



Информатика
Учебный год 2016/2017
Кафедра ВТ Университета ИТМО
Соснин В.В., Балакшин П.В.

Лекция 6

Помехоустойчиво е кодирование

Организационные моменты

- Дополнительные задания (СНО, github, ОСW).
- «Критерий бабушки» vs «Критерий Пушкина».
- Рубежное тестирование 24 октября (взять с собой только две ручки).

5 сент.	118
12 сент.	112
19 сент.	102
3 окт.	95
19.дек	49

Причины сбоев памяти

Причины единичных битовых ошибок:

- Альфа-частицы от примесей в чипе микросхемы.
- Нейтроны из фонового космического излучения.

Частота единичных битовых ошибок (на 1 GB):

- От 1 раза в час до 1 раза в тысячелетие (по данным исследования Google получилось 1 раз в сутки)

Как бороться:

1. Бит чётности.
2. Тройная модульная избыточность.
3. Код Хэмминга.
4. Одновременно 1 и 3 (SECDED).

Вспомним прошлую лекцию...

- **Код Хэмминга (КХ)** – блочный равномерный делимый самокорректирующийся код.
- **Назначение КХ** – исправление одиночных битовых ошибок, возникших при передаче или хранении данных.
- На каждые i информационных бит используется r проверочных.



**Ричард Уэсли
Хэмминг
(1915-1998)**

Пример КХ для $r = 2$

r_1 – бит чётности, проверочный разряд №1

r_2 – проверочный разряд №2

Рассмотрим все
возможные варианты
попарных сумм

$$i = r_1 = r_2$$

$$s_1 = i \oplus r_1$$

$$s_2 = i \oplus r_2$$

i_ис	r1_ис	r2_ис	s1	s2
x	x	x		
1	1	1	0	0

Синдром последовательности $S (s_1, s_2)$

– набор контрольных сумм

информационных и проверочных

разрядов

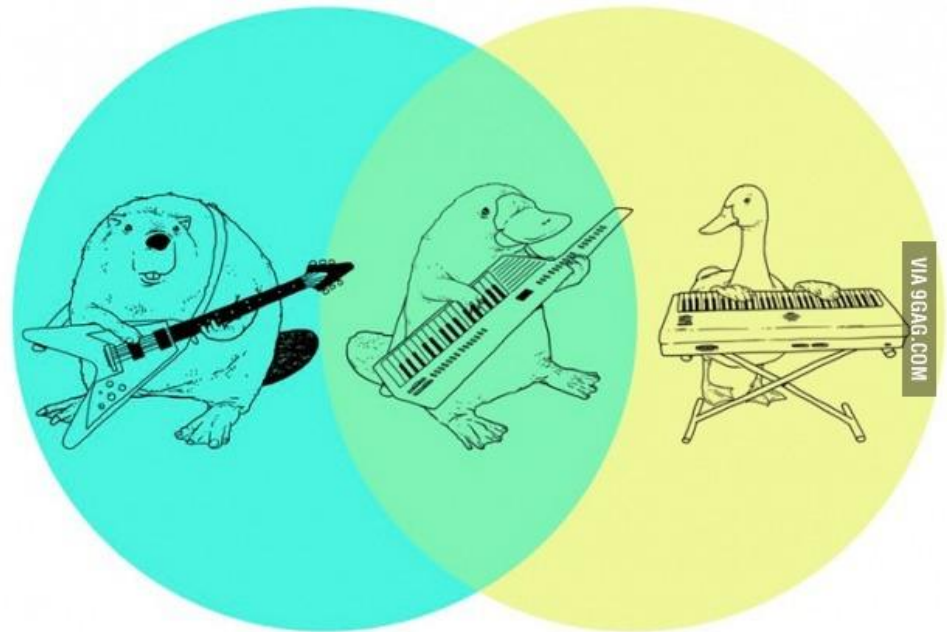
Пример КХ для $r = 3$

r1	r2	r3	i1	i2	i3	i4
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

$$r_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4$$

$$r_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$r_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$



