Лекция 6

Колебания

Эпиграф

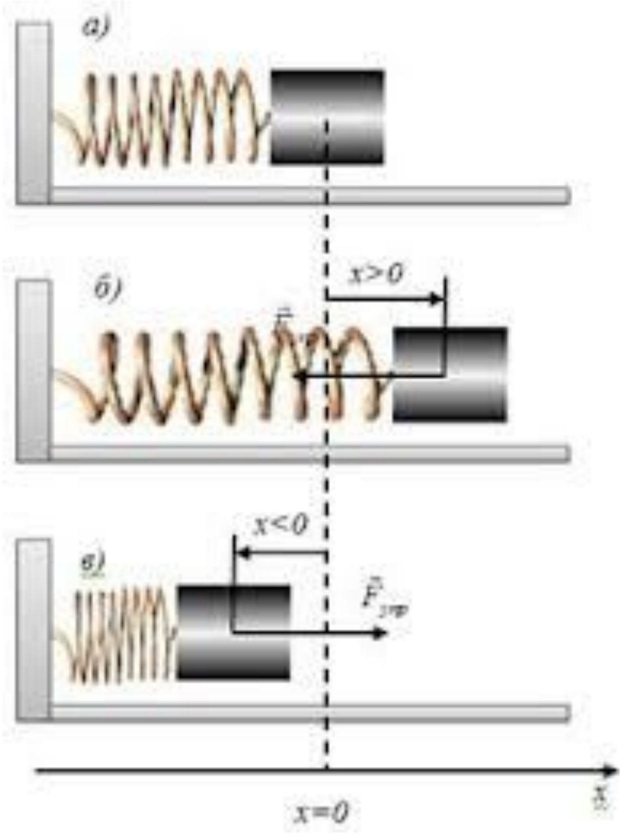
Постоянные колебания приличны

только маятнику

Козьма Прутков

Малые гармонические колебания

- Пусть колебания совершает тело, расположенное на плоском столе. К телу прикреплена пружина, второй конец которой прикреплен к тяжелой стене. Деформации пружины упругие, возвращающая сила подчиняется закону Гука $F = -kx$, где k – коэффициент упругости, x – смещение тела относительно положения равновесия. Трением об стол и сопротивлением воздуха мы пренебрегаем. Масса тела равна m.



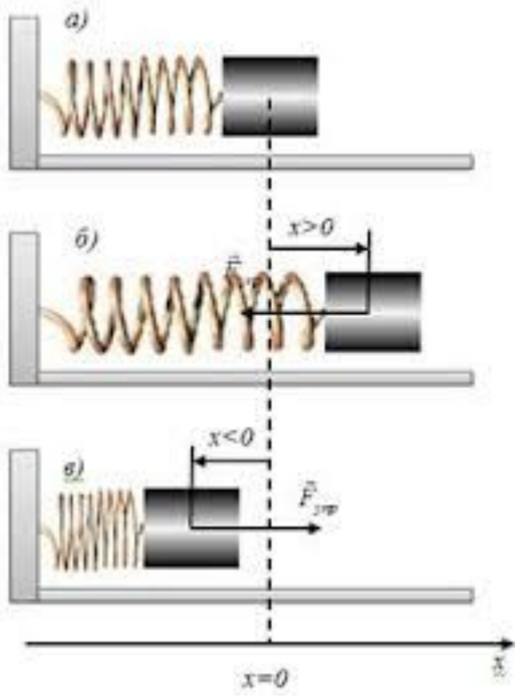
Малые гармонические колебания

- Основное уравнение динамики для этого процесса

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$



Малые гармонические колебания

- Введем обозначение $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Основное уравнение малых гармонических колебаний

Малые гармонические колебания

- Решение 1

$$x = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t$$

C_1 и C_2– константы

Решение 2

$$x = Acos(\omega t + \varphi_0)$$

A, φ_0 –амплитуда и фаза колебаний.

$\omega = 2\pi/T$ - частота колебаний

Малые гармонические колебания

- Связь между решениями 1 и 2 найдем с помощью известного тригонометрического соотношения:

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta.$$

Решение 1 можно выразить как

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}sin\omega t\right).$$

Откуда

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad cos\varphi_0 = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \qquad sin\varphi_0 = -\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \qquad tg\varphi_0 = -\frac{C_2}{C_1}$$

Малые гармонические колебания

- Константы находят из начальных условий – координаты и скорости тела в начальный момент времени.

Рассмотрим два простых примера.

