

Лекция 6

Колебания

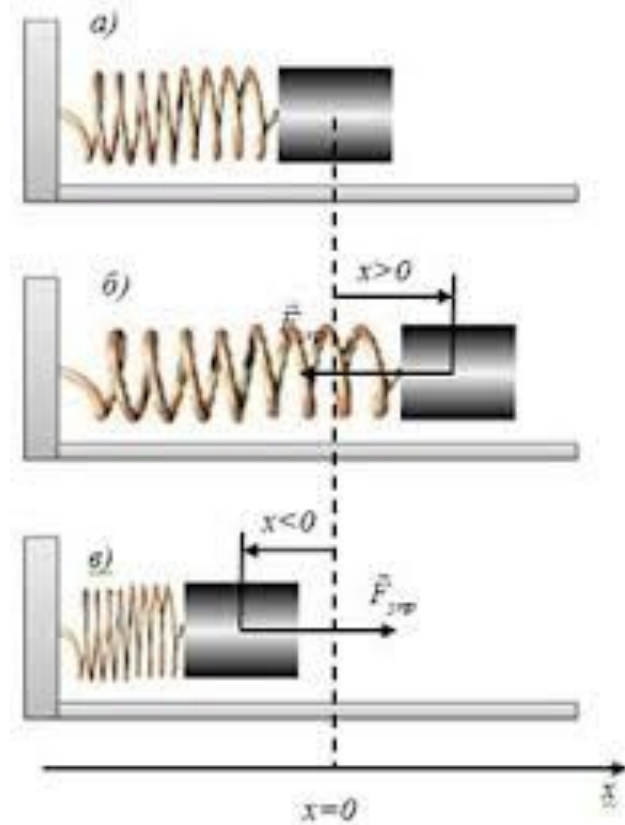
Эпиграф

*Постоянные
колебания
приличны
только
маятнику
Козьма Прутков*



Малые гармонические колебания

- Пусть колебания совершает тело, расположенное на плоском столе. К телу прикреплена пружина, второй конец которой прикреплен к тяжелой стене. Деформации пружины упругие, возвращающая сила подчиняется закону Гука $F = -kx$, где k – коэффициент упругости, x – смещение тела относительно положения равновесия. Трением об стол и сопротивлением воздуха мы пренебрегаем. Масса тела равна m .



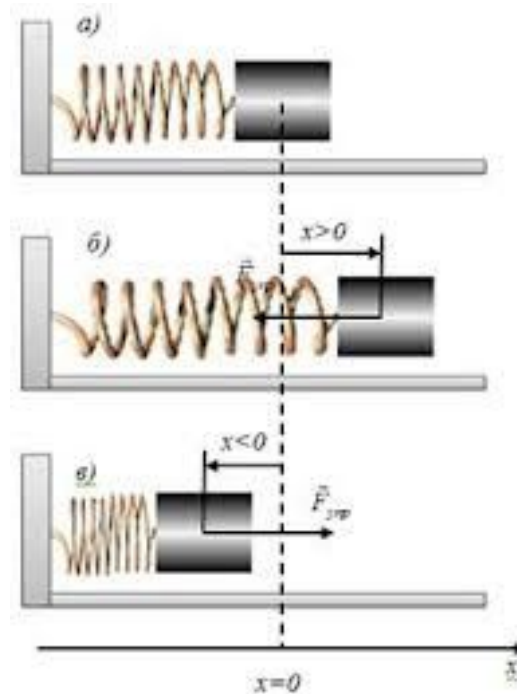
Малые гармонические колебания

- Основное уравнение динамики для этого процесса

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$



Малые гармонические колебания

- Введем обозначение $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Тогда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Основное уравнение малых гармонических колебаний

Малые гармонические колебания

-

Решение 1

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

C_1 и C_2 – константы

Решение 2

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

A, φ_0 – амплитуда и фаза колебаний.

$\omega = 2\pi/T$ – частота колебаний

Малые гармонические колебания

- Связь между решениями 1 и 2 найдем с помощью известного тригонометрического соотношения:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Решение 1 можно выразить как

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin\omega t \right).$$

Откуда

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \sin\varphi_0 = -\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{C_2}{C_1}$$

Малые гармонические колебания

Константы находят из начальных условий – координаты и скорости тела в начальный момент времени.

Рассмотрим два простых примера.

А). Тело переместили из положения равновесия в положение x_0 и отпустили без начальной скорости. В этом случае $A = x_0, \varphi_0 = 0$. Окончательно имеем

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

Б). В положении равновесия телу сообщили скорость v_0 . В этом случае

$$A \cos(\varphi_0) = 0 \rightarrow \varphi_0 = \pi/2,$$
$$v_0 = -\omega A \sin(\pi/2) \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega}.$$

В итоге получаем:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Малые гармонические колебания

- Кинетическая энергия колеблющегося тела

$$K = \frac{mv^2}{2},$$

Потенциальная энергия

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Полная энергия колебаний

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Малые гармонические колебания

Полученные уравнения колебаний могут быть применены к другим колебательным процессам.

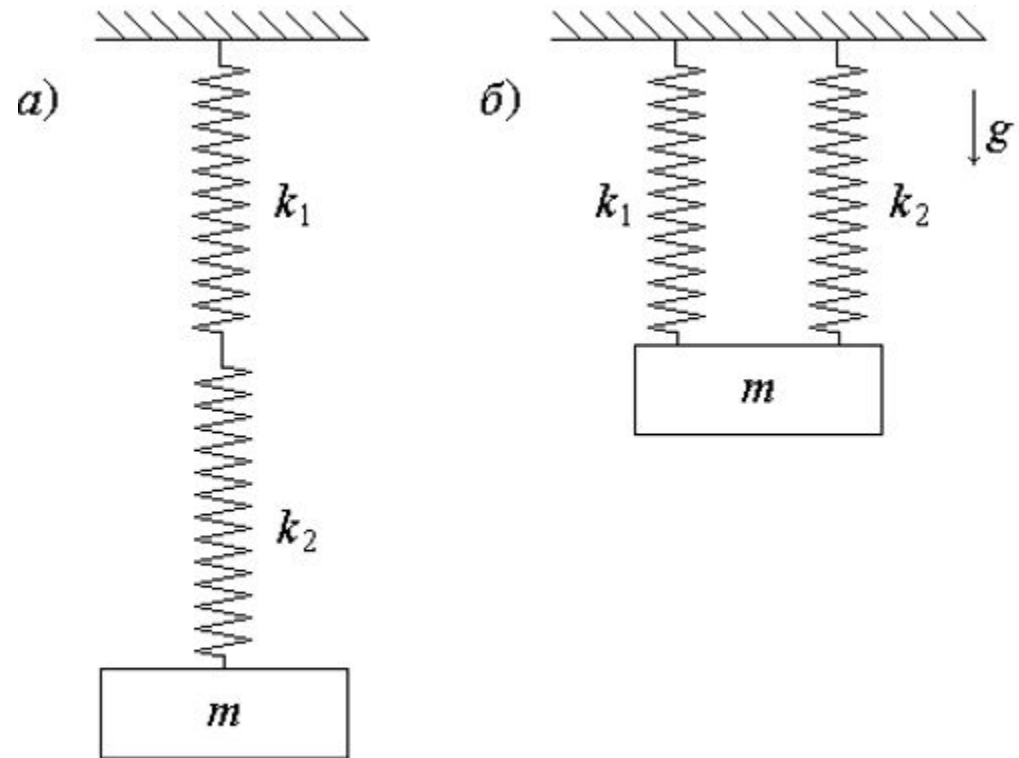
Если основное уравнение динамики может быть сведено к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

то дальнейшее решение задачи будет аналогично приведенному выше.

Пример1 – Две пружины

- Рассмотрим колебания груза массой m подвешенного к двум пружинам, соединенным: а) последовательно, б) параллельно. Нашей задачей будет определение частоты колебаний груза, если коэффициенты жесткости пружин равны k_1 и k_2 .