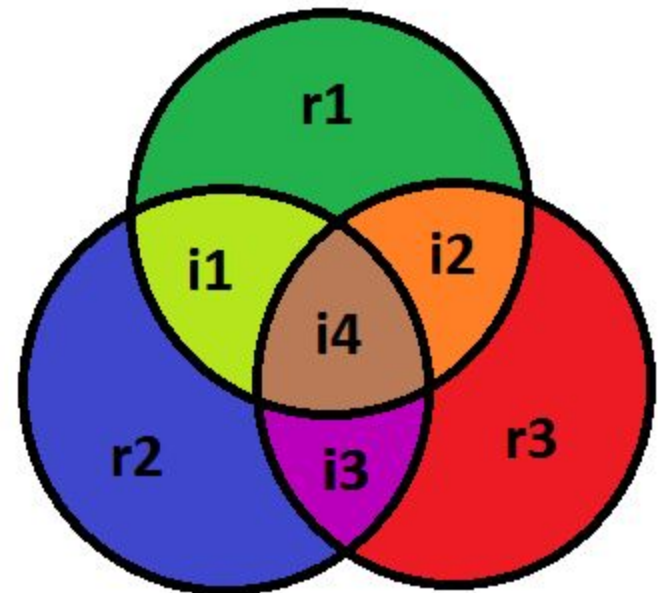
Пример КХ для $r = 3$

r1	r2	r3	i1	i2	i3	i4
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

$$r_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4$$

$$r_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$r_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$



КХ для $r = 3$.

Пояснения

	1	2	3	4	5	6	7	
	r1	r2	i1	r3	i2	i3	i4	S
1								s1
2								s2
4								s3

$$r_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4$$

$$r_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$r_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$s_1 = r_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_4$$

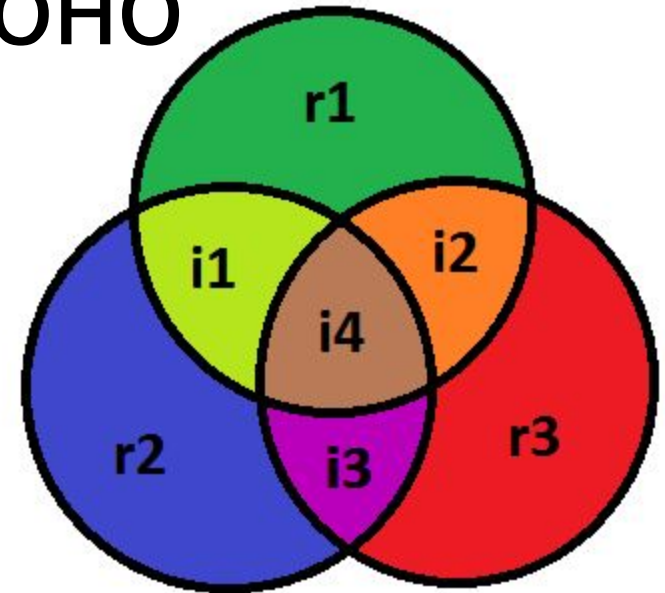
$$s_2 = r_2 \oplus i_1 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$s_3 = r_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$

Синдром (s1, s2, s3)	000	001	010	011	100	101	110	111
Конфигурация ошибок (позиция в сообщении)	НЕТ	0001000	0100000	0000010	1000000	0000100	0010000	0000001
Ошибка в символе	НЕТ	r_3	r_2	i_3	r_1	i_2	i_1	i_4

КХ для $r = 3$. Подробно

	1	2	3	4	5	6	7	
Пример результатирующ его сообщения	1	1	1	0	0	0	1	
	r1	r2	i1	r3	i2	i3	i4	s
1								s1
2								s2
4								s3



$$r_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = r_{1_ИСХ} = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$r_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_{2_ИСХ} = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$r_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_{3_ИСХ} = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$s_1 = r_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = r_{1_РЕЗ} \oplus r_{1_ИСХ} = 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_2 = r_2 \oplus i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_{2_РЕЗ} \oplus r_{2_ИСХ} = 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_3 = r_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_{3_РЕЗ} \oplus r_{3_ИСХ} = 0 \oplus 1 = 1$$

Пример КХ для $r = 4$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	r1	r2	i1	r3	i2	i3	i4	r4	i5	i6	i7	i8	i9	i10	i11	S
1																s1
2																s2
4																s3
8																s4

По таблице видно, за какие информационные биты отвечает каждый проверочный бит: контрольный бит с номером N контролирует все последующие N бит через каждые N бит, начиная с позиции N

