Решение уравнения с одним неизвестным

Дано уравнение в виде $f(x)=0$, где $f(x)$ некоторая функция переменной x. Число x^* называется корнем или решением данного уравнения, если при подстановке $x= x^*$ в уравнение последнее обращается в тождество $f(x^*)=0$. Число x^* называют также нулем функции $y=f(x)$.

В общем случае уравнение может иметь одно или несколько корней, как действительных, так и комплексных. Нахождение действительных корней с заданной точностью можно разбить на два этапа. Сначала корни отделяются, т.е. определяются отрезки, которые содержат по оному корню уравнения; а затем уточняются, т.е. вычисляются с требуемой точностью ε. Отделение корней уравнения $f(x)=0$, в области определения, непрерывной функции $f(x)$, можно осуществлять несколькими способами:

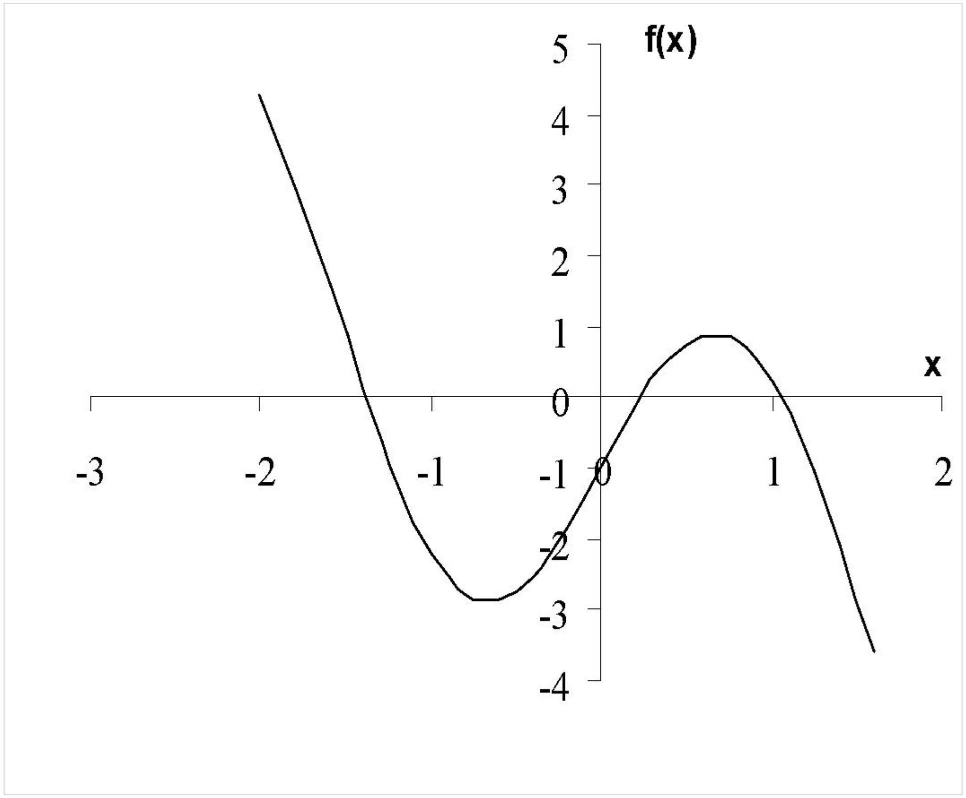
Табулирование – составление таблицы из равноотстоящих значений независимой переменной x и соответствующих значений функции и определение отрезков в которых смежные значения функции имеют различные знаки и следовательно содержат нулевые значения функции.