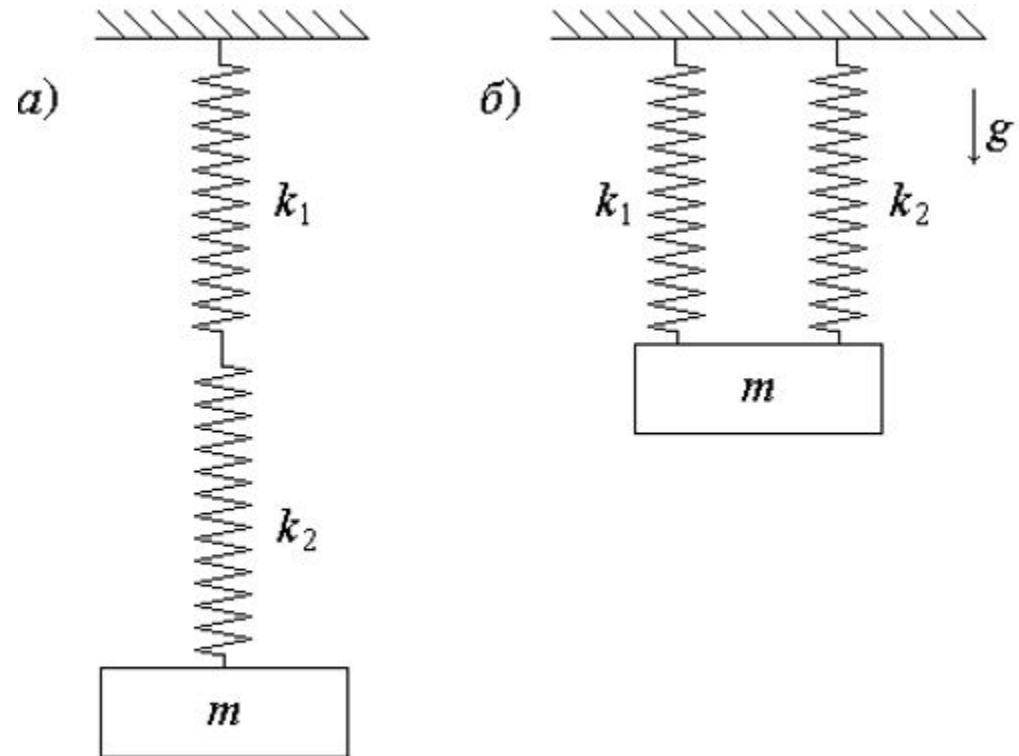
Пример1 – Две пружины

● **Случай а.** Пусть x_1 и x_2 – растяжения первой и второй пружин соответственно. Груз опустится на расстояние

$$x = x_1 + x_2$$

На груз действуют сила тяжести mg и сила натяжения k_2x_2 (со стороны второй пружины). Под их действием груз совершает колебательное движение. Уравнение движения груза согласно 2-му закону Ньютона имеет вид

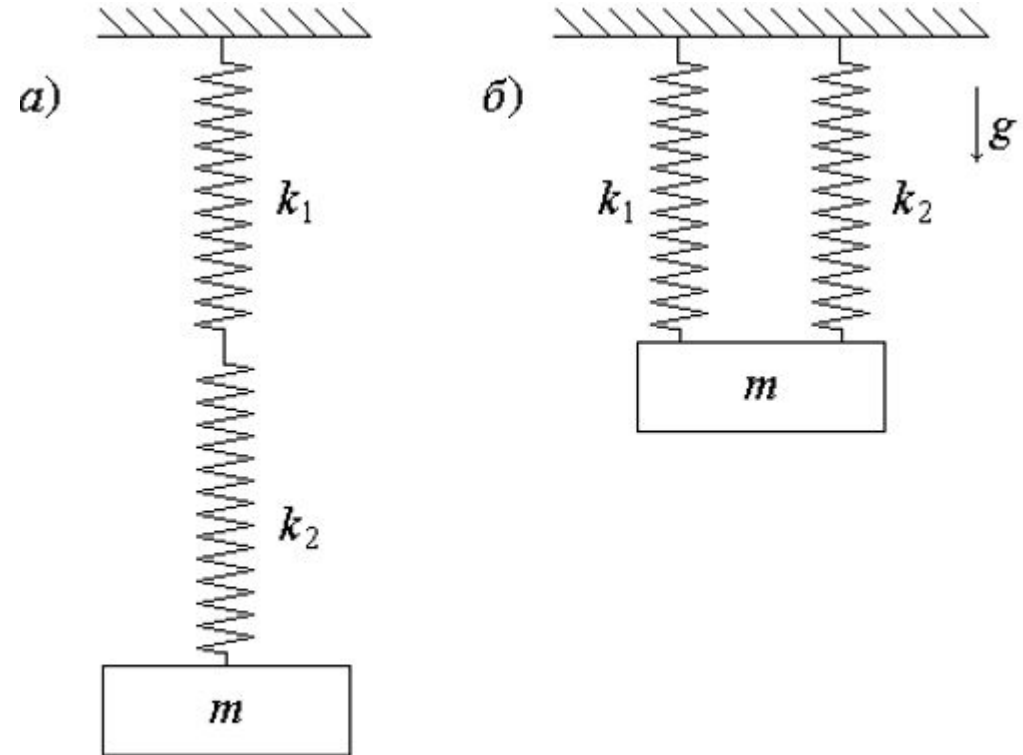
$$m\ddot{x} = mg - k_2x_2.$$



Пример1 – Две пружины

В соответствии с третьим законом Ньютона обе пружины взаимодействуют между собой с одинаковой силой

$$k_1 x_1 = k_2 x_2.$$



Пример1 – Две пружины

В результате движение груза описывается системой уравнений:

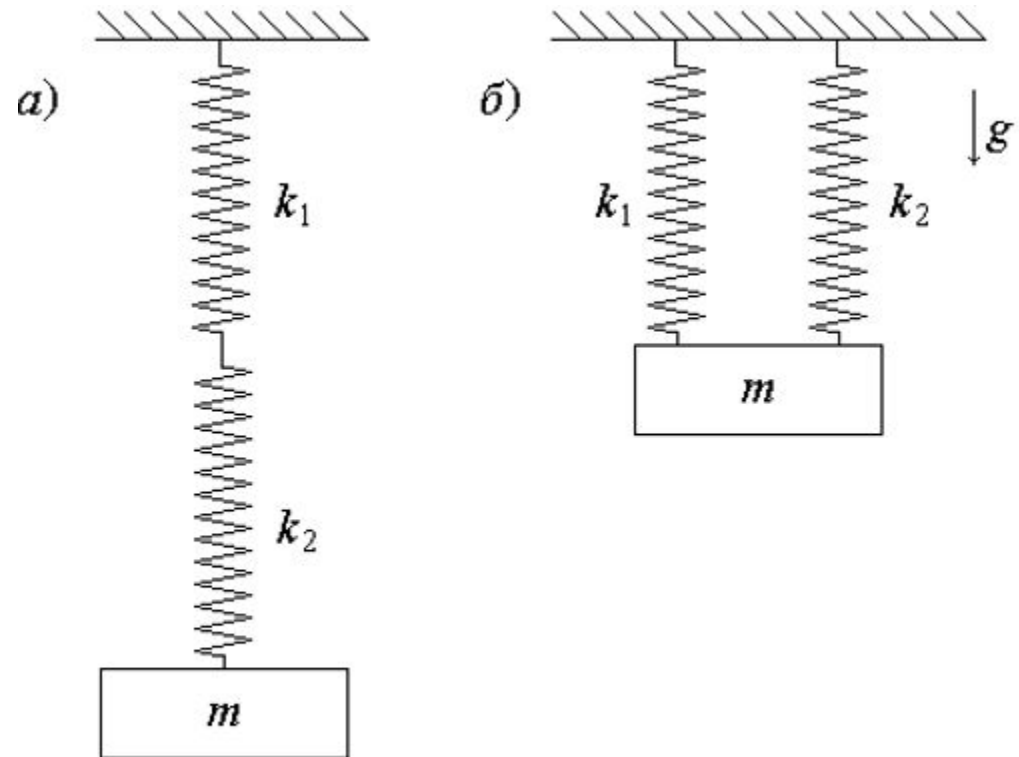
$$m\ddot{x} = mg - k_2x_2$$

$$k_1x_1 = k_2x_2.$$

$$x = x_1 + x_2$$

Исключая x_1 и x_2 , получим одно уравнение:

