Тема 2.2. Неопределенный и определенный интегралы и их свойства.

Применение определенного интеграла к решению прикладных задач

Преподаватель. Баева Ольга Анатольевна

План.

- 1. Первообразная. Правила отыскания первообразных.
- 2. Неопределенный интеграл. Правила интегрирования.
- 3. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
- 4. Свойства определенного интеграла.
- 5. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

3.1. Первообразная. Правила отыскания первообразных.

Опр 1. Функцию $y = F(x)$ называют ***первообразной*** для функции $y = f(x)$ на заданном промежутке X, если для всех x из X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Приведем примеры.

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y=3x^2$, поскольку для всех справедливо равенство $(x^3)'= 3x^2$.

Таблица первообразных.

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	C
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^n \ (n \in N)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$ (при $x > 0$)
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$

Правила отыскания первообразных.

Правило 1. Первообразная суммы равна сумме первообразных.

$$Y = F(x) + G(x)$$

Правило 2. Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.

$$\mathbf{F(kx)=kF(x)}$$

Правило 3. Если y = F(x) — первообразная для функции y = f(x), то первообразной для функции y = f(kx + m) служит функция y = 1/k(kx + m)

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+m)\right)' = \frac{kF'(kx+m)}{k} = f(kx+m).$$

ПРИМЕРЫ.

<u>Пример 1.</u> Найти первообразную для функции
$y = 2x + \cos x$.
Первообразной для $2x$ служит x^2, для $\cos x$ это $\sin x$, значит $F(x)=x^2+\sin x$.

<u>Пример 2.</u> Найти первообразную для функции
$y=5\sin x$.
Так как для $\sin x$ первообразная $-\cos x$, то
$F(x)=-5\cos x$

<u>Пример 3.</u> Найти первообразную для функции $y=\sin 2x$.

$$y = \frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x), т.е. y = \frac{-\cos 2x}{2}$$

3.2. Неопределенный интеграл. Правила интегрирования.

<u>Теорема.</u> Если y = F(x) — первообразная для функции y = f(x) на промежутке X, то у функции y = f(x) бесконечно много первообразных и все они имеют вид y=F(x)+C.

Опр 2. Если функция *y* = f(x) имеет на промежутке X первообразную *y = F(x),* то множество всех первообразных, т. е. множество функций видй *y =F(x) + C,* называют **неопределенным интегралом от функции *y*** = f(x) и обозначают

$$\int f(x)dx$$

(читают: *неопределенный интеграл эф от икс дэ икс).*

Таблица основных неопределенных интегралов.

$\int dx = x + C.$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \in N).$
$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
$\int \sin x dx = -\cos x + C.$
$\int \cos x dx = \sin x + C.$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

Правила интегрирования.

Правило 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Правило 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Правило 3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$

то $\int f(kx+m)dx = \frac{F(kx+m)}{k} + C.$

Пример 5. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)}$; в) $\int\sin^2 x dx$

Решение. а) Воспользовавшись первым и вторым правилами интегрирования, получим $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}\right)dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-5\int\frac{dx}{x^2}$.

Теперь воспользуемся 3-й и 4-й формулами интегрирования:

$$3\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-5\int\frac{dx}{x^2}=3\cdot2\sqrt{x}-5\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)+C.$$

В итоге получаем

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2}\right)dx=6\sqrt{x}+\frac{5}{x}+C.$$

б) Воспользовавшись третьим правилом интегрирования и 8-й формулой, получим

$$\int\frac{dx}{\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+C.$$

в) Для непосредственного нахождения заданного интеграла у нас нет ни соответствующей формулы в таблице, ни соответствующего правила. В подобных случаях иногда помогают предварительно выполненные тождественные преобразования выражения, содержащегося под знаком интеграла.

Воспользовавшись тригонометрической формулой понижения степени $\sin^2 x=\frac{1-\cos2x}{2}$

получим

$$\int\sin^2 x dx=\int\frac{1-\cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\int(1-\cos2x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int dx-\frac{1}{2}\cdot\int\cos2x dx=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin2x\right)+C=$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x+C.$$

3.3. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Определение 3. $\int_a^b f(x)dx$ *называют определенным интегралом от функции y=f(x) по отрезку [a;b].*

(читают интеграл от a до b эф от икс). Числа a и b называют пределами интегрирования (соответственно нижним и верхним).

Теорема. *Если функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то справедлива формула*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),}$$

где F(x) — первообразная для f(x).

Приведенную формулу обычно называют формулой Ньютона—Лейбница в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646— 1716), получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно.

На практике вместо записи F(Ь) — F(a) используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (ее называют иногда двойной подстановкой) и соответственно переписывают формулу Ньютона—Лейбница в виде

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.}$$

Вычисляя определенный интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку.

Пример 6. Вычислить $\int_{-1}^{3} x^3dx.$

Решение. Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int_{-1}^{3} x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Пример 7. $\int_{-1}^{2} \frac{3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}dx.$

Решение. Здесь для отыскания первообразной удобнее воспользоваться знаком неопределенного интеграла, при этом полезно числитель дроби, содержащейся под знаком интеграла разделить почленно на ее знаменатель:

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}dx = \int\left(3x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= 3\int x^2dx + \int xdx + 2\int dx + \int \frac{1}{x^2}dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + C =$$

$$= x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + C.$$

Теперь вычислим определенный интеграл (при этом константу С можно опустить):

$$x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x}\Big|_{1}^{2} = 1{,}1$$

3.4. Свойства определенного интеграла.

Опираясь на формулу Ньютона—Лейбница, нетрудно обосновать некоторые свойства определенного интеграла.

Свойство 1. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:*

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.}$$

Свойство 2. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\boxed{\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Свойство 3. *Если $a < c < b$, то*

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$

(аддитивное свойство интеграла).

3.5. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Итак, площади S фигуры, ограниченной прямыми x = a, x = b и графиками функций y = f(x), y = g(x), непрерывных на отрезке [a; b] и таких, что для всех x из отрезка [a; b] выполняется неравенство g(x) ≤ f(x), вычисляется по формуле.

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.}$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y = x, y = 5-x, x = 1, x=2.

$$S = \int_1^2 ((5 - x) - x)dx = \int_1^2 (5 - 2x)dx = (5x - x^2)\Big|_1^2 = (5 \cdot 2 - 2^2) - (5 \cdot 1 - 1^2) = 2$$