Графический - строим график функции $f(x)$ и определяем минимальные отрезки, включающие точки пересечения графика функции с осью x.

```
f=Inline('3*sin(2*x)-1.5*x-1')
a=input('a=');
b=input('b=');
h=input('h=');
x=a:h:b;
plot(x,f(x)); grid
xlabel('x'); ylabel('f(x)')
```

пример: f(x) = 3*sin(2*x)-1.5*x-1=0

x	f(x)
-2,00	4,270
-1,60	1,575
-1,20	-1,226
-0,80	-2,799
-0,40	-2,552
0,00	-1,000
0,40	0,552
0,80	0,799
1,20	-0,774
1,60	-3,575



Уточнение корня на отрезке [a,b], в котором локализован только один корень, осуществляется итерационными методами, в которых последовательно, шаг за шагом, производится уточнение начального приближения корня. Итерацией называется совокупность вычислительных операций, приводящих к новому приближенному значению корня. Если каждое последующее значение $x^{(k)}$ (k=1,2,3,…) находится все ближе к точному значению, говорят, что метод сходится. В противном случае метод расходится. Для реализации итерационного процесса должны быть заданы начальное приближение $x^{(0)}$ и точность ε, с которой найти решение уравнения. Условие окончание имеет вид: $|x^{(k)}-x^{(k-1)}| \leq \cdot \varepsilon$.Все методы можно разделить на две группы: с условной и безусловной сходимостью.

Методы с безусловной сходимостью

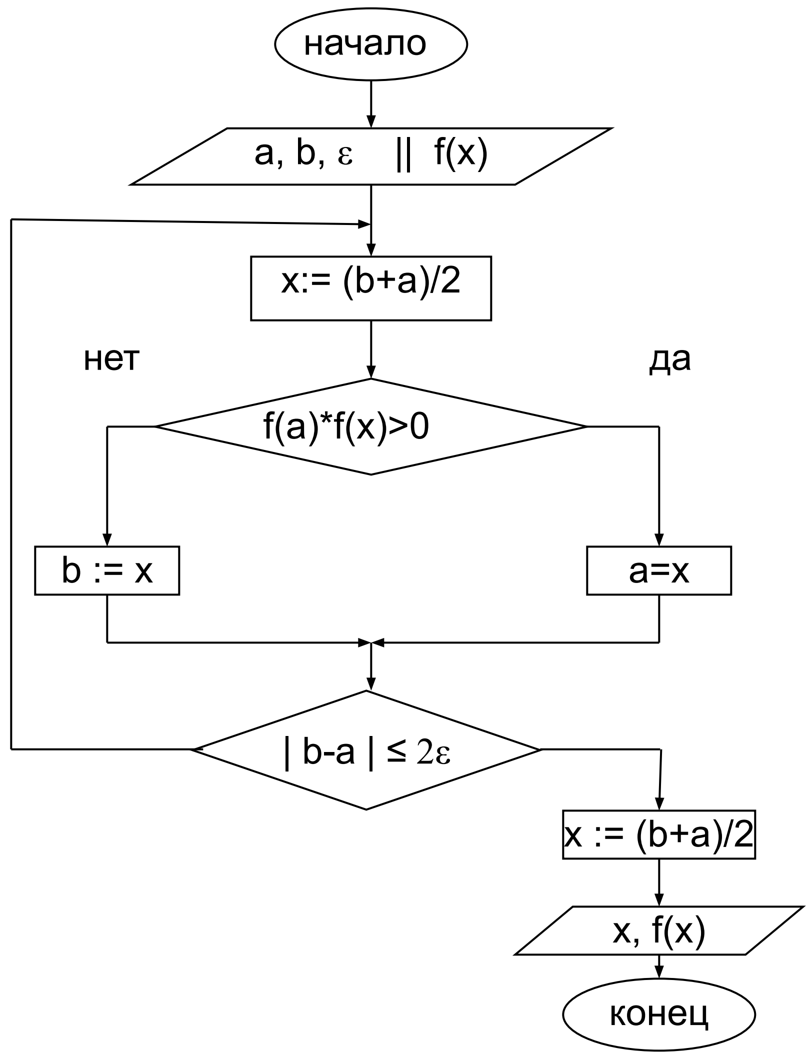
Метод половинного деления

В этом методе на каждой итерации новое приближение определяется как:
$x^{(k)}=(a^{(k-1)}+b^{(k-1)})/2$, где к – номер итерации.