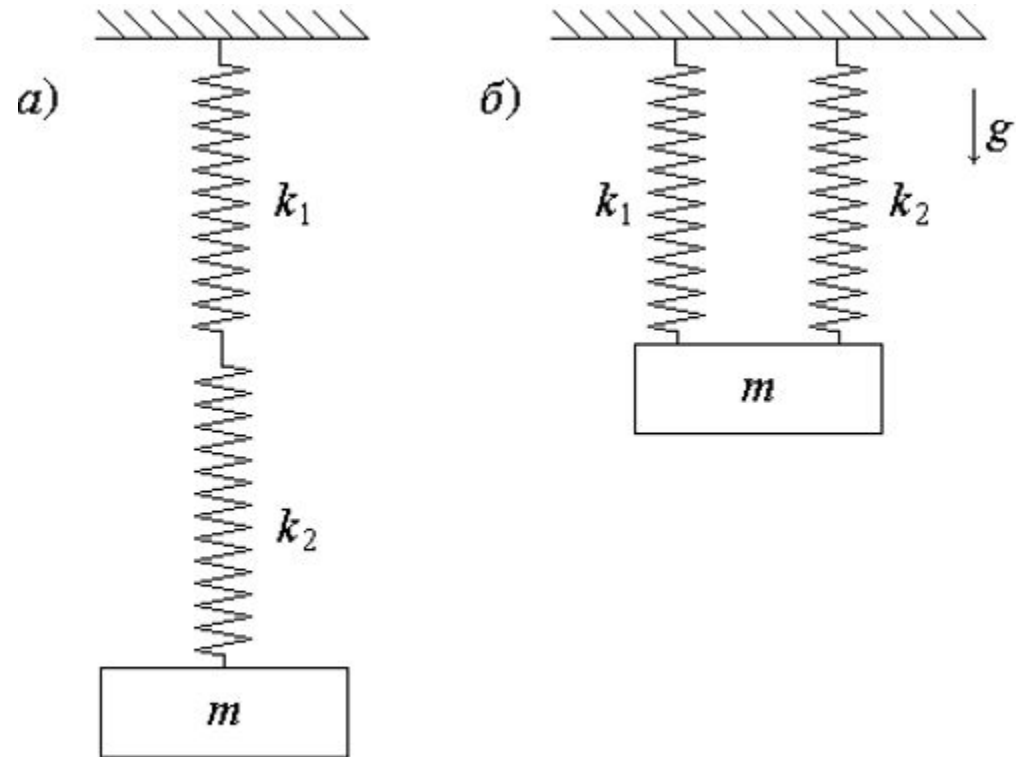
$$m\ddot{x} = mg - \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x.$$



Пример1 – Две пружины

Груз будет колебаться с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}.$$

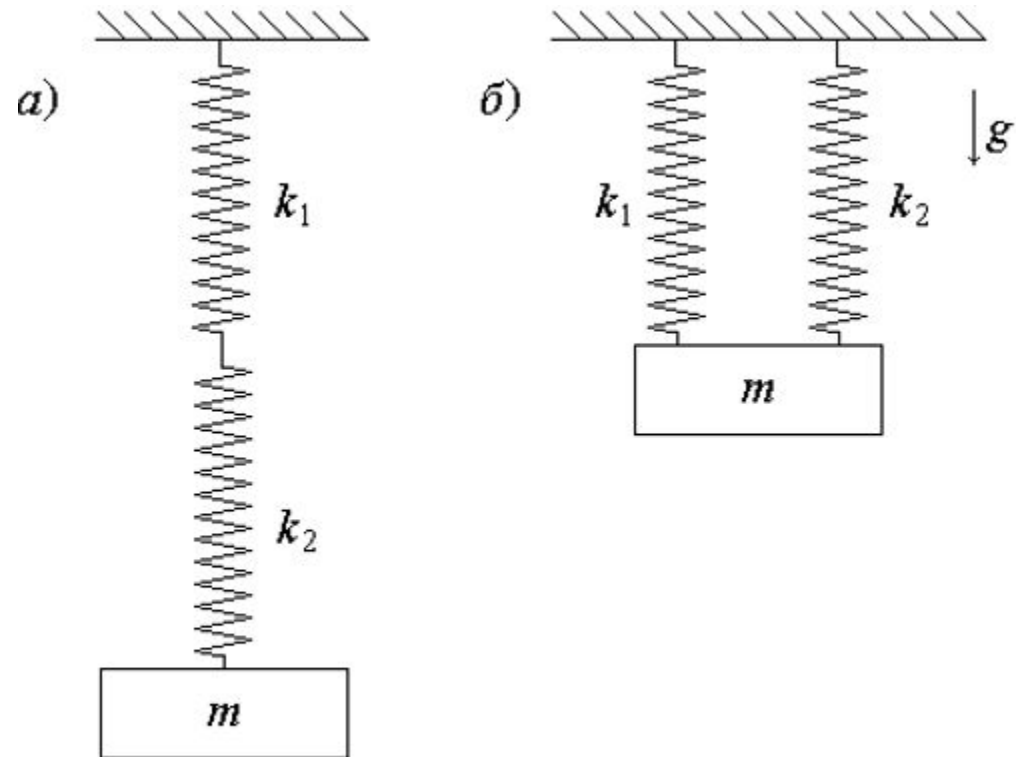


Пример1 – Две пружины

Случай б. На груз будут действовать обе пружины с силами k_1x и k_2x .

Уравнение движения груза будет иметь вид

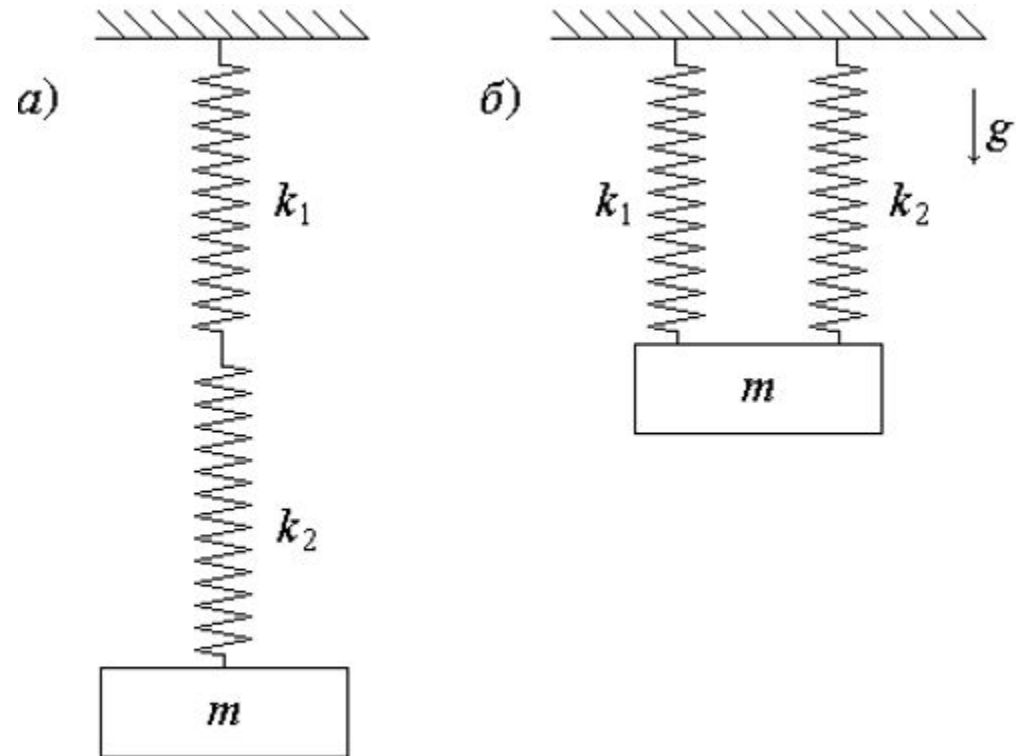
$$m\ddot{x} = mg - (k_1 + k_2)x.$$



Пример1 – Две пружины

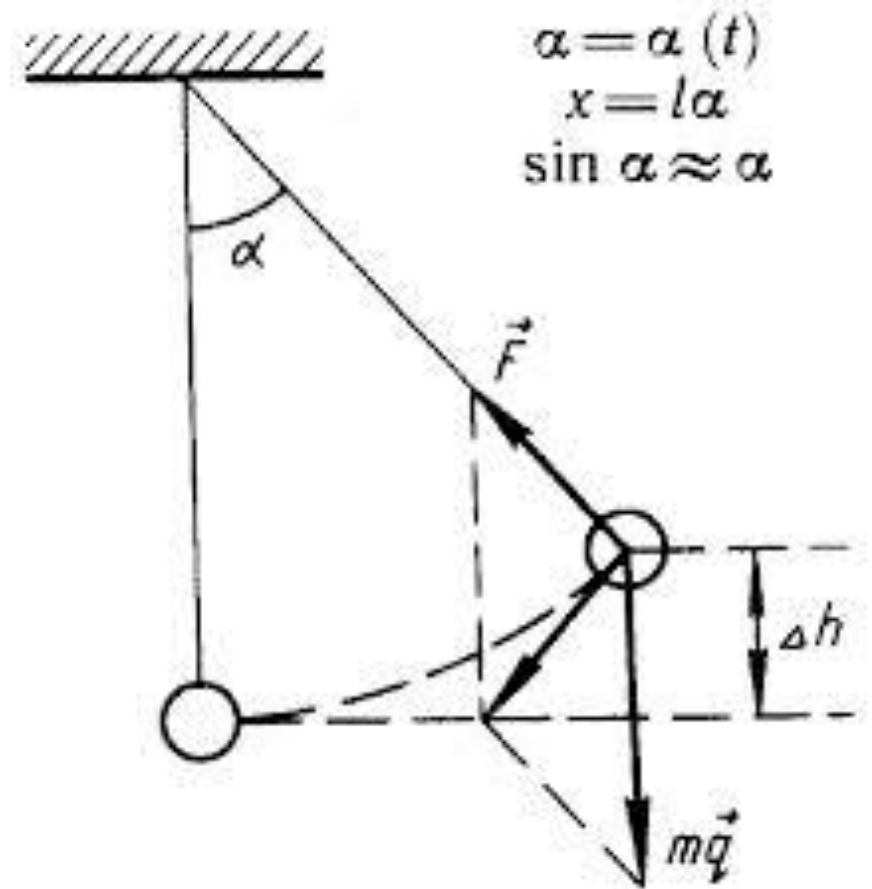
Для этого случая частота колебаний груза равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$



