Статистическая обработка данных физического эксперимента

(Для ИДЗ по прямым и косвенным измерениям)

Небольшое вступление

Так как мы с вами, в первую очередь, будущие инженеры, то так или иначе мы будем сталкиваться с различными измерениями чего-либо. Наш мир не идеален, как и установки, на которых проводятся измерения и необходимо понимать насколько далеко мы от этого самого “идеала”. Для этого силами математической статистики были получены алгоритмы, благодаря которым мы можем это понять и оценить.

Измерения

- *Измерение* – это нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств и выражение полученного результата в принятых единицах.
- *Прямым* называется *измерение*, при котором значение измеряемой величины непосредственно считывается со шкалы прибора, проградуированного в соответствующих единицах измерения.
- *Косвенным* называется *измерение*, результат которого определяют на основании прямых измерений величин, связанных с измеряемой величиной известной зависимостью.

$\boxed{y = f(x_1, x_2, \dots, x_i)}$ – уравнение косвенных измерений

Погрешности

Важно понимать, что из-за не идеальности установок результаты эксперимента получаются различными (бывает и совпадения некоторых результатов, но не совпадение всех результатов одновременно) и как-то отличаются от “истинного” значения (на деле узнать истинное значение на практике нельзя, а потому силами всё той же математической статистики ищут приближённое к истинному значение). Для этого и вводят понятие погрешности.

Из-за каких факторов, в основном, получаются погрешности я прошу прочитать в методичке на сайте кафедры физики ЛЭТИ в файле с названием *Experiment2016.pdf*, чтобы не громоздить водой презентацию.

Погрешность измерения — отклонение измеренного значения величины от её истинного (действительного) значения.

Погрешность измерения делят на абсолютную и относительную погрешности:

а) *Абсолютна погрешность* - это погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины.

б) *Относительная погрешность* - это погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности к результату измерения.

Прямые измерения

Начнём с самого простого для обработки вида измерений, а именно с прямых измерений. Рассмотрим такую выборку результатов измерения сопротивления резистивного элемента:

	1835	1832	1828	1830	1832

С = 1
Ом

Алгоритм обработки такого вида измерений прост. Сначала посмотрите на свою выборку и упорядочите её в порядке возрастания элементов:

	1828	1830	1832	1832	1835

- Затем, делаем проверку на промахи. Для этого соседние элементы вычитаем друг из друга и сравниваем с произведением статистического коэффициента $U_{P,N}$ на размах выборки (разность между минимальным и максимальным элементами выборки). Если разность превосходит произведение коэффициента на размах, то элемент убирается из выборки и обработка начинается с начала с новыми коэффициентами (таблицу со статистическими коэффициентами я оставлю в виде фотографии в беседе) и новой выборкой.

Доверительную вероятность P задают равной 95% для технических расчётов и физических экспериментов.

	2	2	0	3	

0

Затем, необходимо вычислить среднее арифметическое элементов выборки:

$$\overline{R} = \frac{1828+1830+1832+1832+1835}{5} = 1831.4$$

Затем необходимо найти разности между каждым элементом выборки и средним арифметическим:

	-3.4	-1.4	0.6	0.6	3.6	

Далее полученные результаты возводим в квадрат и суммируем:

	11.56	1.96	0.36	0.36	12.96	

0После проделанных махинаций остаётся совсем ничего.

Находим среднеквадратическое отклонение (СКО):

$$S_{\overline{R}} = \sqrt{\frac{\sum(\Delta R_i)^2}{N(N-1)}}$$ (N − количество элементов в выборке)

$$S_{\overline{R}} = \sqrt{\frac{27.2}{5 \cdot 4}} \approx 1.16619038$$

Найдём случайную погрешность двумя способами:

а) По коэффициенту Стьюдента и СКО:

$$\Delta R = t_{P,N} \cdot S_{\overline{R}}$$

$$\Delta R = 2.8 \cdot 1.16619038 \approx 3.26533306$$

б) По размаху выборки:

$$\Delta R_{\beta} = \beta_{P,N} \cdot R$$

$$\Delta R_{\beta} = 0.51 \cdot 7 = 3.57$$

$$\Delta R_{\beta} \approx \Delta R$$

НО! Для дальнейшего расчёта берём именно случайную погрешность, рассчитанную первым способом!