Алгоритм

1. Задаем функцию f(x), отрезок $[a^{(0)},b^{(0)}]$, точность ε и k=1.
2. Вычисляем приближение $x^{(k)}=(a^{(k-1)}+b^{(k-1)})/2$
3. Определяем новый отрезок $[a^{(k)},b^{(k)}]$. Проверяем, если $f(a^{(k-1)})*f(x^{(k)})>0$, то $a^{(k)}=x^{(k)}$ и $b^{(k)}=b^{(k-1)}$, иначе $a^{(k)}=a^{(k-1)}$ и $b^{(k)}=x^{(k)}$.
4. Проверяем условие окончания, если $|b^{(k)}-a^{(k)}| \leq \cdot 2\varepsilon$, то за ответ принимаем значение равное $x=(a^{(k)}+b^{(k)})/2$ и переходим на пункт 5, иначе k=k+1 и переходим на пункт 2.
5. выводим x и f(x).

Блок-схема



Решим предыдущий пример при a= -1.6 b= -1.2 и ε= 0.01 т.е. 2ε = 0.02

a	b	x	f(a)	f(x)	|b-a|
-1,6	-1,2	-1,4	1,575	0,095	0.4
-1,4	-1,2	-1,3	0,095	-0,597	0.2
-1,4	-1,3	-1,35	0,095	-0,257	0.1
-1,4	-1,35	-1,375	0,095	-0,082	0.05
-1,4	-1,375	-1,3875	0,095	0,006	0.025
-1,3875	-1,375	-1,3812		-0,038	0.012

x= –1,38±0.01 f(x) = –0,038 (невязка)

Методы с условной сходимостью

В этих методах исходное уравнение $f(x)=0$ преобразуется к эквивалентному виду $x=\phi(x)$. Тогда на каждой итерации новое приближение будем определять как:
$x^{(1)} = \phi(x^{(0)})$, $x^{(2)} = \phi(x^{(1)})$, $x^{(3)} = \phi(x^{(2)})$,….., т.е. $x^{(k)}=\phi(x^{(k-1)})$, $k=1,2,3\ldots$.

За $x^{(0)}$ принимают любое число на заданном отрезке [a;b]. Вид функции $\phi(x)$ определим исходя из достаточного условия сходимости, которое записывается как: $|\phi'(x)| < 1$, для всех значений x отрезка[a;b], т.е. максимальная производная на заданном отрезке должна быть меньше единицы.

Метод простых итераций

Для уравнения $x^2-5=0$ можно положить $\phi(x)=5/x$ или $\phi(x)=(1/2)(x+5/x)$ и соответствующие итерационные формулы будут иметь вид $x^{(k)}=5/x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}=(1/2)(x^{(k-1)}+5/x^{(k-1)})$.

В первом случаи метод расходится

$X^{(k-1)}$	1,0000	5,0000	1,0000	5,0000	1,0000
$X^{(k)}$	5,0000	1,0000	5,0000	1,0000	5,0000

А во втором сходится

$X^{(k-1)}$	1,0000	3,0000	2,3333	2,2381	2,2361
$X^{(k)}$	3,0000	2,3333	2,2381	2,2361	2,2361

Общий подход для получения итерационной формулы $x=\phi(x)$

Помножим обе части уравнения $f(x)=0$ на множитель, и прибавим к обеим частям по x, тогда итерационная формула будет иметь вид:

