Показательные уравнения

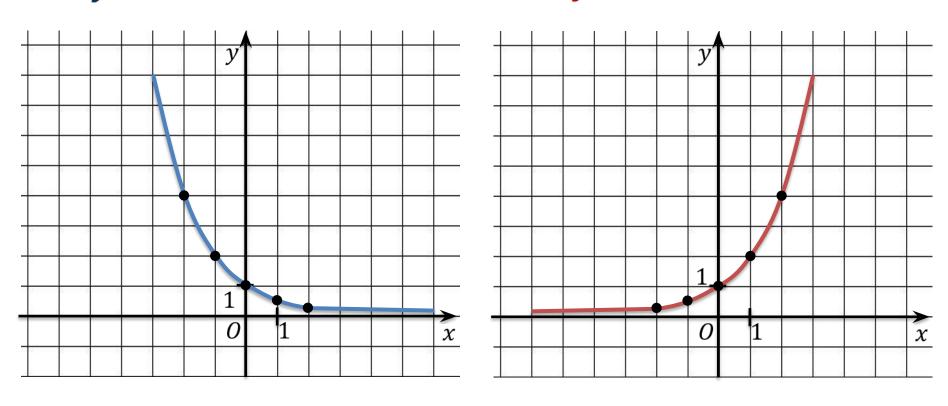
Функцию вида $y = a^x$, где a > 0 и $a \neq 1$, называют показательной функцией.

Возрастает Непрерывна

Убывает Непрерывна

$$y = a^x$$
, $0 < a < 1$

$$y = a^x, a > 1$$



Экспонент

Показательными уравнениями называют уравнения вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда t = s.

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где a > 0, $a \ne 1$) равносильно уравнению f(x) = g(x).

Решить уравнение $2^x = \frac{1}{64}$.

Решение:

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$2^x = 2^{-6}$$

$$x = -6$$

Ответ: x = -6.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \ne 1$) равносильно уравнению f(x) = g(x).

Решить уравнение
$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{x-3} = \frac{1}{2}$$
.

Решение:

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{x-3} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{x-3} = 2^{1+\frac{1}{2}+x-3} = 2^{x-1,5}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$2^{x-1,5} = 2^{-1}$$

$$x - 1,5 = -1$$

$$x = 0.5$$

Ответ: x = 0.5.

Показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (где a > 0, $a \neq 1$) равносильно уравнению f(x) = g(x).

$$=2^{x-1,5}$$

Решить уравнение $5^{x^2-2x-1} = \frac{1}{25}$.

Решение:

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$$

$$5^{x^2 - 2x - 1} = 5^{-2}$$

$$x^2 - 2x - 1 = -2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

Ответ: x = 1.

Решить уравнение $2^x = 3^x$.

Решение:

$$\frac{2^{x}}{2^{x}} = \frac{3^{x}}{2^{x}}$$

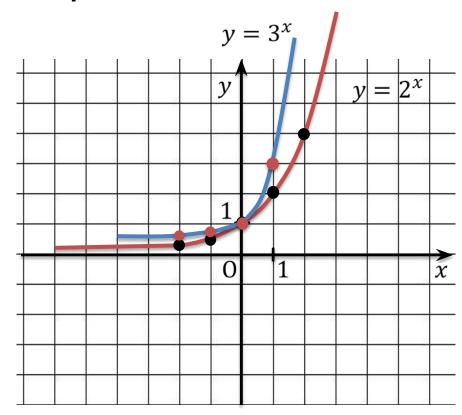
$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{0}$$

$$(3)^{0}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$x = 0$$



Решить уравнение $3^x - 3^{x+3} = -78$.

Решение:

$$3^x - 3^{x+3} = 3^x - 3^x \cdot 3^3 = 3^x - 27 \cdot 3^x = -26 \cdot 3^x$$

$$-26 \cdot 3^x = -78$$

$$3^{x} = 3$$

$$3^x = 3^1$$

$$x = 1$$

Ответ: x = 1.

Решить уравнение
$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \sqrt{\frac{27}{125}}$$
.

Решение:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

$$\sqrt{\frac{27}{125}} = \sqrt{\frac{3^3}{5^3}} = \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)$$

Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение:

$$4^{x} = (2^{2})^{x} = 2^{2x} = (2^{x})^{2}$$
$$2^{x+1} = 2 \cdot 2^{x}$$
$$(2^{x})^{2} + 2 \cdot 2^{x} - 24 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$y=2^x$$

$$y^2 + 2y - 24 = 0$$

$$D = 4 + 96 = 100 \Rightarrow y_1 = \frac{-2 + 10}{2} = 4; \ y_2 = \frac{-2 - 10}{2} = -6$$

$$2^x = 4$$
 или $2^x = -6$ – нет решений

$$x = 2$$

Основные методы решения показательных уравнений:

- 1. Функционально-графический метод.
- 2. Метод уравнивания показателей.
- 3. Метод введения новой переменной.