0

Найдём полную погрешность:

$$\Delta\overline{R} = \sqrt{(\Delta R)^2 + \theta^2}$$

Приборная погрешность в данном ИДЗ рассчитывается просто как половина цены деления:

$$\theta_R = \frac{c}{2}$$

$$\Delta\overline{R} = \sqrt{(3.26533306\ )^2 + (0.5)^2} \approx 3.30339219$$

0 Осталось просто записать ответ. Прежде чем его записать необходимо округлить полученную полную погрешность, а затем и среднее значение:

$$R = \overline{R} \pm \Delta\overline{R}$$

$$R = 1831.4 \pm 3.3 \text{ Ом}, \qquad P = 95\%$$

Отличной проверкой всей обработки будет нахождение относительной погрешности. Если значение относительной погрешности не преувеличивает 10-15%, то обработка прошла успешно.

$$\delta = \frac{\Delta\overline{R}}{\overline{R}} \cdot 100\%$$

$$\delta = \frac{3.3}{1831.4} \cdot 100\% \approx 0.18\%$$

Более компактно всю нашу работу можно уместить таким образом:

Таблица 1.

x_i						$\theta_x =$
$x\uparrow_i$						$\bar{x} =$ $R = x\uparrow_N - x\uparrow_1 =$
$U_i = x_{i+1} - x_i$						$U_i < U_{P,N} R =$
$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$						$\sum \Delta x_i = 0$
$(\Delta x_i)^2$						$\sum (\Delta x_i)^2 =$

$S_{\bar{x}} = \sqrt{\sum (\Delta x_i)^2 / N(N-1)} =$, $\Delta x = t_{P,N} S_{\bar{x}} =$, $\Delta x_\beta = \beta_{P,N} R =$, $\Delta x \approx \Delta x_\beta$,

$\Delta \bar{x} = \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2} =$, $x = \bar{x} \pm \Delta \bar{x} =$, $P = 95\,\%$, $N =$.

Таблицы статистических коэффициентов

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{P,N}$ в зависимости от числа наблюдений N при доверительной вероятности $P = 95$ %:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$t_{P,N}$, P=95 %	12.7	4.3	3.2	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.0
$t_{P,N}$, P=68 %	2.0	1.4	1.3	1.2	1.2	1.1	1.1	1.1	1.1	1.0

Коэффициенты $\beta_{P,N}$ для расчета доверительной погрешности по размаху выборки $\Delta x = \beta_{P,N} R$ для числа наблюдений N доверительной вероятности $P = 95$ %:

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta_{P,N}$	1.30	0.72	0.51	0.40	0.33	0.29	0.25	0.23	0.21	0.19

Коэффициенты $u_{P,N}$ для проверки результатов наблюдений на наличие грубых погрешностей в зависимости от объема выборки N для доверительной вероятности $P = 95$ %:

N	3	4	5	7	10	15	20	30	100
$u_{P,N}$	0.94	0.76	0.64	0.51	0.41	0.34	0.30	0.26	0.20

Коэффициенты $v_{P,N}$ для проверки элементов выборки на наличие грубых погрешностей в зависимости от объёма выборки N при доверительной вероятности $P = 95$ %:

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$v_{P,N}$	1.15	1.46	1.67	1.82	1.94	2.03	2.11	2.18	2.23	2.29

Производные элементарных функций:

Функция	Производная
x^n	nx^{n-1}
e^{ax}	ae^{ax}
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1 / x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Функция	Производная
$\operatorname{tg} x$	$1 / \cos^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$-1 / \sin^2 x$
$(u + v)'$	$u' + v'$
$(uv)'$	$u'v + uv'$
$(u / v)'$	$(u'v - uv') / v^2$
$f = f(u(x))$	$f'_x = f'_u u'_x$