$$x = x + \beta f(x) = \phi(x)$$

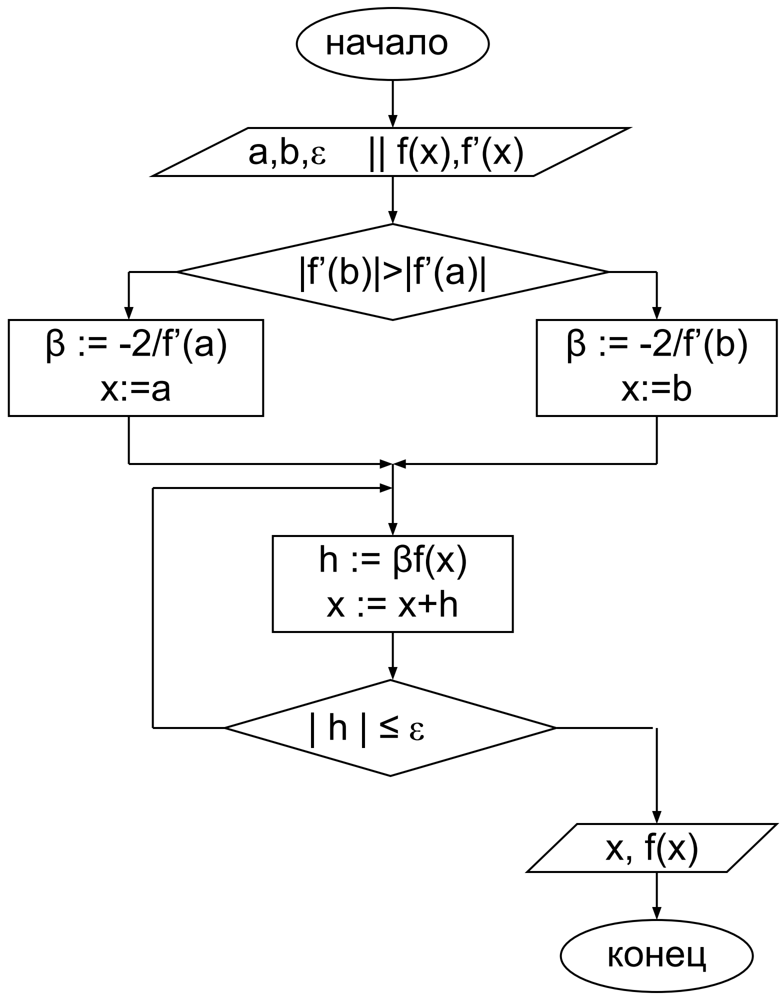
Определить множитель β можно из достаточного условия сходимости.

$|\phi'(x)| < 1 \qquad \phi'(x) = 1 + \beta f'(x) \qquad |1 + \beta f'(x)| < 1 \qquad -1 < 1 + \beta f'(x) < 1 \qquad -2 < \beta f'(x) < 0.$

Мы должны выбрать максимальную по модулю производную $|f'(x)|$ на заданном отрезке.

$|f'(b)|>|f'(a)| \quad \beta = -2/f'(b)$, иначе $\beta = -2/f'(a)$

Блок-схема



Пример: $f(x) = 3\sin(2x)-1.5x-1$ $f'(x)=6\cos(2x)-1.5$ $\varepsilon=0.01$ $a = -1,6$ $b = -1,2$

$f'(a) = -7,489$ $f'(b) = -5,924$ $\beta = 0,267 \approx 0.2$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \beta(3\sin(2x^{(k-1)})-1.5x^{(k-1)}-1)$$

k	$x^{(k-1)}$	$f(x^{(k-1)})$	h	$x^{(k)}$
1	-1,6	1,5751	0,3150	-1,2850
2	-1,2850	-0,6956	-0,1391	-1,4241
3	-1,4241	0,2685	0,05370	-1,3704
4	-1,3704	-0,1149	-0,0230	-1,3934
5	-1,3934	0,0477	0,0095	-1,3838
	-1,3838	-0,0201		

Ответ: $x = -1,38 \pm 0.01$ $f(x) = -0,020$

Метод Ньютона или касательных

Пусть известно некоторое приближение $x^{(k-1)}$ к решению x^* уравнения $f(x)=0$.