А). Тело переместили из положения равновесия в положение x_0 и отпустили без начальной скорости. В этом случае $A = x_0, \varphi_0 = 0$. Окончательно имеем

$$x = x_0 cos\omega t.$$

Б). В положении равновесия телу сообщили скорость v_0. В этом случае

$$Acos(\varphi_0) = 0 \ \rightarrow \ \varphi_0 = \pi/2,$$

$$v_0 = -\omega A sin(\pi/2) \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega}.$$

В итоге получаем:

$$x = \frac{v_0}{\omega} sin\omega t.$$

Малые гармонические колебания

- Кинетическая энергия колеблющегося тела

$$K = \frac{mv^2}{2},$$

Потенциальная энергия

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Полная энергия колебаний

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Малые гармонические колебания

- Полученные уравнения колебаний могут быть применены к другим колебательным процессам.

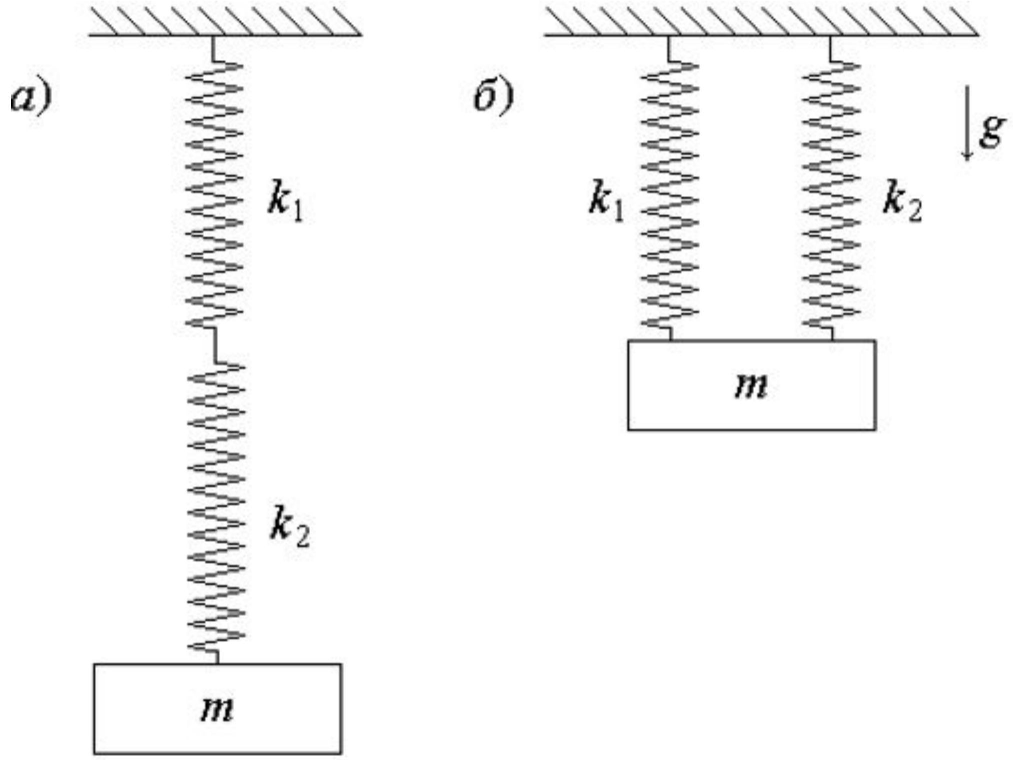
Если основное уравнение динамики может быть сведено к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

то дальнейшее решение задачи будет аналогично приведенному выше.

Пример1 – Две пружины

- Рассмотрим колебания груза массой *m* подвешенного к двум пружинам, соединенным: а) последовательно, б) параллельно. Нашей задачей будет определение частоты колебаний груза, если коэффициенты жесткости пружин равны k_1 и k_2.