Пример 2 – Математический маятник

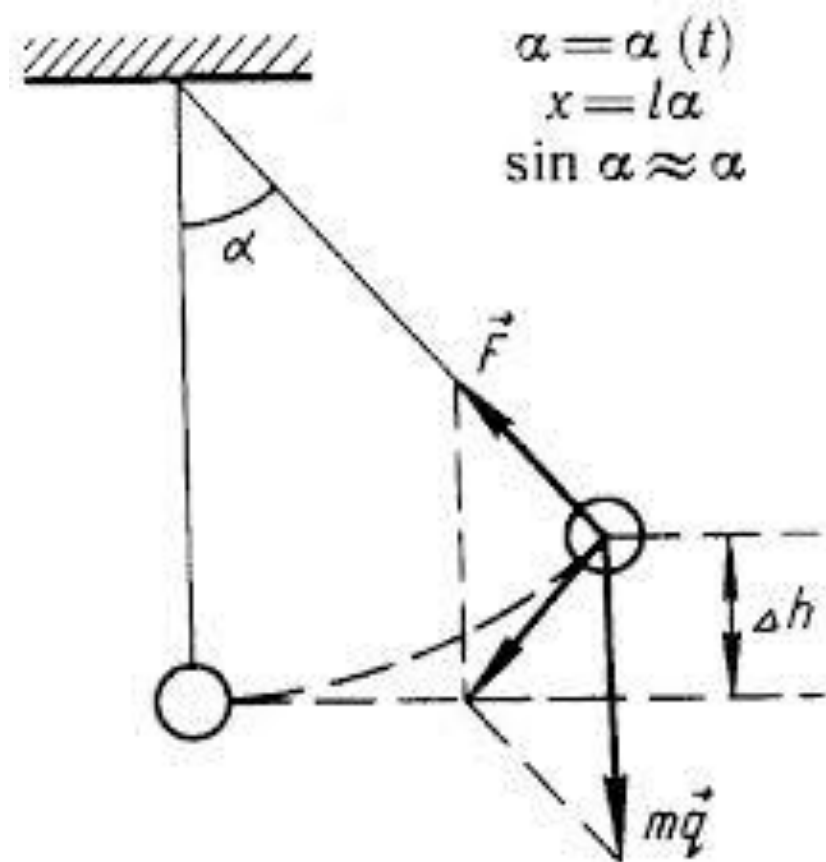
- Математическим маятником называют материальную точку массой m , подвешенную на невесомом и нерастяжимом стержне длиной l в однородном поле тяжести



Пример 2 – Математический маятник

На математический маятник действует сила тяжести равная $-mg$ и сила натяжения стержня F . Сила натяжения полностью компенсирует нормальную (направленную по радиусу компоненту) силу тяжести. Тангенциальная компонента силы тяжести равна (см. рисунок) $-mgsin\alpha$. Теперь мы можем записать уравнение движения для маятника:

$$ml \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgsin\alpha$$

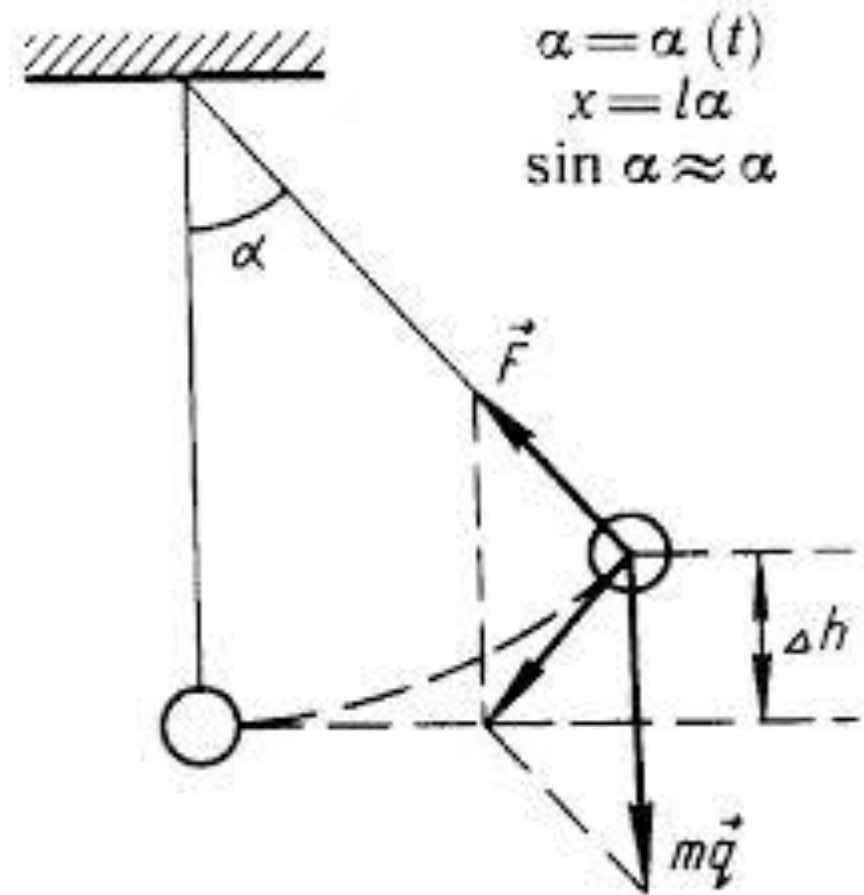


Пример 2 – Математический маятник

- Для малых углов $\sin \alpha \approx \alpha$ и предыдущее выражение может быть представлено в виде:

- $$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0$$

- $\omega = \sqrt{g/l}$ – частота колебаний



Пример 2 – Математический маятник

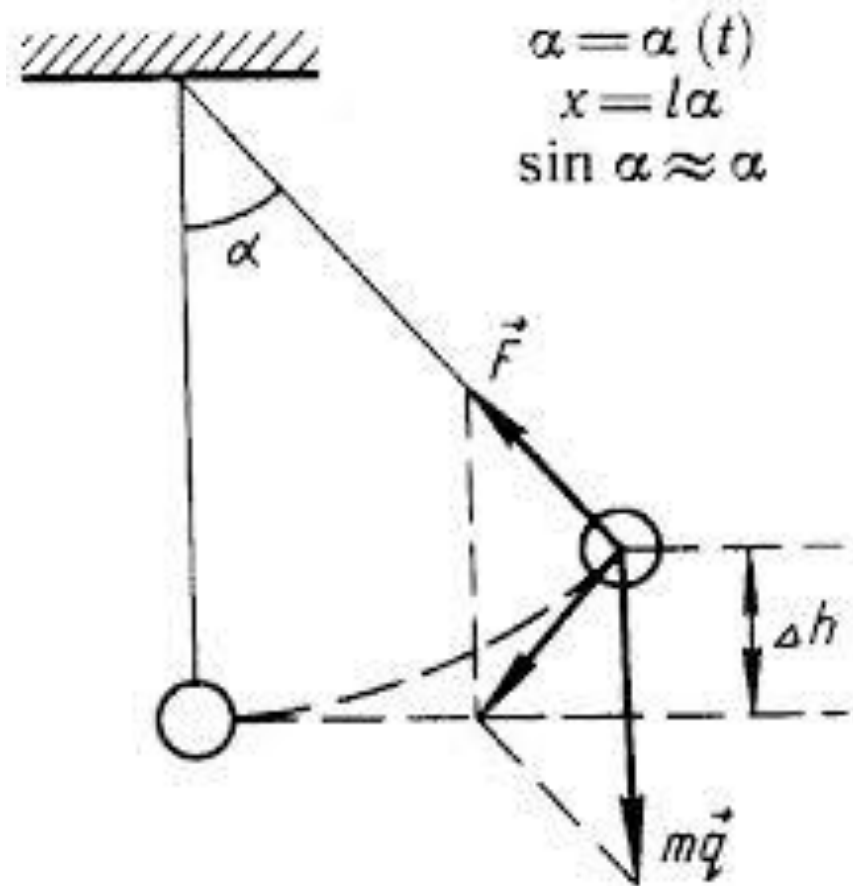
Потенциальная энергия маятника

$$U = mgl(1 - \cos\alpha) \approx mgl\frac{\alpha^2}{2}.$$

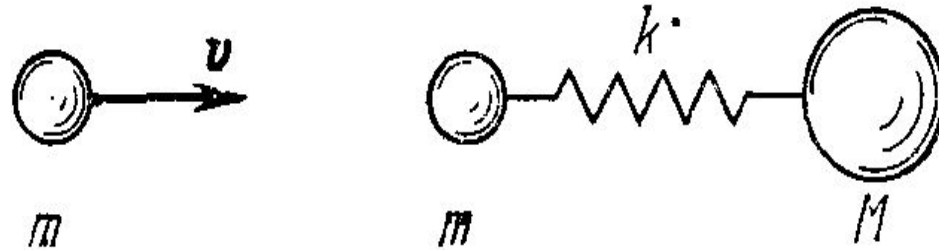
Полная энергия маятника:

$$E = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} + mgl\frac{\alpha^2}{2}.$$