Тогда исходное уравнение можно записать в виде:

$f(x^{(k-1)}+\Delta x^{(k-1)})=0$ где $\Delta x^{(k-1)}= x^* - x^{(k-1)}$ и $x^* = x^{(k-1)}+ \Delta x^{(k-1)}$

Разложим функцию в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами.

$$f(x^{(k-1)}+\Delta x^{(k-1)}) = f(x^{(k-1)})+ f'(x^{(k-1)})\Delta x^{(k-1)} = 0$$

откуда

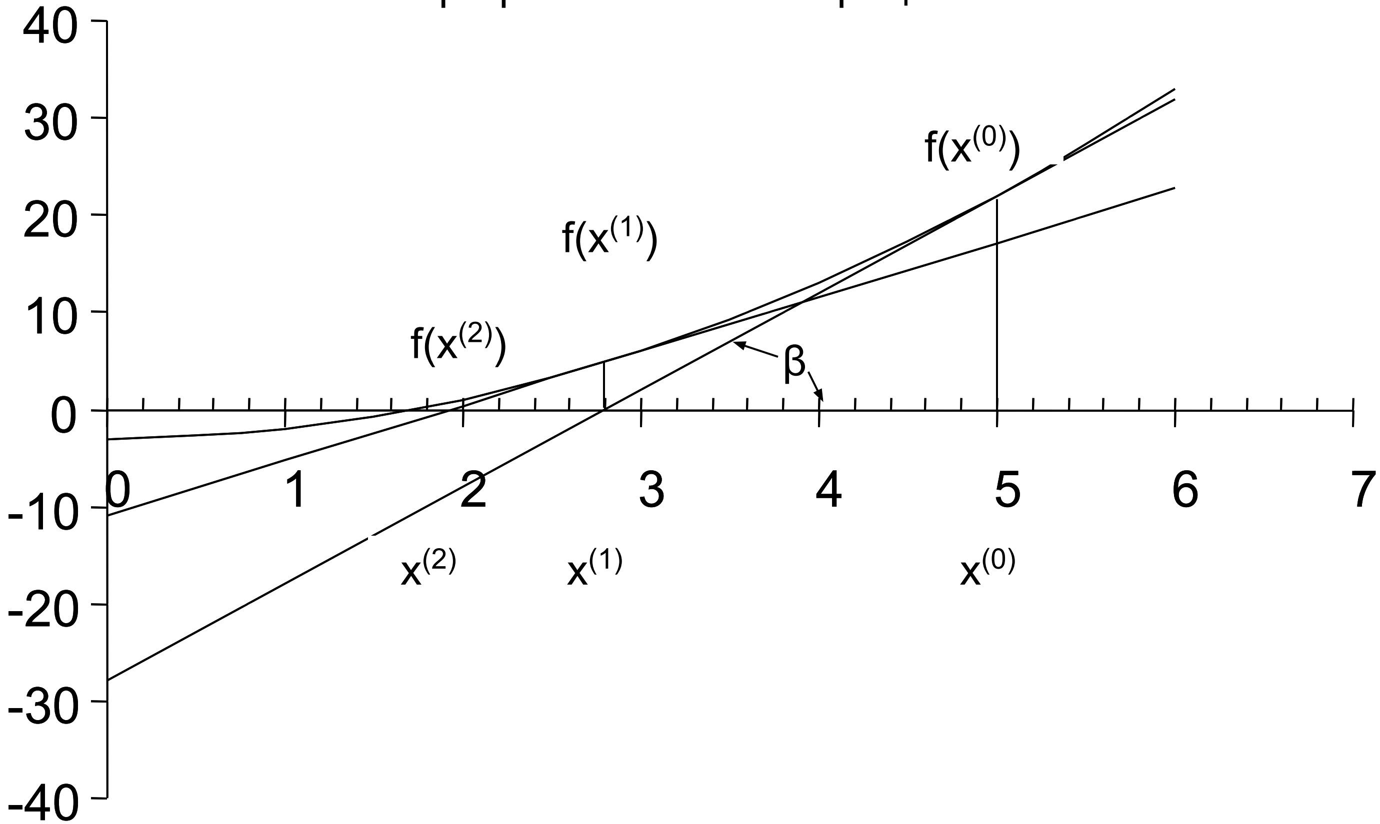
$$\Delta x^{(k-1)} = -\frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{k-1)})}$$

$$x^* = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k-1)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{k-1)})}$$

Полученное значение принимаем за новое приближение к решению. Тогда итерационную формулу запишем как:

$$x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{k-1)})}$$

Графическая иллюстрация.