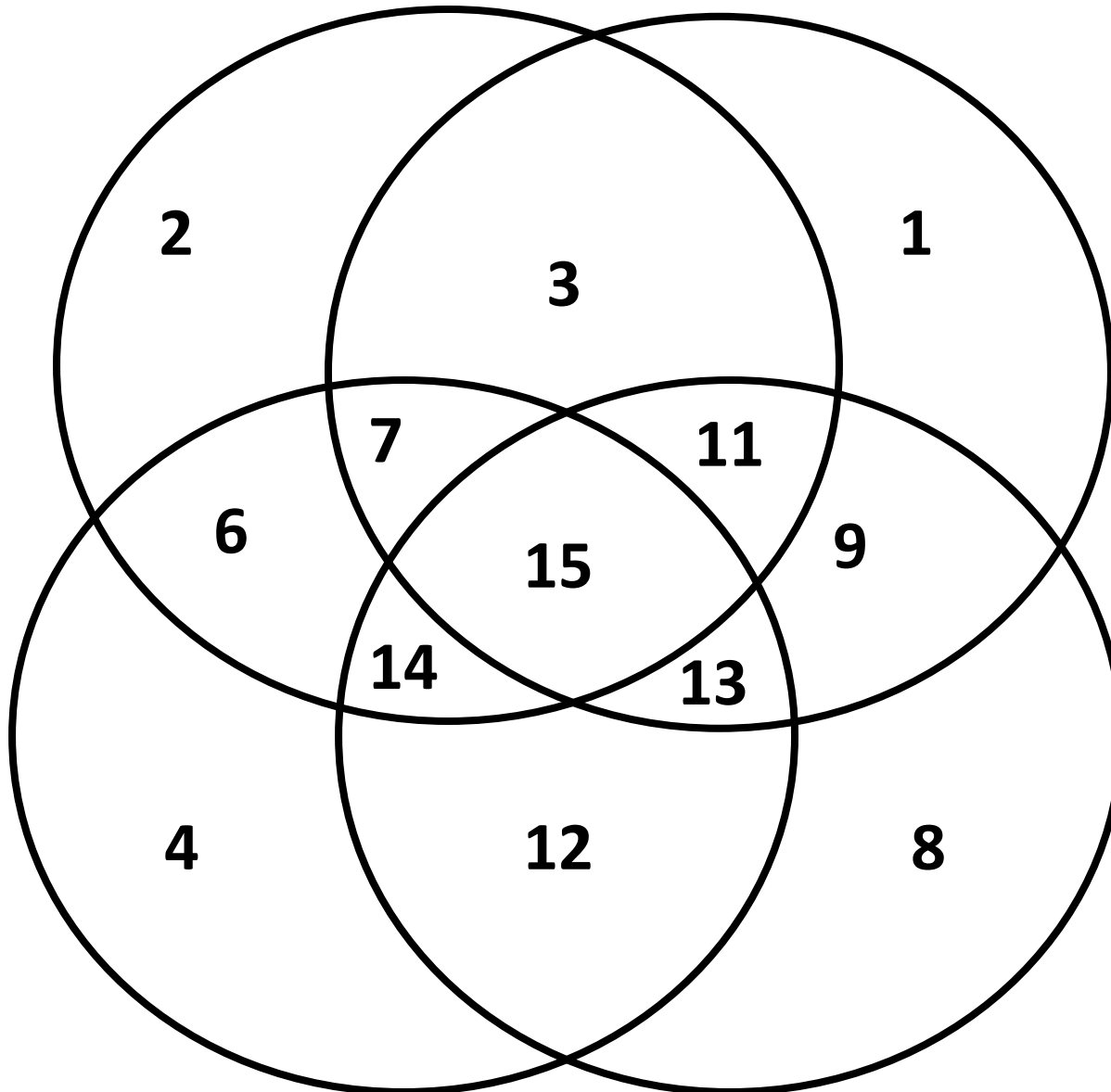
Аналогично с ошибочным битом.

Пример №1: Имеем синдром S (0,0,1,1). Проверяем, за какой бит отвечают только $r3$ и $r4$. Ответ: $i8$ (12-й символ сообщения).

Диаграмма Венна для КХ для $r = 4$

10?

5?