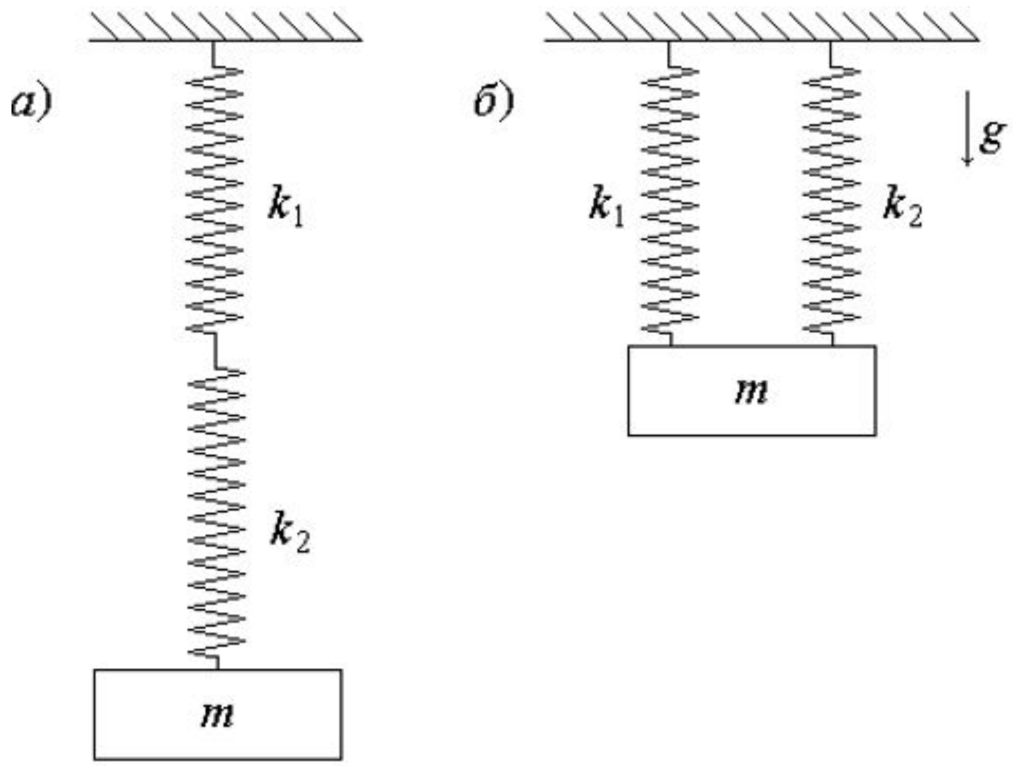
Пример1 – Две пружины

- Случай *а*. Пусть x_1 и x_2 – растяжения первой и второй пружин соответственно. Груз опустится на расстояние

$$x = x_1 + x_2$$

На груз действуют сила тяжести mg и сила натяжения k_2x_2 (со стороны второй пружины). Под их действием груз совершает колебательное движение. Уравнение движения груза согласно 2-му закону Ньютона имеет вид

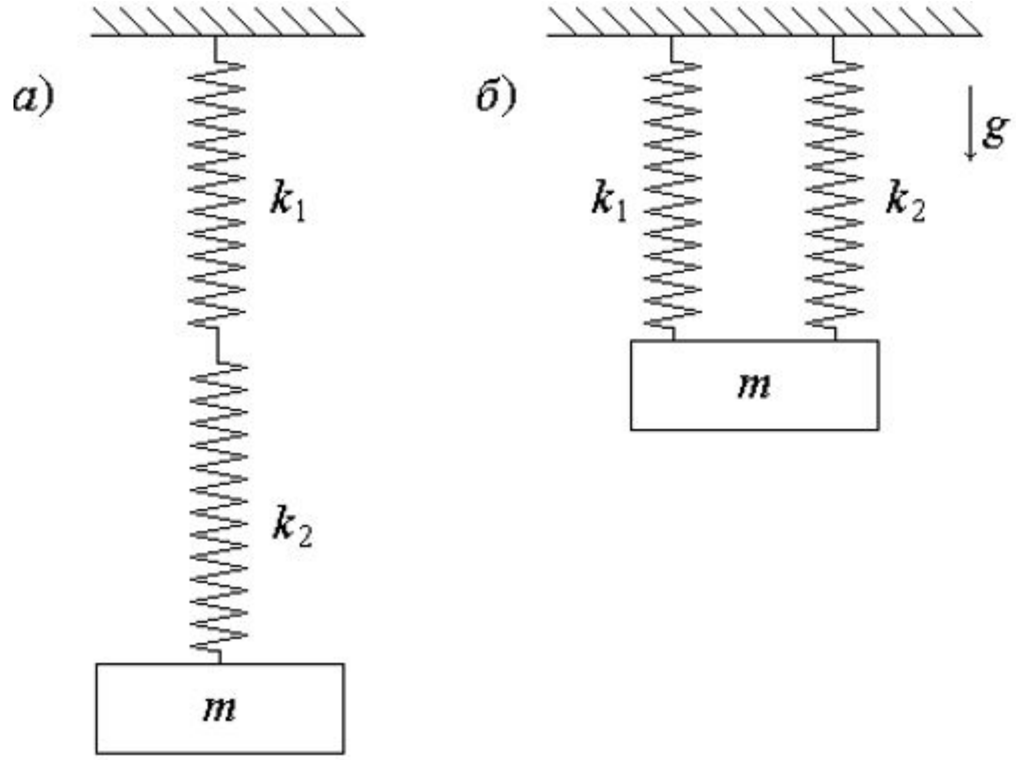
$$m\ddot{x} = mg - k_2x_2.$$



Пример1 – Две пружины

- В соответствии с третьим законом Ньютона обе пружины взаимодействуют между собой с одинаковой силой