Амплитуда и фаза колебаний могут быть найдены из начальных условий

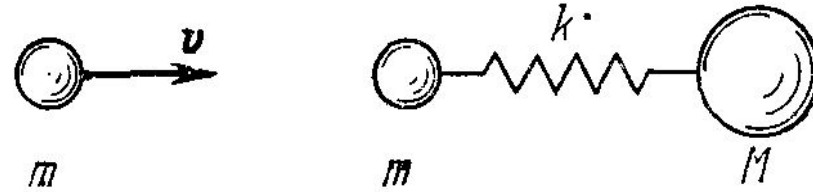


Пример 3 – Задача двух тел



Рассмотрим колебания, которые возникают в системе двух тел разной массы m и M , связанных пружиной жесткости k после столкновения с частицей массы m , двигающейся со скоростью v . Удар будем считать лобовым и абсолютно упругим.

Пример 3 – Задача двух тел



- Скорость центра масс системы.

$$V_{\text{Ц}} = \frac{mv}{m+M}.$$

Кинетическая энергия поступательного движения системы

$$E_k = \frac{(m+M)V_{\text{Ц}}^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2(m+M)}.$$

Пример 3 – Задача двух тел

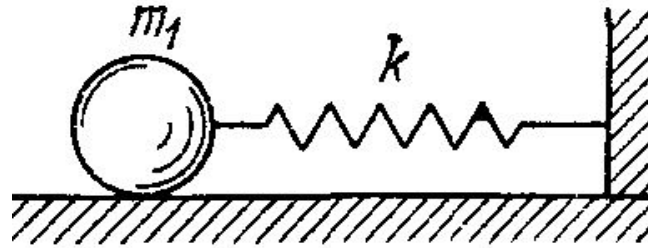
- Внутренняя энергия системы – энергия колебаний.

$$E_{\text{вн}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(mv)^2}{2(m+M)} = \frac{mv^2}{2} \frac{M}{(m+M)}.$$

Амплитуда колебаний системы

$$E_{\text{вн}} = \frac{kA^2}{2} \rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_{\text{вн}}}{k}} = v \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{mM}{m+M} \right)}.$$

Пример 3 – Задача двух тел



Колебания системы могут быть сведены к колебаниям тела с приведенной массой прикрепленного к бесконечно тяжелой стенке.

Уравнение колебаний

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0,$$

$$m_1 - \text{приведенная масса. } m_1 = \frac{mM}{M+m}.$$

Пример 3 – Задача двух тел

-

Частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$$

Относительное движение тел системы

$$x = v \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{mM}{m+M} \right)} \sin \left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} t \right).$$

Пример 3 – Задача двух тел

• Зависимость от времени координат тел относительно центра масс

Для массы m :

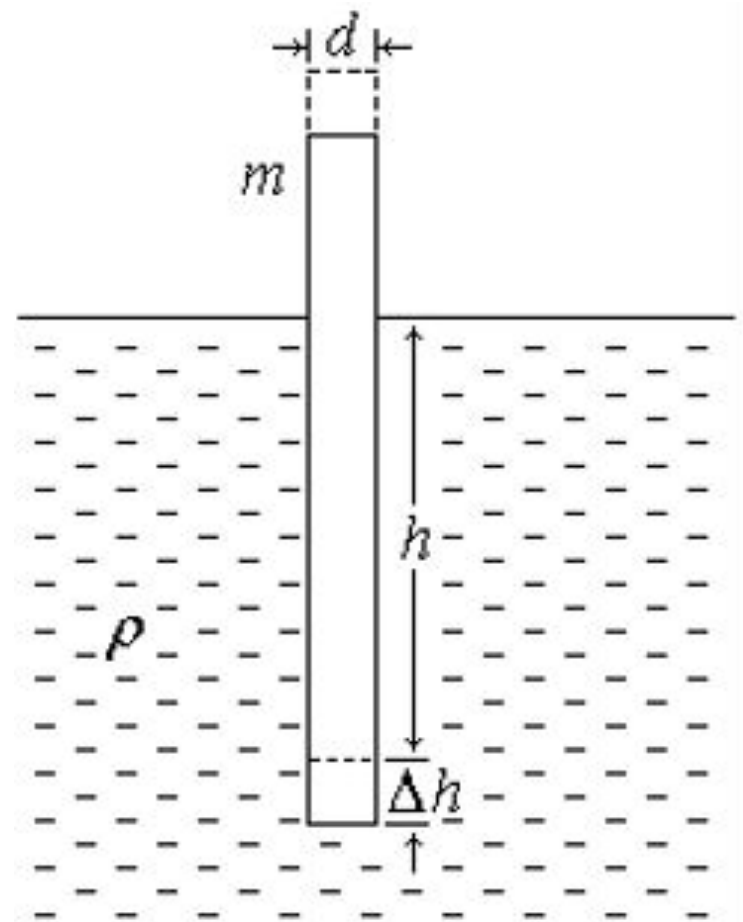
$$x_{mЦ} = -\frac{M}{m+M} v \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{mM}{m+M} \right)} \sin \left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} t \right)$$

Для массы M :

$$x_{MЦ} = \frac{m}{m+M} v \sqrt{\frac{1}{k} \left(\frac{mM}{m+M} \right)} \sin \left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} t \right)$$

Пример 4 – Колебания ареометра

Ареометр массой m с цилиндрической трубкой диаметром d плавает в жидкости плотностью ρ и приводится толчком в вертикальном направлении в движение. Найдем частоту малых колебаний ареометра. Движение жидкости и ее сопротивление движению ареометра учитывать не будем.



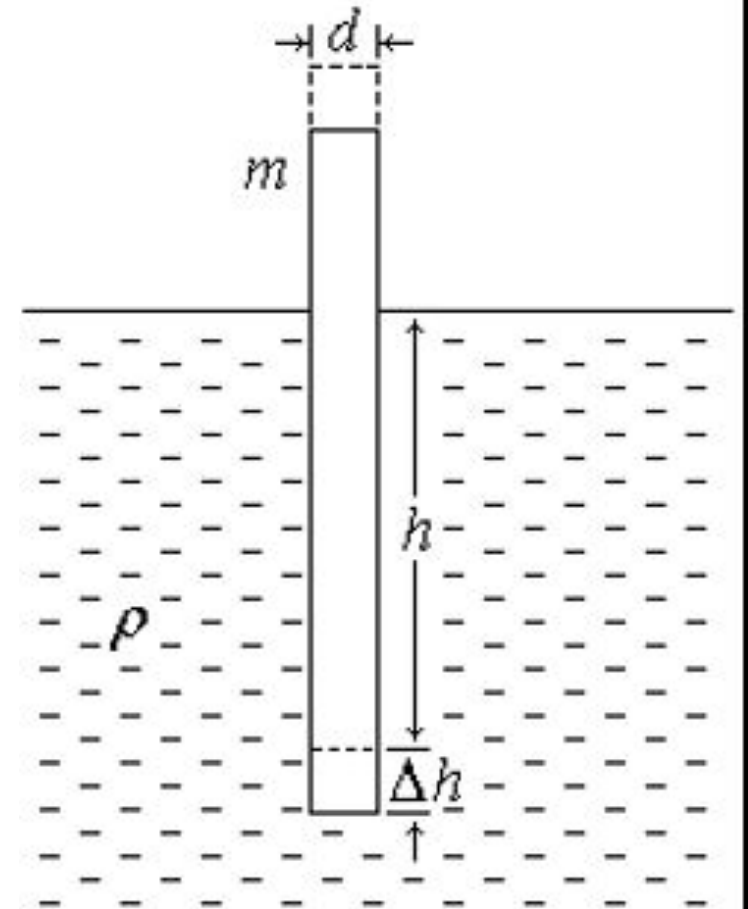
Пример 4 – Колебания ареометра

Выталкивающая сила равна весу вытесненной жидкости. До толчка ареометр покоился, и его вес уравнивался выталкивающей силой

