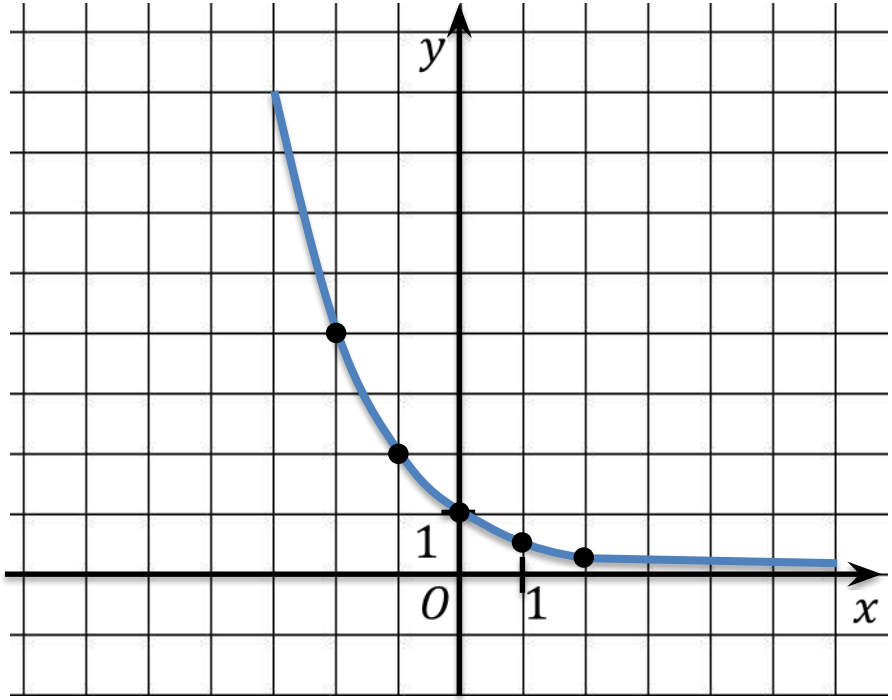
Показательные уравнения

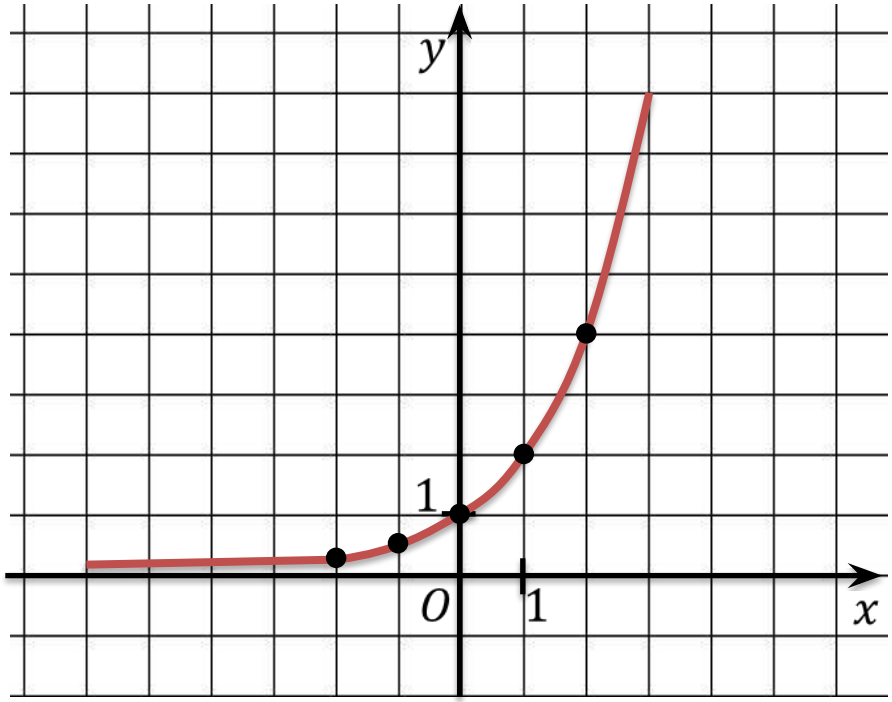
Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют **показательной функцией**.

Возрастает	Убывает
Непрерывна	Непрерывна

$y = a^x, 0 < a < 1$



$y = a^x, a > 1$



Экспонент

- **Показательными уравнениями** называют уравнения вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

и уравнения, сводящиеся к этому виду.

- Равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример:

Решить уравнение $2^x = \frac{1}{64}$.

Решение:

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$2^x = 2^{-6}$$

$$x = -6$$

Ответ: $x = -6$.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример:

Решить уравнение $2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{x-3} = \frac{1}{2}$.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Решение:

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{x-3} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{x-3} = 2^{1+\frac{1}{2}+x-3} = 2^{x-1,5}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$2^{x-1,5} = 2^{-1}$$

$$x - 1,5 = -1$$

$$x = 0,5$$

Ответ: $x = 0,5$.

Пример:

Решить уравнение $5^{x^2-2x-1} = \frac{1}{25}$.

Решение:

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$$

$$5^{x^2-2x-1} = 5^{-2}$$

$$x^2 - 2x - 1 = -2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

Пример:

Решить уравнение $2^x = 3^x$.

Решение:

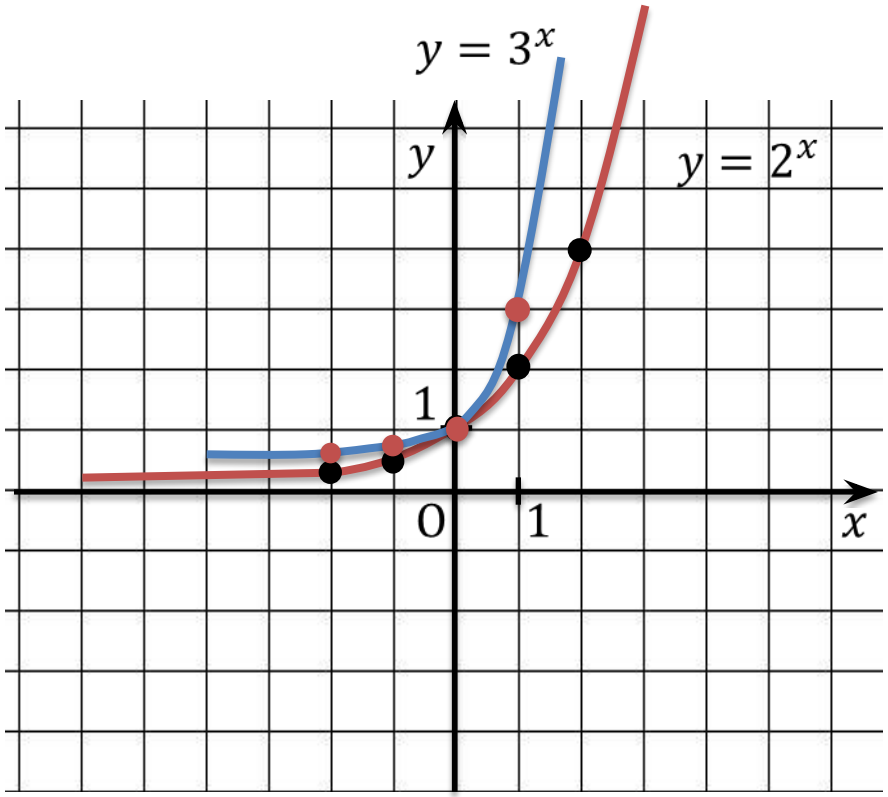
$$\frac{2^x}{2^x} = \frac{3^x}{2^x}$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$x = 0$$



Пример:

Решить уравнение $3^x - 3^{x+3} = -78$.

Решение:

$3^x - 3^{x+3} = 3^x - 3^x \cdot 3^3 = 3^x - 27 \cdot 3^x = -26 \cdot 3^x$

$-26 \cdot 3^x = -78$

$3^x = 3$

$3^x = 3^1$

$x = 1$

Ответ: $x = 1$.

Пример:

Решить уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \sqrt{\frac{27}{125}}$.

Решение:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

$$\sqrt{\frac{27}{125}} = \sqrt{\frac{3^3}{5^3}} = \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Пример:

Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение:

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$

$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$

$y = 2^x$

$y^2 + 2y - 24 = 0$

$D = 4 + 96 = 100 \Rightarrow y_1 = \dfrac{-2+10}{2} = 4;\ y_2 = \dfrac{-2-10}{2} = -6$

$2^x = 4$ или $2^x = -6$ – нет решений

$x = 2$

Основные методы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод уравнивания показателей.
3. Метод введения новой переменной.