Определение минимального количества контрольных разрядов:

$$2^r \geq r + i + 1$$

Диапазон информационных разрядов i	Минимальное количество контрольных разрядов r
1	2
2-4	3
5-11	4
12-26	5
27-57	6

Классические коды Хэмминга с маркировкой (n, i) :
 $(7, 4)$; $(15, 11)$; $(31, 26)$

r

Коэффициент избыточности =

 $i + r$

Схема кодирования КХ

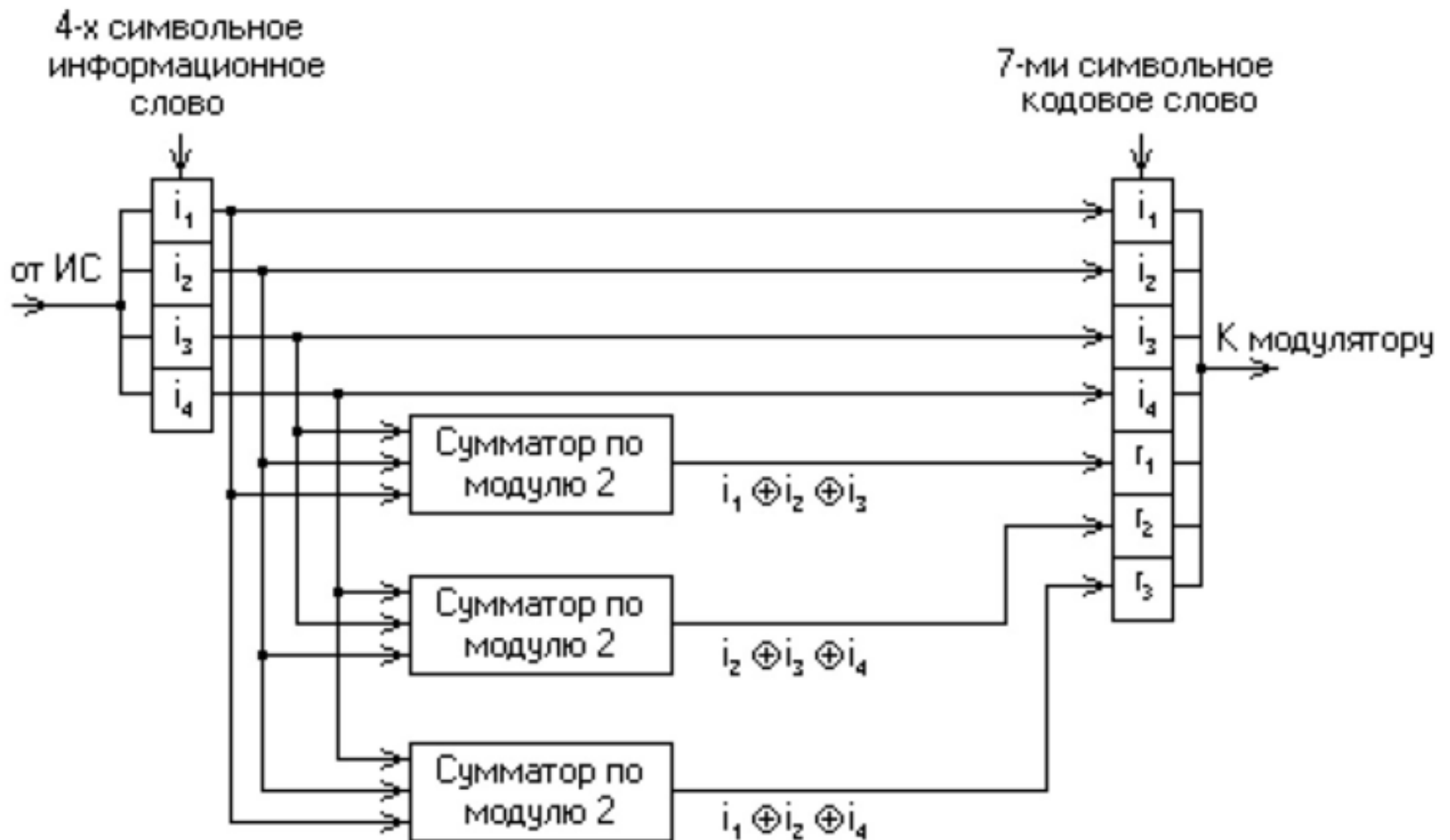
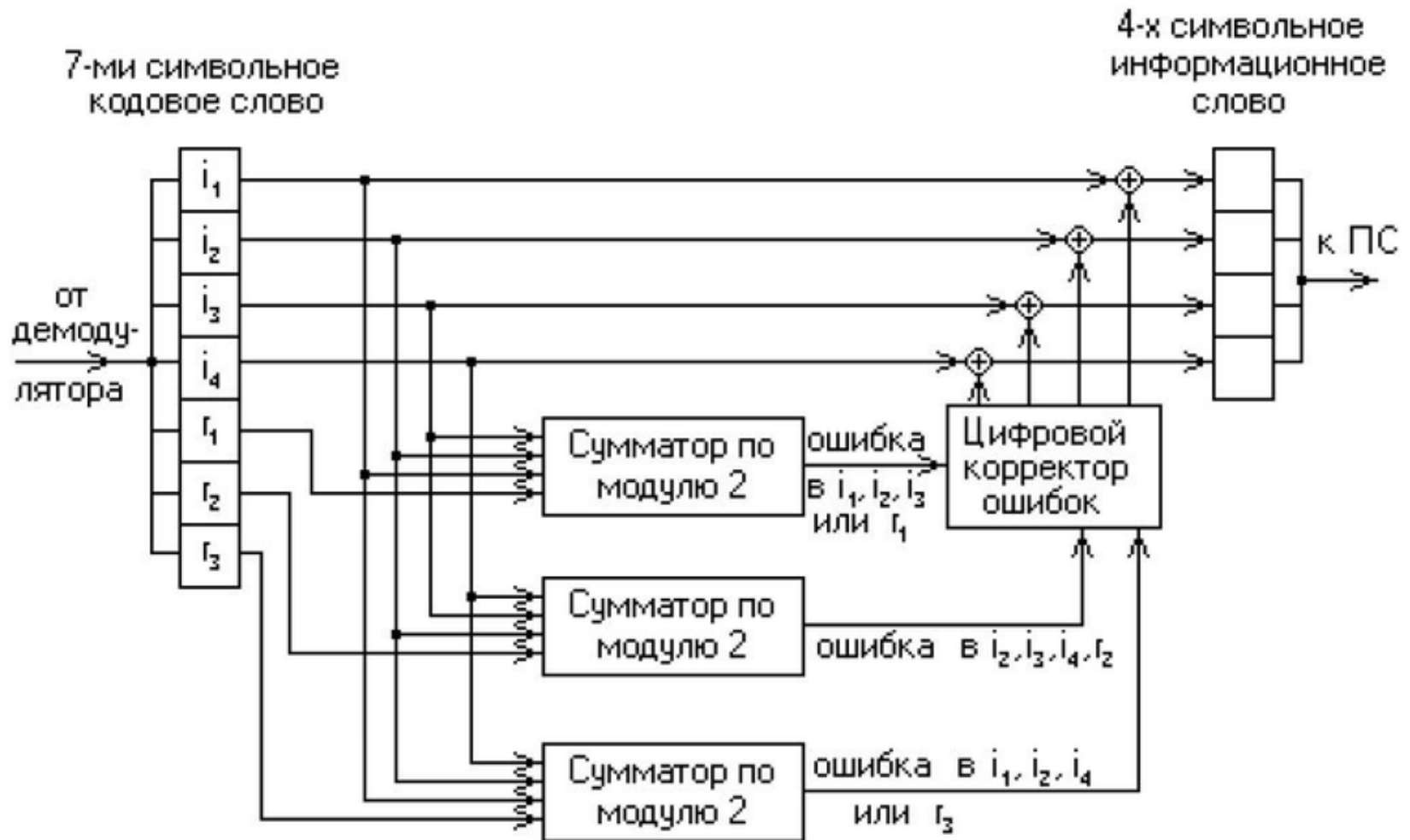


Схема декодирования КХ



Расстояние Хэмминга

- **Расстояние Хэмминга (РХ)** – количество символов, которое надо изменить в одном слове, чтобы получить другое (применяется к измерению расстояния между двумя словами в коде постоянной длины).
- **Кодовое расстояние (d)** – минимальное РХ среди всех слов алфавита в коде постоянной длины.

Количество обнаруживаемых ошибок = $(d - 1)$.

Количество исправляемых ошибок = $\text{floor}((d - 1)/2)$.

Дополнительная литература

- <http://habrahabr.ru/post/140611/>
- http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%B4_%D0%A5%D1%8D%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%B0
- http://en.wikipedia.org/wiki/Hamming_code