$$mg = \rho g \frac{1}{4} \pi d^2 h.$$

Отсюда находим глубину погружения ареометра:

$$h = \frac{4m}{\rho \pi d^2}.$$



Пример 4 – Колебания ареометра

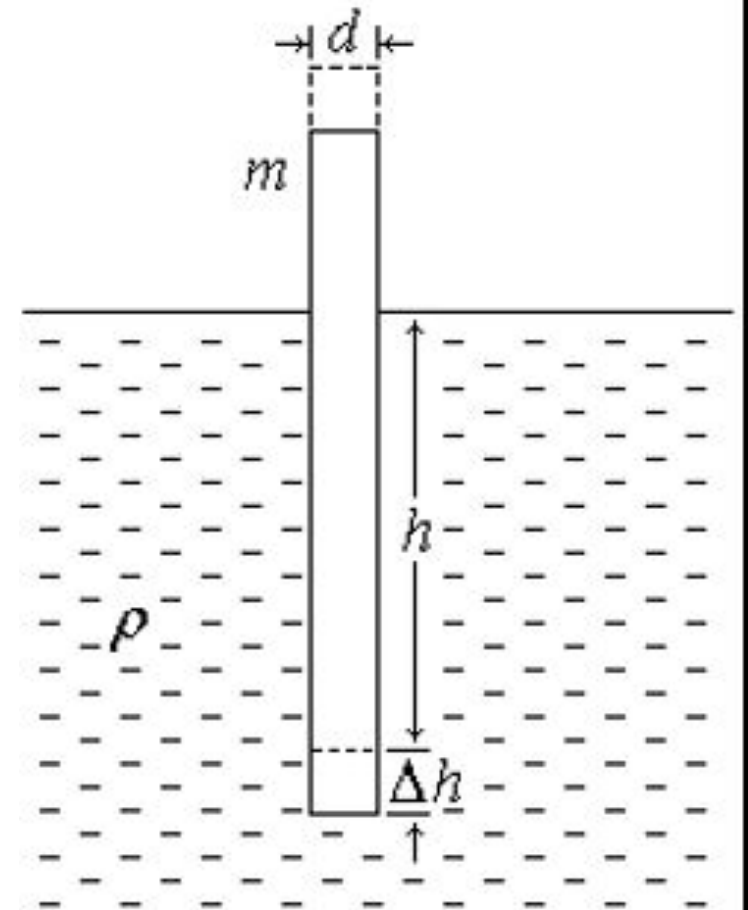
- Согласно 2-му закону Ньютона
$$m\Delta\ddot{h} = mg - \rho g \frac{1}{4} \pi d^2 (h + \Delta h).$$

Исключая h , получаем:

$$\Delta\ddot{h} = -\rho g \frac{1}{4m} \pi d^2 \Delta h.$$

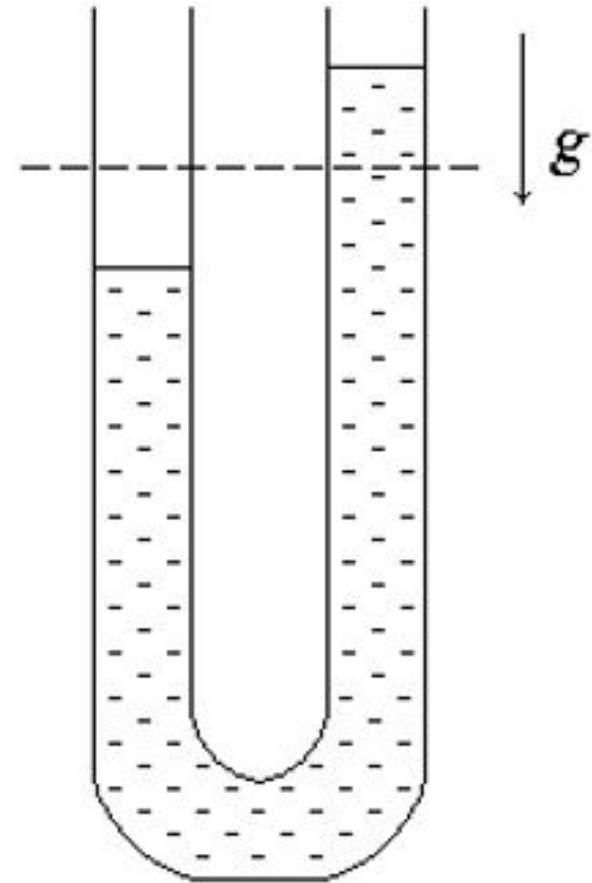
Частота малых колебаний ареометра
равна

$$\omega = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\rho g \pi}{m}}.$$



Пример 5 – Колебания жидкости

- Рассмотрим колебания жидкости в U -образной трубке. Полная длина столба жидкости в трубке равна l . Трением пренебрежем.
- Движение жидкости происходит из-за наличия перепада ее уровней в левом и правом коленах и вызывается весом столба жидкости между ее уровнями в коленах.



Пример 5 – Колебания жидкости

Вес столба жидкости между
неравновесными положениями
уровней

$$P = 2\rho g S x$$

Уравнение движения жидкости

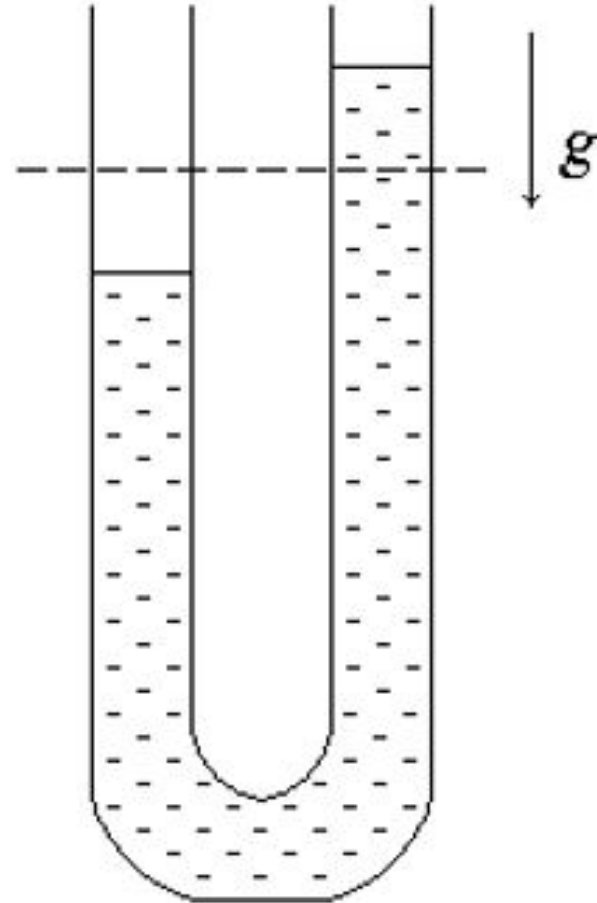
$$\rho S l \ddot{x} = -2\rho g S x.$$

или

$$\ddot{x} = -2 \frac{g}{l} x.$$

Частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{2 \frac{g}{l}}.$$



Затухающие колебания

- Во всех предыдущих задачах мы не учитывали трение. Между тем, на тела движущиеся в газе или в жидкости при малых скоростях действует направленная против скорости сила трения: $f_{\text{тр}} = -\beta v$, где β – коэффициент трения, зависящий от свойств среды.
- Вернемся к задаче «тело на пружине» и учтем трение.

