

Тема 2.2. Неопределенный и определенный интегралы и их свойства.

Применение определенного интеграла к решению прикладных задач

Преподаватель. Баева Ольга Анатольевна

План.

- 1. Первообразная. Правила отыскания первообразных.
- 2. Неопределенный интеграл. Правила интегрирования.
- 3. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
- 4. Свойства определенного интеграла.
- 5. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

3.1. Первообразная. Правила отыскания первообразных.

Опр 1. Функцию $y = F(x)$ называют *первообразной* для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке X , если для всех x из X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Приведем примеры.

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y = 3x^2$, поскольку для всех справедливо равенство $(x^3)' = 3x^2$.

Таблица первообразных.

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	C
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$ (при $x > 0$)
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$

Правила отыскания первообразных.

Правило 1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.

$$Y = F(x) + G(x)$$

Правило 2. Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.

$$F(kx) = kF(x)$$

Правило 3. Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то первообразной для функции $y = f(kx + m)$ служит функция $y = 1/k(kx + m)$

$$\left(\frac{1}{k} F(kx + m) \right)' = \frac{kF'(kx + m)}{k} = f(kx + m).$$

ПРИМЕРЫ.

Пример 1. Найти первообразную для функции $y = 2x + \cos x$.

Первообразной для $2x$ служит x^2 , для $\cos x$ это $\sin x$, значит $F(x) = x^2 + \sin x$.

Пример 2. Найти первообразную для функции $y = 5 \sin x$.

Так как для $\sin x$ первообразная $-\cos x$, то $F(x) = -5 \cos x$

Пример 3. Найти первообразную для функции $y = \sin 2x$.

$$y = \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x), \text{ т.е. } y = \frac{-\cos 2x}{2}$$

3.2. Неопределенный интеграл. Правила интегрирования.

Теорема. Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X , то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все они имеют вид $y = F(x) + C$.

Опр 2. Если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке X первообразную $y = F(x)$, то множество всех первообразных, т. е. множество функций вида $y = F(x) + C$, называют **неопределенным интегралом от функции $y = f(x)$** и обозначают

$$\int f(x) dx$$

(читают: *неопределенный интеграл эф от икс дэ икс*).

Таблица основных неопределенных интегралов.

$$\int dx = x + C.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \in \mathbb{N}).$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Правила интегрирования.

Правило 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Правило 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Правило 3. Если $\int f(x) dx = F(x) + C,$

ТО $\int f(kx + m) dx = \frac{F(kx + m)}{k} + C.$

Пример 5. Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} \right) dx \quad ; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\cos^2 \left(3x - \frac{\pi}{3} \right)} ; \quad \text{в) } \int \sin^2 x dx$$

Решение. а) Воспользовавшись первым и вторым правилами интегрирования, получим

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} \right) dx = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 5 \int \frac{dx}{x^2}.$$

Теперь воспользуемся 3-й и 4-й формулами интегрирования:

$$3 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 5 \int \frac{dx}{x^2} = 3 \cdot 2\sqrt{x} - 5 \cdot \left(\frac{-1}{x} \right) + C.$$

В итоге получаем

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} \right) dx = 6\sqrt{x} + \frac{5}{x} + C.$$

б) Воспользовавшись третьим правилом интегрирования и 8-й формулой, получим

$$\int \frac{dx}{\cos^2 \left(3x - \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg} \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) + C.$$

в) Для непосредственного нахождения заданного интеграла у нас нет ни соответствующей формулы в таблице, ни соответствующего правила. В подобных случаях иногда помогают предварительно выполненные тождественные преобразования выражения, содержащегося под знаком интеграла.

Воспользовавшись тригонометрической формулой понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

получим

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int dx - \frac{1}{2} \cdot \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) + C = \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

3.3. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Определение 3. $\int_a^b f(x)dx$ называют определенным интегралом от функции $y=f(x)$ по отрезку $[a;b]$.

(читают интеграл от а до в эф от икс). Числа а и в называют пределами интегрирования (соответственно нижним и верхним).

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Приведенную формулу обычно называют формулой Ньютона—Лейбница в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646— 1716), получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно.

На практике вместо записи $F(b) - F(a)$ используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (ее называют иногда двойной подстановкой) и соответственно переписывают формулу Ньютона—Лейбница в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Вычисляя определенный интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку.

Пример 6. Вычислить $\int_{-1}^3 x^3 dx$.

Решение. Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int_{-1}^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Пример 7. $\int_{-1}^2 \frac{3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^2} dx$.

Решение. Здесь для отыскания первообразной удобнее воспользоваться знаком неопределенного интеграла, при этом полезно числитель дроби, содержащейся под знаком интеграла разделить почленно на ее знаменатель:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^2} dx &= \int \left(3x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= 3 \int x^2 dx + \int x dx + 2 \int dx + \int \frac{1}{x^2} dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + C = \\ &= x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Теперь вычислим определенный интеграл (при этом константу C можно опустить):

$$x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = 1,1$$

3.4. Свойства определенного интеграла.

Опираясь на формулу Ньютона—Лейбница, нетрудно обосновать некоторые свойства определенного интеграла.

Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Свойство 3. Если $a < c < b$, то

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(аддитивное свойство интеграла).

3.5. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Итак, площади S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что для всех x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leq f(x)$, вычисляется по формуле.

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5 - x$, $x = 1$, $x = 2$.

$$S = \int_1^2 ((5 - x) - x) dx = \int_1^2 (5 - 2x) dx = (5x - x^2) \Big|_1^2 = (5 \cdot 2 - 2^2) - (5 \cdot 1 - 1^2) = 2$$