На каждой итерации, за новое приближение к корню $x^{(k)}$ принимается точка пересечения касательной к графику, построенной в точке $f(x^{(k-1)})$ с осью абсцисс x:

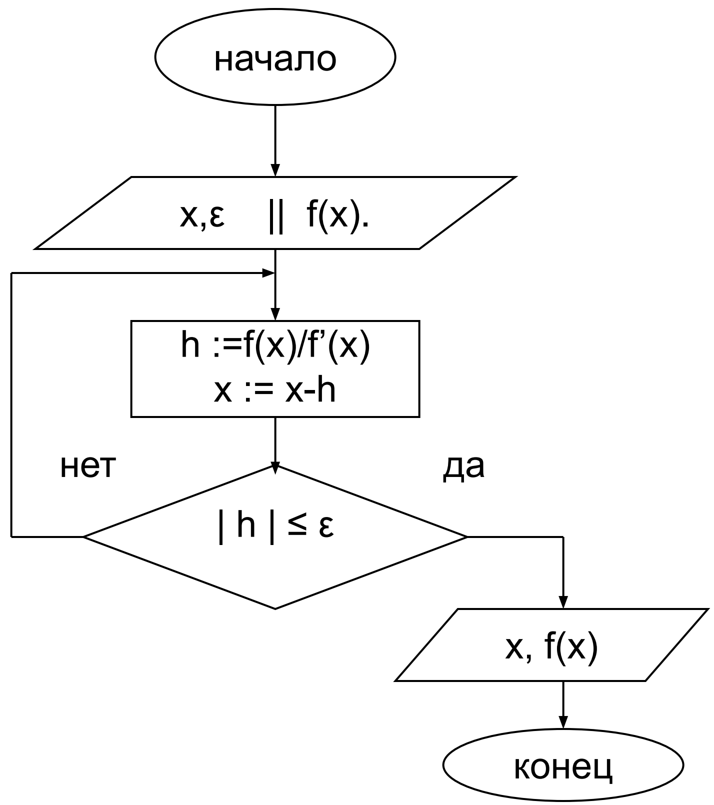
$$\operatorname{tg}(\beta) = f'(x^{(k-1)}) = \frac{f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}} \qquad x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{k-1)})}$$

За начальное приближение к корню $x^{(0)}$ принимаем одну из границ отрезка [a; b], содержащего один корень.

алгоритм

1. Задаем функцию f(x) отрезок [a;b] и точность ε. За начальное приближение x принимаем одну из границ заданного отрезка [a,b] x=a.
2. Вычисляем значение шага h= f(x)/f′(x) и новое приближение, как x = x-h.
3. Проверяем условие окончания если | h | ≤ ε, то выводим последнее значение x и f(x). Иначе перейдем на пункт 2

Блок-схема



Пример

a = -1.6 b = -1.2 ε = 0.01 f(x)=3sin(2x) -1.5x-1 f'(x)=6cos(2x) -1.5 x=a= -1.6

$x^{(k-1)}$	$f(x^{(k-1)})$	$f'(x^{(k-1)})$	h	$x^{(k)}$
-1,6	1,5751	-7,4898	-0,2103	-1,3897
-1,3897	0,0216	-7,1107	-0,0030	-1,3867

Ответ: x = 1,387± 0.01 f(x)=0,00002

```
[x,y]=fzero(@f,[a,b],e)

f=inline('x^3-4.790*x^2-3.246*x+12.597');
[x,y]=fzero(f,[a,b],e)
```