Затухающие колебания

Основное уравнение динамики:

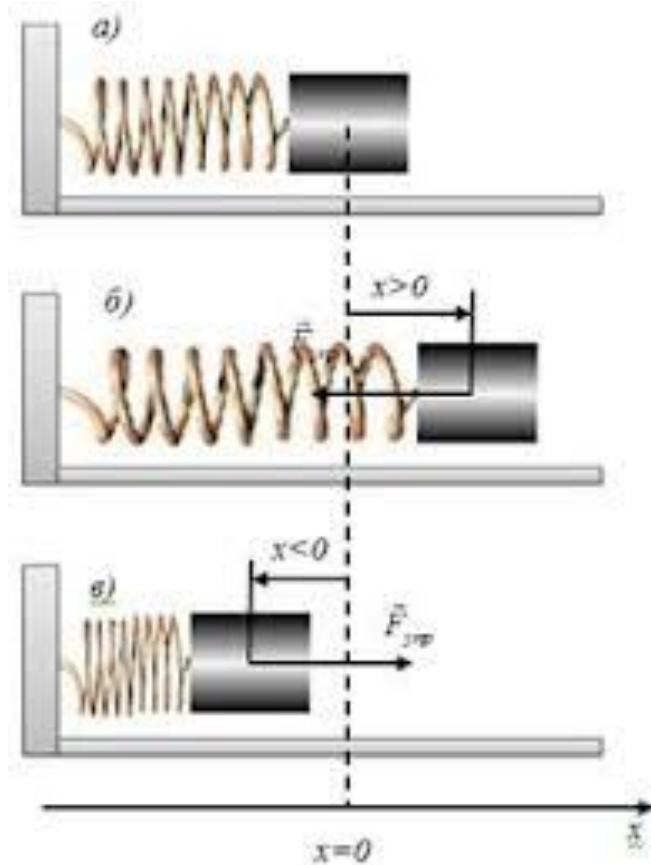
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta v.$$

Или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x - \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt}.$$

Обозначения:

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — частота аналогичных колебаний в отсутствие трения; $\gamma = \beta/2m$.



Затухающие колебания

- Основное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решение уравнения для затухающих колебаний

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

или, что эквивалентно

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Затухающие колебания

- Частота колебаний

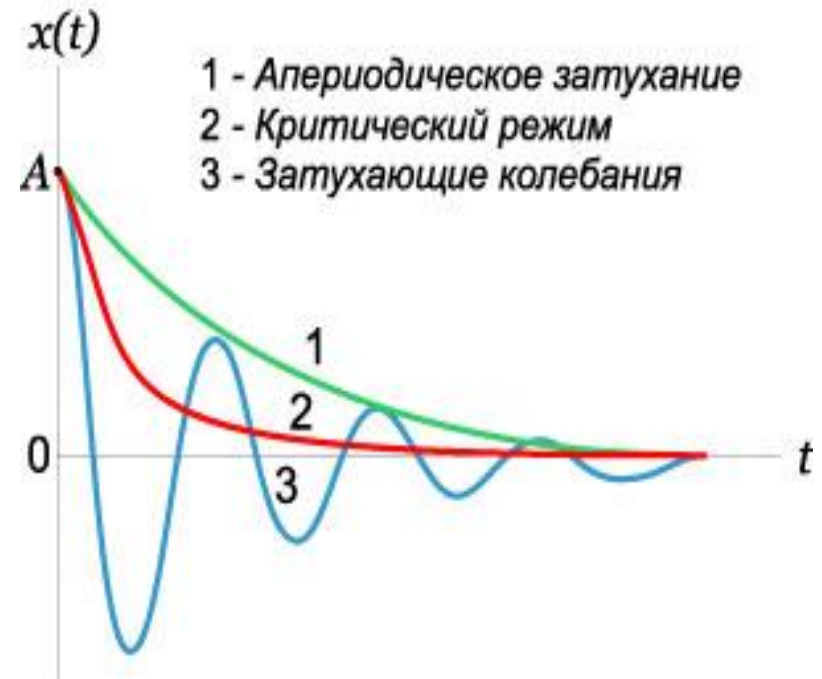
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

1. $\gamma^2 > \omega_0^2$ - кривая 1.

2. $\gamma^2 = \omega_0^2$ - кривая 2.

3. $\gamma^2 < \omega_0^2$ - кривая 3.

4. $\gamma^2 \ll \omega_0^2 \rightarrow \omega \approx \omega_0$.



Затухающие колебания-Пример 1

- Константы в уравнениях находятся из начальных условий.

Два простых примера.

А). Тело переместили из положения равновесия в положение x_0 и отпустили без начальной скорости. Очевидно, что в этом случае $A = x_0, \varphi_0 = 0$. Окончательно имеем

$$x = x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t.$$

Затухающие колебания-Пример 2

- Б). В положении равновесия телу сообщили скорость v_0 .

В этом случае

$$A \cos(\varphi_0) = 0 \rightarrow \varphi_0 = \pi/2,$$
$$v_0 = -\omega A \sin(\pi/2) \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega}.$$
$$x = \frac{v_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t.$$

Затухающие колебания

Для случая слабого трения ($\omega \approx \omega_0$) полезно ввести логарифмический декремент затухания λ , равный логарифму отношения амплитуд в момент времени t и $t+T$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний.

$$\lambda = \ln \frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma(t+T)}} = \gamma T.$$

Логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в «e» раз. Иначе логарифмический декремент затухания можно определить, как величину, пропорциональную натуральному логарифму отношения амплитуд x_0 и x_N двух колебаний, отстоящих друг от друга на N периодов:

$$\lambda = \frac{1}{N} \ln \frac{x_0}{x_N}.$$

Например, пусть через 50 колебаний амплитуда смещения уменьшилась в 2 раза. Найдем λ для этого случая:

$$\lambda = \frac{1}{50} \ln 2 \approx \frac{1}{50} 0.693 = 0.0139.$$

Затухающие колебания

- При малом затухании можно приближенно считать, что энергия E убывает, как квадрат амплитуды:

$$E = E_0 e^{-2\gamma t}.$$

При малых γ изменение энергии за период

$$\Delta E = E_0 - E = E_0(1 - e^{-2\gamma T}) = 2\gamma T E_0,$$

Затухающие колебания

- Отношение начальной энергии к изменению энергии за период колебаний к начальной энергии равно:

$$\frac{E_0}{\Delta E} = \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{1}{2\pi} Q.$$

Величину $Q = \frac{\omega}{2\gamma}$ называют добротностью. С точностью до множителя $1/2\pi$ она равна отношению начальной энергии к изменению энергии за период колебаний к начальной энергии. Чем меньше трение – тем больше добротность, тем меньше потери энергии колебаний.

Добротность и логарифмический декремент затухания связаны соотношением;

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

Например, в приведенном выше примере $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{0.0139} \approx 227.$

Задача

- Период затухающих колебаний $T = 1$ с, логарифмический декремент затухания $\theta = 0,3$, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при $t = 2T$ составляет 5 см. Запишите уравнение движения этого колебания

Задача

<i>Дано</i>	<i>Решение</i>
$T = 1 \text{ с}$ $\Theta = 0,3$ $\varphi = 0$ $t = 2T$ $x_1 = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$	$x = A_0 e^{-\delta t} \cos \omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \Theta = \delta T,$ $\delta = \frac{\Theta}{T}, \quad x_1 = A_0 e^{-\delta 2T} \cos \frac{2\pi}{T} \cdot 2T = A_0 e^{-2\Theta},$ $A_0 = x_1 e^{2\Theta}, \quad x = A_0 e^{-\frac{\Theta}{T} t} \cos \frac{2\pi}{T} t.$
$x(t) \text{ — ?}$	Ответ $x = 9,1 \cdot e^{-0,3t} \cos 2\pi t, \text{ см.}$

Вынужденные колебания - Резонанс

Пусть на колебательную систему (например, на тело на пружине) действует внешняя сила, изменяющаяся со временем по гармоническому закону с частотой ω :

$$F(t) = F_0 \cos \omega t.$$

При отсутствии затухания из второго закона Ньютона имеем:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота колебаний системы.

Вынужденные колебания - Резонанс

•Решением этого уравнения является выражение:

$$x = A(\cos\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega)} \cos\omega t.$$

Второе слагаемое, показывающее влияние вынужденной силы, резко возрастает при $\omega \rightarrow \omega_0$. Указанное явление называется *резонансом*. В данной простой модели амплитуда колебаний $x(t)$ стремится к бесконечности, если частота вынужденной силы стремится к частоте свободных колебаний системы. При этом колебания перестают быть малыми, и уравнение второго закона Ньютона становится неверным.

