Практика № 15

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

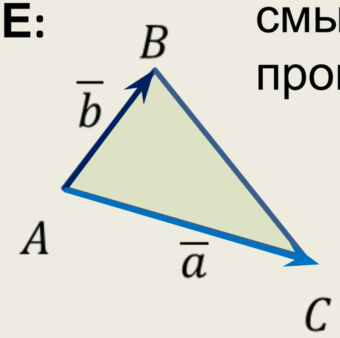
ред. А.В. Ефимов, Б.П. Демидович
Линейная алгебра и основы математического анализа
/ В.А. Болгов, Б.П. Демидович, А.В. Ефимов [и др.].
- М.: Высш. школа, - 3-е изд., испр. , 1993.

2.108	2.132
2.133	2.107
2.126	2.137
2.127 а)	2.138

Задача № 1

Найти площадь треугольника с вершинами : $A(1;\ -1;2), B(5;-6;2), C(1;3;\ -1)$.

РЕШЕНИЕ:



По геометрическому смыслу векторного произведения:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\left[\,\overline{a},\overline{b}\,\right]\right| \quad \overline{a}=\overline{AC}\,,\ \overline{b}=\overline{AB}\,.$$

Вычисляем:

$$\overline{AC} = (1-1, 3-(-1), -1-2) = (0,4,-3);$$

$$\overline{AB} = (5-1, -6-(-1), 2-2) = (4,-5,0);$$

$$\left[\,\overline{AC},\overline{AB}\,\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + \overline{j}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \overline{k}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(-1)^2\big(4\cdot0-(-3)\cdot(-5)\big) + \overline{j}(-1)^3(0\cdot0-(-3)\cdot4) + \overline{k}(-1)^4(0\cdot(-5)-4\cdot4) =$$

$$= \overline{i}(0-15) - \overline{j}(0+12) + \overline{k}(0-16) = -15\overline{i} - 12\overline{j} - 16\overline{k} = (-15;\ -12;-16);$$

$$\left|\left[\,\overline{AC},\overline{AB}\,\right]\right| = \sqrt{(-15)^2+(-12)^2+(-16)^2} = \sqrt{225+144+256} = \sqrt{625} = 25;$$

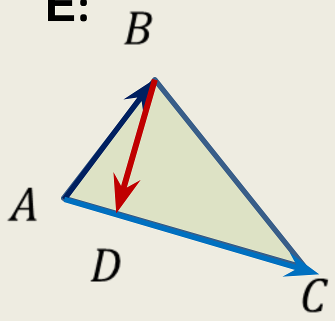
$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\left[\,\overline{AC},\overline{AB}\,\right]\right| = \frac{1}{2}\cdot25 = 12{,}5$$ **ОТВЕТ**

Задача № 2 (№2.108)

В треугольнике с вершинами $A(1;\ -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3;\ -1)$ найти высоту, проведенную из вершины B на основание AC .

РЕШЕНИЕ:

Проведем в треугольнике высоту $\overline{BD}$.



По геометрическому смыслу векторного произведения:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\left[\overline{AC}, \overline{AB}\right]\right|;$$

По другой формуле:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AC}\right| \cdot \left|\overline{BD}\right|;$$

Приравняем правые части и выразим

$$\left|\overline{BD}\right| = \frac{\left|\left[\overline{AC}, \overline{AB}\right]\right|}{\left|\overline{AC}\right|}$$

Из задачи 1 известно:

$\overline{AC} = (0, 4, -3)$; $\overline{AB} = (4, -5, 0)$; $\left[\overline{AC}, \overline{AB}\right] = (-15;\ -12; -16)$; $\left|\left[\overline{AC}, \overline{AB}\right]\right| = 25$;

