$

В этом случае разность давлений обусловлена разностью высот, на которых находятся рассматриваемые сечения (рис. 7.4)

Истечение жидкости из отверстия сосуда

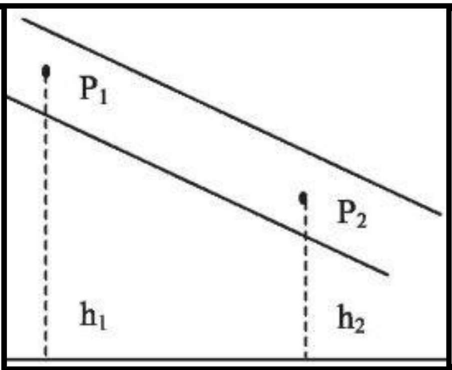
Жидкость истекает из широкого сосуда площадью S_1 через небольшое отверстие площадью S_2 (рис. 7.5).

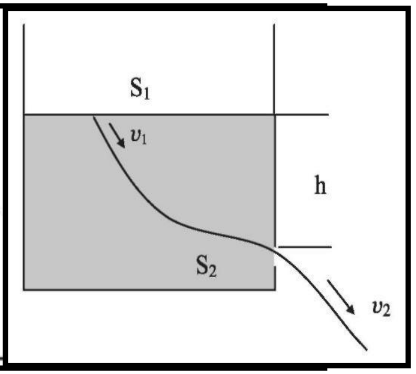
В данном случае $h_1 = h$, $h_2 = 0$, а давления P_1 и P_2 одинаковы и равны атмосферному давлению P_A. Кроме того, в соответствии с (7.2) $\upsilon_1 \ll \upsilon_2$, поскольку $S_1 \gg S_2$. Поэтому можно принять, что $\upsilon_1 \approx 0$. С учетом этих условий получаем

$$P_A + 0 + \rho g h = P_A + \rho \upsilon_2^2/2 + 0, \qquad (7.8)$$

откуда

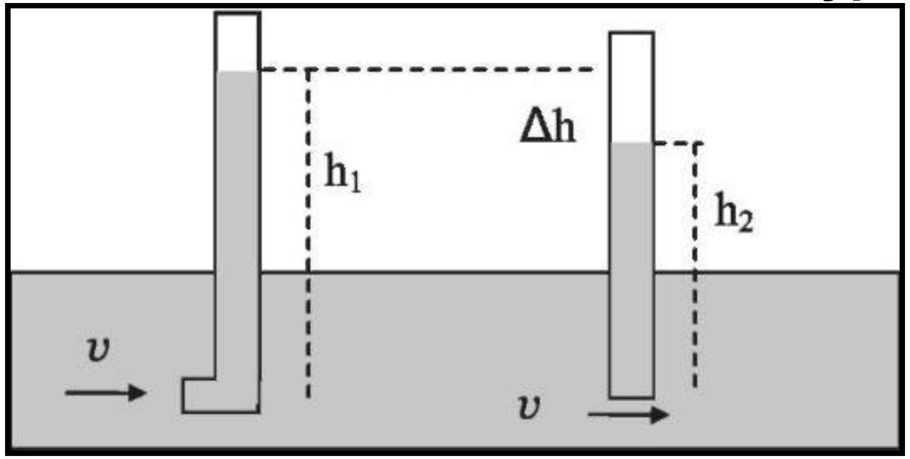
$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh}. \qquad (7.9)$$





Следовательно, скорость истечения струи равна скорости тела при свободном падении с высоты h. Соотношение (7.9) - это **формула Торричелли**.

2. Следствия уравнения



Установим в разных местах горизонтальной цилиндрической трубы (струи жидкости) одного сечения две трубки: 1) манометрическую трубку, плоскость отверстия которой расположена параллельно движению жидкости; 2) трубку, изогнутую под прямым углом навстречу движению жидкости (трубку Пито).

В движущемся потоке жидкость в трубках поднимается на разную высоту. Давление под манометрической трубкой равно статическому давлению P. Оно уравновешивается давлением атмосферы Pa и давлением столба жидкости h2:

$$P = P_a + \rho g h_2.$$

Давление в торце трубки Пито складывается из статического давления P и динамического давления $\rho \upsilon^2/2$. Оно уравновешивается давлением атмосферы P_a и давлением столба жидкости h_1:

$$P + \rho \upsilon^2/2 = P_a + \rho g h_1.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$\rho \upsilon^2/2 = \rho g \Delta h,$$

где $\Delta h = h_1 - h_2$ – разность уровней в трубках. Отсюда найдем скорость течения жидкости

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g\Delta h}. \quad (7.10)$$

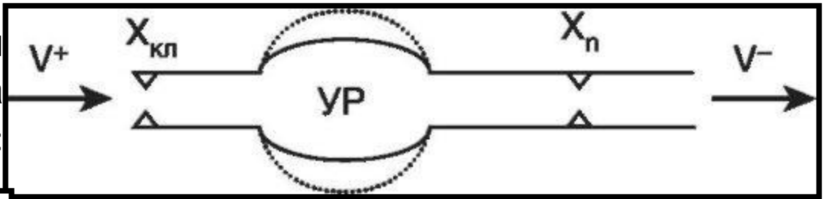
Имея систему двух таких трубок, вычисляют скорость потока жидкости по формуле (7.10).