Вынужденные колебания - Резонанс

- Учтем затухание колебаний.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Решением этого уравнения является выражение:

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi),$$

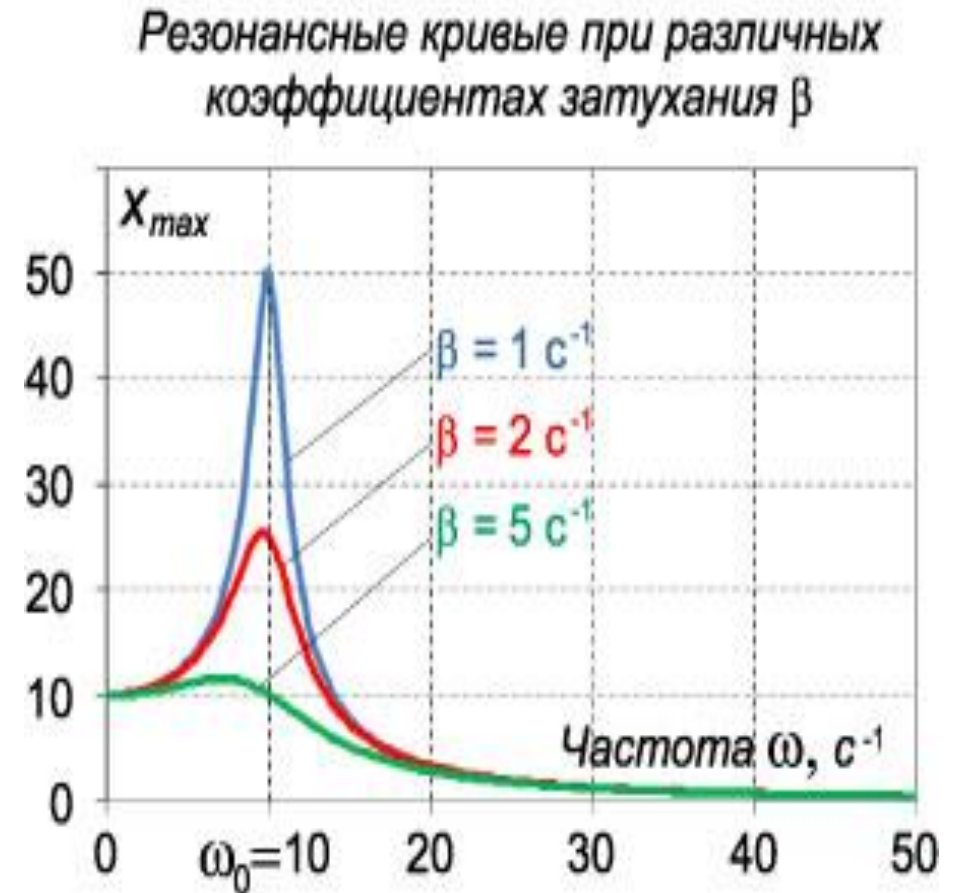
где $\varphi = -\arctg \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ - сдвиг фазы между амплитудой и силой.

При $t \rightarrow \infty$ первое слагаемое стремится к нулю и, таким образом установившиеся колебания описываются формулой:

$$x = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Вынужденные колебания - Резонанс

Зависимость амплитуды установившихся колебаний x от частоты вынужденной силы ω вблизи резонанса при различных коэффициентах затухания показана ниже на рисунке. Такие кривые называются *резонансными кривыми*



Вынужденные колебания - Резонанс

Максимальная амплитуда установившихся колебаний при резонансе будет конечной и равной

$$x_{max}(\omega = \omega_0) = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}.$$

Добротность показывает во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при резонансе превышает их амплитуду вдали от резонанса. При стремлении частоты вынужденной силы ω к нулю амплитуда колебаний механической системы приближается к:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} x = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

Поэтому добротность механической колебательной системы Q будет равна

$$Q = \frac{x_{max}(\omega = \omega_0)}{x(\omega \rightarrow 0)} = \frac{\frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}}{\frac{F_0}{m\omega_0^2}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Точное решение

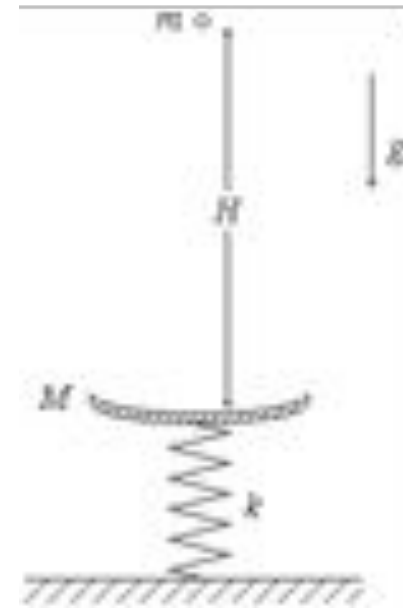
- $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$
- $A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta m \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

Колебания

Основные результаты этой
лекции будут нам
необходимы при изучении
электрических колебаний и
волновых явлений

Задача 1

- Груз массой m упал вертикально со скоростью V на чашку пружинных весов. Масса чашки равна M , жесткость пружины – k . При ударе груз прилипает к чашке. Найти зависимость координаты чашки от времени после падения пластины.



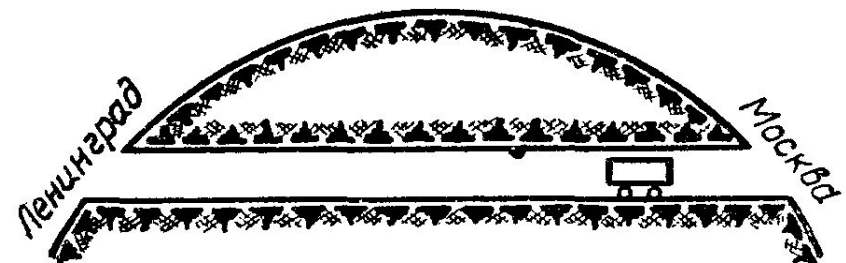
Задача 1

- После падения пластина чашка приобретает скорость
- $V_0 = \frac{mV}{M+m}$ и колеблется с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$.
- Положение равновесия смещается в точку $x = \frac{mg}{k}$ Подставляя начальные условия $x(0) = 0$ и $V(0) = V_0$ в общее решение уравнения колебаний типа
-
- $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{mg}{k}$,
-
- Получим
-
- $x = \frac{mV_0}{\sqrt{k(m+M)}}\sin\omega t + \frac{mg}{k}(1 - \cos\omega t)$.

Задача 2

- Вообразим, что между Москвой и Ленинградом прорыт тоннель, в котором проложены рельсы.

Как будет вести себя вагон, поставленный на эти рельсы, если на его пути не будет трения и сопротивления воздуха? Сколько времени он будет двигаться до Ленинграда? (Начальная скорость вагона равна нулю.)



Задача 2 - решение

238. Рассмотрим этот вагон в промежуточный момент времени (рис. 294). Внутри Земли сила тяжести изменяется прямо пропорционально расстоянию от центра O . Поэтому

$$P = mg \frac{OB}{R},$$

и

$$P_x = -P \cos \alpha = -\frac{mg}{R} OB \cos \alpha = -\frac{mg}{R} x,$$

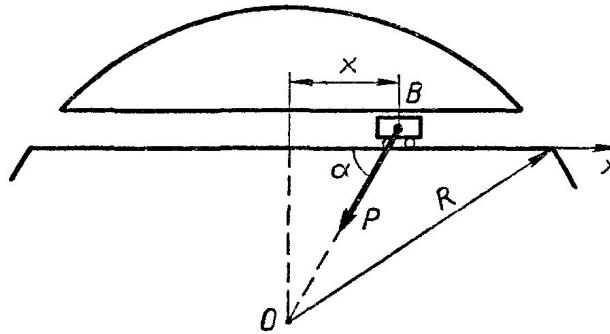


Рис. 294

где P_x — проекция силы тяжести на ось x . Мы видим, что сила, движущая вагон, является восстанавливающей, с коэффициентом $k = \frac{mg}{R}$. Следовательно, вагон будет совершать гармонические колебания между Москвой и Ленинградом. Период этих колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{mR}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

что после вычислений дает $T \approx 84$ мин. Поэтому на движение от Москвы до Ленинграда будет затрачено примерно 42 мин.

Задача 3

12.53. Тело массой $m=10$ г совершает затухающие колебания с максимальной амплитудой $A_{\max}=7$ см, начальной фазой $\varphi=0$ и коэффициентом затухания $\delta=1,6$ с $^{-1}$. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила F , под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид $x=5 \sin(10\pi t - 3\pi/4)$ см. Найти (с числовыми коэффициентами) уравнение собственных колебаний и уравнение внешней периодической силы.

Задача 3 - решение

12.53. Уравнение собственных колебаний имеет вид

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t. \quad (1)$$

По условию сдвиг фаз между собственными и вынужденными колебаниями равен $-3\pi/4$; следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \operatorname{tg} (-3\pi/4) = 1,$$

отсюда

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\delta\omega}. \quad (2)$$

У нас $\omega = 10\pi$ и $\delta = 1,6 \text{ с}^{-1}$. Подставляя эти значения в (2), получим $\omega_0 = 10,5\pi$, и тогда уравнение собственных колебаний примет вид

$$x = 7e^{-1,6t} \sin 10,5\pi t \text{ см.}$$

Уравнение внешней периодической силы имеет вид

$$F = F_0 \sin \omega t.$$

Максимальное значение внешней периодической силы

$$F_0 = Am \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} = 72 \text{ мН},$$

До следующей лекции