Вычислим модуль вектора $\overline{AC}$: $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$;

$$\left|\overline{BD}\right| = \frac{25}{5} = 5$$

ОТВЕТ

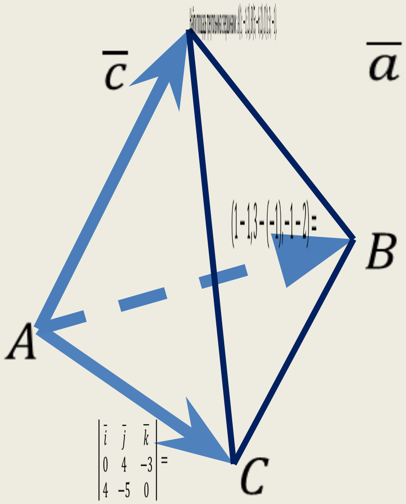
Задача № 3 (№2.133)

ДАНЫ координаты точек $A(2,-3,5)$; $B(0,2,1)$, $C(-2,-2,3)$, $D(3,2,4)$.

НАЙТИ: объем пирамиды $ABCD$: $V_{\text{пир}}$

РЕШЕНИЕ:

$(-15;\,-12;\,-16)$; $\frac{1}{6}\cdot|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}|$



$\bar{a}=\overline{AC}$, $\bar{b}=\overline{AB}$. $\bar{b}=\overline{AC}=\overline{AB}=(5-1,-6-(-1),2-2)=\overline{AC}=$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}=$$

$|\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}|=-15\bar{i}-12\bar{j}-16\bar{k}=\bar{i}(0-15)-\bar{j}(0+12)+\bar{k}(0-16)=$

$\overline{b}$ 6 **ОТВЕТ**

Задача № 4

Проверить компланарность векторов:

(№ 2. 126) 1) $\overline{a} = (1, -1, 3); \overline{b} = (-2, 2, 1); \overline{c} = (3, -2, 5).$

(№ 2. 127 а) 2) $\overline{a_1} = (2, 3, -1); \overline{a_2} = (1, -1, 3); \overline{a_3} = (1, 9, -11)$

РЕШЕНИЕ:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 3 - 18 + 2 - 10 = -7 \neq 0$$

1) ОТВЕТ: векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ не компланарны, образуют левую тройку.

Задача № 5
(№2.132)

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$,

если $\overline{OA} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overline{OB} = -3\bar{j} + \bar{k}$, $\overline{OC} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$.

Задача 2 (№2.107)

Даны координаты точек $A(1;\ 1;1), B(2;3;4), C(4;3;2)$.

Найти площадь треугольника ABC.

Задача № 6

Даны векторы $\overline{a} = (1, 2, -1); \overline{b} = (3, -1, -2)$.

Найти векторное произведение

Задача (№2. 134 начало)

ДАНЫ координаты точек $A(1, 1, 1)$; $B(2, 0, 2), C(2, 2, 2), D(3, 4, -3)$.

ПРОВЕРИТЬ: находятся эти точки в ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ или нет.

Задача 7 (№2.137)

$$|[\overline{AC}, \overline{AB}]| =$$

Задача 8

Установить, компланарны ли векторы

$\overline{a} = (2, 3, -1)$, $\overline{b} = (1, -1, 3)$ и $\overline{c} = (1, 9, -1)$.

Задача 9

Установить, лежат ли в одной плоскости точки

$$A(4, 3, 10);\ B(5, 1, 5), C(2, 2, 5), D(3, 4, 12).$$

Домашняя работа

На отдельном листе: (свой вариант РГР)

Найти

3. Площадь треугольника $A_1A_2A_3$;

4. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

5. Длину высоты A_4H, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

6. Медиану A_1K треугольника $A_1A_4A_3$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по векторной алгебре
на следующем занятии.

ДЛЯ ЖЕЛАЮЩИХ:

ДАНО: Объем пирамиды $ABCD$ равен 2. Заданы координаты трех вершин:
$A(0;1;1)$; $B(4;3;-3)$; $C(2;-1;1)$.
Про вершину D известно, что она лежит на оси OY.
НАЙТИ координаты вершины D.