1. Гидродинамическая модель кровообращения

Основными элементами системы кровообращения являются: левый желудочек, из которого кровь поступает в артериальную часть кровеносной системы под постоянным давлением Рж;

- **клапан К**, отделяющий левый желудочек от артериальной части и имеющий гидравлическое сопротивление Хкл;
- **артериальная часть** кровеносной системы, которая рассматривается как упругий резервуар (УР);
- **периферическая часть** кровеносной системы, состоящая из артериол с гидравлическим сопротивлением Хп;
- **вены**, по которым кровь возвращается в сердце. Теоретические исследования системы кровообращения проводят с помощью математических моделей.

Простейшая гидродинамическая модель кровеносной системы, предложенная Франком, представлена на рисунке:



Обозначим через $V^+(t)$ объем крови, поступившей в УР за время t, отсчитываемое от начала систолы. За это же время в периферическую часть кровеносной системы переходит объем крови $V^-(t)$. Тогда увеличение объема УР равно разности этих величин:

$$V(t) = V^+(t) - V^-(t).$$

Аналогичным соотношением связаны и объемные скорости кровотока ($Q = dV/dt$):

$$Q = Q^+ - Q^-, \qquad (9.1)$$

где Q^+ и Q^- — объемные скорости притока крови в УР и оттока из него.

Упругие свойства артериальной части обусловлены растяжением стенок артерий и описываются уравнениями

$$V = k(P - P_д), \qquad Q = kdP/dt, \qquad (9.2)$$

где k — постоянный коэффициент упругости, P — давление в УР в текущий момент времени, $P_д$ — диастолическое давление.

Объемные скорости кровотока Q^+ и Q^- находятся через гидравлические сопротивления и разности давлений (формула 8.11):

$$Q^+ = (P_ж - P)/X_{кл}, \qquad Q^- = (P - 0)/X_п. \qquad (9.3)$$

1. Гидродинамическая модель кровообращения

Здесь (Рж - Р)-падение давления на аортальном клапане в текущий момент времени t, а (Р - 0) - падение давления в периферической части (давление в полой вене можно считать равным 0). Подставив выражения (9.3) и (9.2) в соотношение (9.1), получим дифференциальное уравнение для давления в УР в период систолы:

$$k\frac{dP}{dt}=\frac{P_ж-P}{X_{кл}}-\frac{P}{X_п}, \quad (9.4)$$

или, после алгебраических преобразований,

$$k\frac{dP}{dt}+P\left(\frac{1}{X_{кл}}+\frac{1}{X_п}\right)=\frac{P_ж}{X_{кл}}.$$

Очевидно, что Хп >> Хкл. Поэтому слагаемым 1/Хп можно пренебречь. Кроме того, можно принять, что давление в желудочке Рж равно максимальному систолическому давлению Рс. Начальное давление в УР - это диастолическое давление РД , которым закончился предыдущий цикл. Тогда уравнение для артериального давления в период систолы (0 < t < Тс) принимает следующий вид:

$$k\frac{dP}{dt}+\frac{P}{X_{кл}}=\frac{P_ж}{X_{кл}}, \qquad P(0)=P_д. \quad (9.5)$$

Решением этого уравнения является функция

$$P=(P_д-P_с)exp\left(-\frac{t}{kX_{кл}}\right)+P_с, \qquad 0<t<T_с. \quad (9.6)$$

Во время диастолы приток крови отсутствует, и в уравнении (9.4) отсутствует первое слагаемое. Диастола начинается в момент времени t = Тс, когда давление равно Рс: Р(ТС) = Рс.

Отсюда получаются уравнение для давления и его начальное условие:

$$k\frac{dP}{dt}+\frac{P}{X_п}=0, \qquad P(T_с)=P_с. \quad (9.7)$$

Решением этого уравнения является функция

$$P=P_с exp\left(-\frac{t-T_с}{kX_{кл}}\right), \qquad T_с<t<T. \quad (9.8)$$

Функции (9.6) и (9.8) описывают изменения артериального давления в модели Франка. Это описание качественно соответствует экспериментальным зависимостям давления от времени. Для получения и количественного соответствия требуются значительно более сложные модели.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