

Практика № 15

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

ред. А.В. Ефимов, Б.П. Демидович

Линейная алгебра и основы математического анализа

/ В.А. Болгов, Б.П. Демидович, А.В. Ефимов [и др.].

- М.: Высш. школа, - 3-е изд., испр. , 1993.

2.108

2.133

2.126

2.127 а)

2.132

2.107

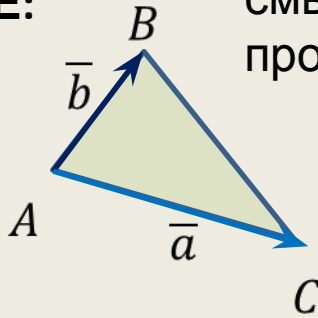
2.137

2.138

Задача № 1

Найти площадь треугольника с вершинами : $A(1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1)$.

РЕШЕНИЕ По геометрическому
Е: смыслу векторного
произведения:



м:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot \left| [\bar{a}, \bar{b}] \right| \quad \bar{a} = \overline{AC}, \quad \bar{b} = \overline{AB}.$$

$$\overline{AC} = (1 - 1, 3 - (-1), -1 - 2) = (0, 4, -3);$$

$$\overline{AB} = (5 - 1, -6 - (-1), 2 - 2) = (4, -5, 0);$$

$$[\overline{AC}, \overline{AB}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + \bar{j} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(-1)^2(4 \cdot 0 - (-3) \cdot (-5)) + \bar{j}(-1)^3(0 \cdot 0 - (-3) \cdot 4) + \bar{k}(-1)^4(0 \cdot (-5) - 4 \cdot 4) =$$

$$= \bar{i}(0 - 15) - \bar{j}(0 + 12) + \bar{k}(0 - 16) = -15\bar{i} - 12\bar{j} - 16\bar{k} = (-15; -12; -16);$$

$$\left| [\overline{AC}, \overline{AB}] \right| = \sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{225 + 144 + 256} = \sqrt{625} = 25;$$

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot \left| [\overline{AC}, \overline{AB}] \right| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5 \quad \text{ОТВ}$$

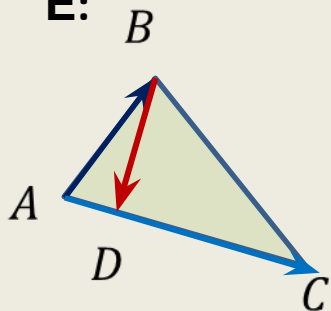
ЕТ

Задача № 2 (№2.108)

В треугольнике с вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$ найти высоту, проведенную из вершины B на основание AC .

РЕШЕНИЕ

Е:



Проведем в треугольнике высоту \overline{BD} .

По геометрическому смыслу векторного произведения:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot |[\overline{AC}, \overline{AB}]|;$$

По другой формуле:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}|;$$

Приравняем правые части и выразим

$$|\overline{BD}| = \frac{|[\overline{AC}, \overline{AB}]|}{|\overline{AC}|}$$

Из задачи 1

известно:

$$\overline{AC} = (0, 4, -3); \quad \overline{AB} = (4, -5, 0); \quad [\overline{AC}, \overline{AB}] = (-15; -12; -16); \quad |[\overline{AC}, \overline{AB}]| = 25;$$

Вычислим модуль вектора \overline{AC} : $|\overline{AC}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$;

$$|\overline{BD}| = \frac{25}{5} = 5 \quad \text{ОТВЕТ}$$

Задача № 3 (№2.133)

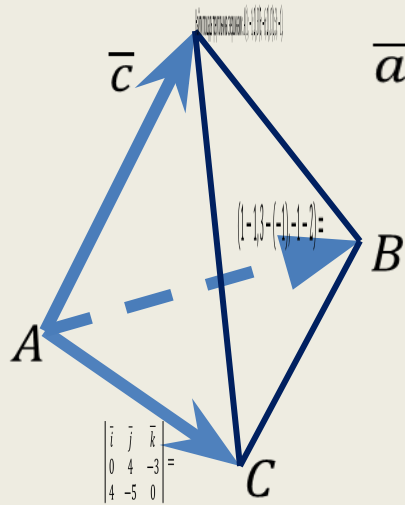
ДАНЫ координаты точек $A(2, -3, 5)$; $B(0, 2, 1)$, $C(-2, -2, 3)$, $D(3, 2, 4)$.

НАЙТИ: объем пирамиды $ABCD$: $V_{\text{пир}}$

РЕШЕНИ

Е:

$$(-15; -12; -16); \frac{1}{6} \cdot |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$$



$$\bar{a} = \overline{AC}, \bar{b} = \overline{AB}, \bar{c} = \overline{AD} \Rightarrow \bar{b} = \overline{AC} = \overline{AB} = (5-1, -6-(-1), 2-2) = \overline{AC} =$$

$$|\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}| = -15\bar{i} - 12\bar{j} - 16\bar{k} = (0-15) - \bar{j}(0+12) + \bar{k}(0-16) = -15\bar{i} - 12\bar{j} - 16\bar{k}$$

\bar{b}

6

**ОТВ
ЕТ**

Задача № 4

Проверить компланарность

векторов:

$$\text{(№ 2. 126) 1) } \bar{a} = (1, -1, 3); \bar{b} = (-2, 2, 1); \bar{c} = (3, -2, 5).$$

$$\text{(№ 2. 127 а) 2) } \bar{a}_1 = (2, 3, -1); \bar{a}_2 = (1, -1, 3); \bar{a}_3 = (1, 9, -11)$$

РЕШЕНИ

Е:

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 3 - 18 + 2 - 10 = -7 \neq 0$$

1) ОТВЕТ: векторы \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} не компланарны, образуют левую тройку.
Ю

Задача № 5

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} ,
(№2.132)
если $\overline{OA} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overline{OB} = -3\bar{j} + \bar{k}$, $\overline{OC} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$.

Задача 2 (№2.107)

Даны координаты точек $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$.

Найти площадь треугольника ABC .

Задача № 6

Даны векторы $\bar{a} = (1, 2, -1)$; $\bar{b} = (3, -1, -2)$.

Найти векторное произведение

Задача (№2. 134 начало)

ДАНЫ координаты точек $A(1, 1, 1)$; $B(2, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$, $D(3, 4, -3)$.

ПРОВЕРИТЬ: находятся эти точки в **ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ** или нет.

Задача 7 (№2.137)

$$| [\overline{AC}, \overline{AB}] | =$$

Задача 8

Установить, компланарны ли векторы

$$\bar{a} = (2, 3, -1), \bar{b} = (1, -1, 3) \text{ и } \bar{c} = (1, 9, -1).$$

Задача 9

Установить, лежат ли в одной плоскости точки

$A(4, 3, 10)$; $B(5, 1, 5)$, $C(2, 2, 5)$, $D(3, 4, 12)$.

Домашняя работа

На отдельном листе: (свой вариант РГР)

Найти

3. Площадь треугольника $A_1A_2A_3$;

4. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

5. Длину высоты A_4H , опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

6. Медиану A_1K треугольника $A_1A_4A_3$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по векторной алгебре на следующем занятии.

Для

ЖЕДАЮЩИХ:

ДАНО: Объем пирамиды $ABCD$ равен 2. Заданы координаты трех вершин:

$A(0; 1; 1)$; $B(4; 3; -3)$; $C(2; -1; 1)$.

Про вершину D известно, что она лежит на оси OY .

НАЙТИ координаты вершины D .