$$k_1x_1 = k_2x_2.$$



Пример1 – Две пружины

В результате движение груза описывается системой уравнений:

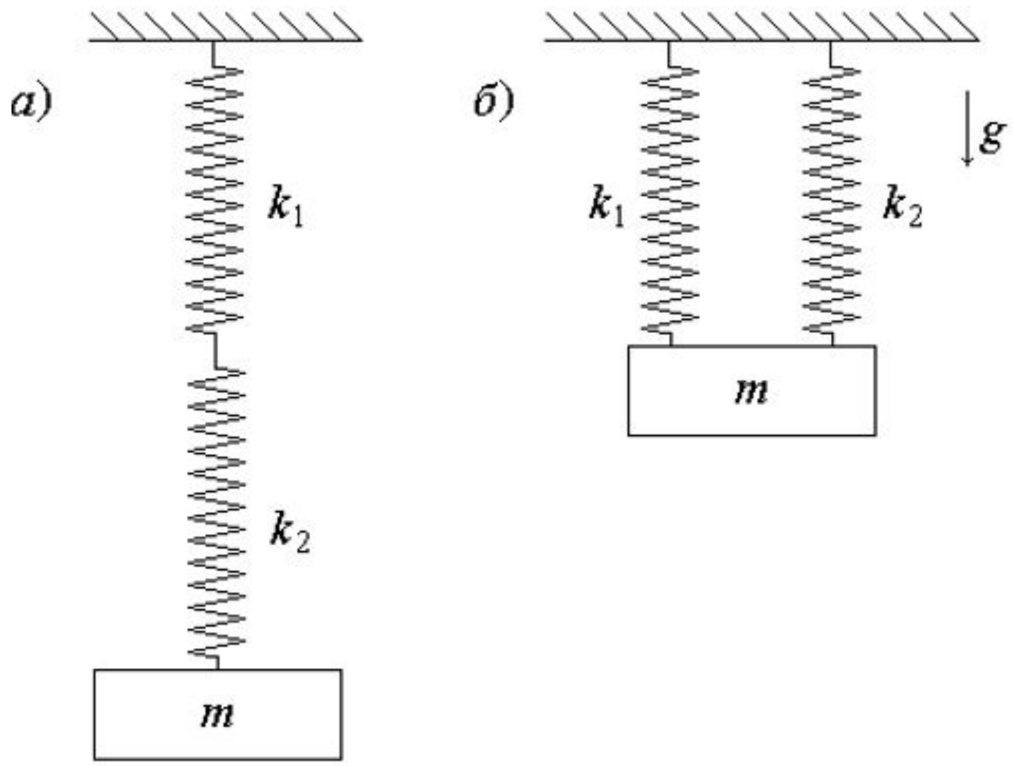
$$m\ddot{x} = mg - k_2 x_2$$

$$k_1 x_1 = k_2 x_2.$$

$$x = x_1 + x_2$$

Исключая x_1 и x_2, получим одно уравнение:

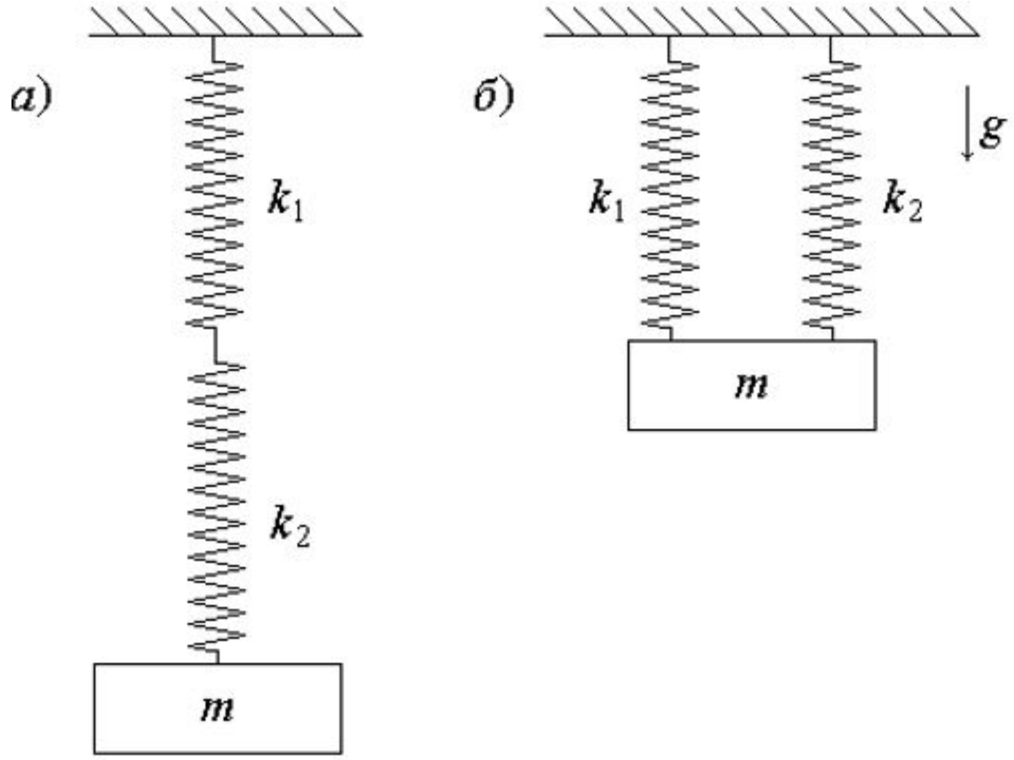
$$m\ddot{x} = mg - \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x.$$



Пример1 – Две пружины

- Груз будет колебаться с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1+k_2)}}.$$

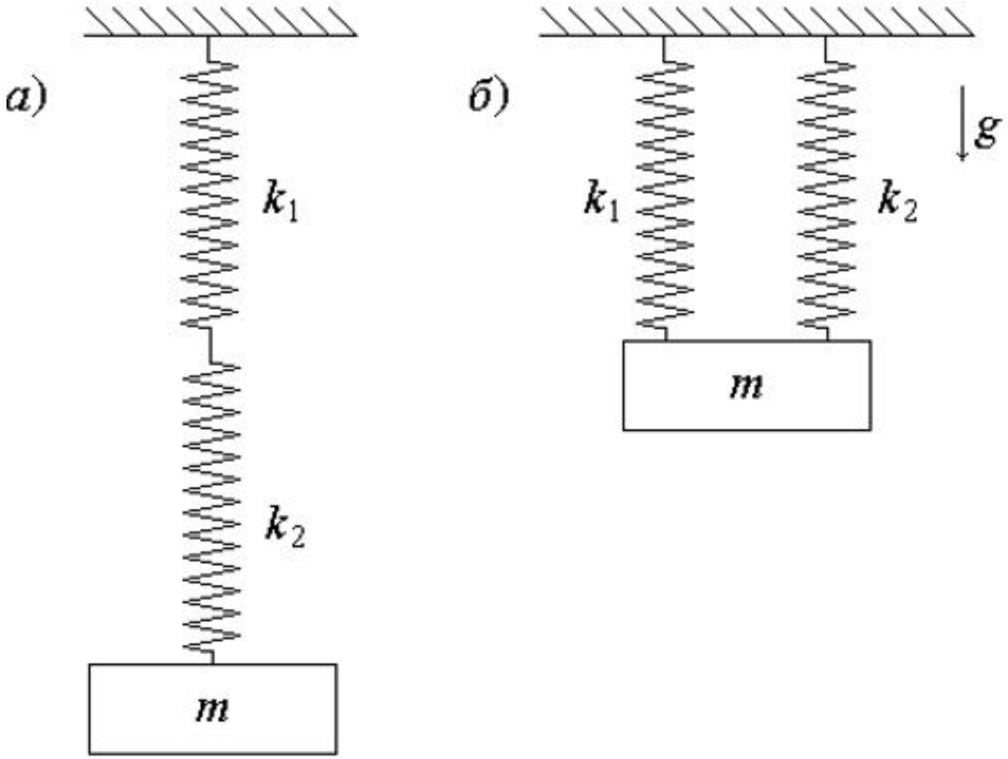


Пример1 – Две пружины

- Случай *б*. *На* груз будут действовуют обе пружины с силами k_1x и k_2x .

Уравнение движения груза будет иметь вид

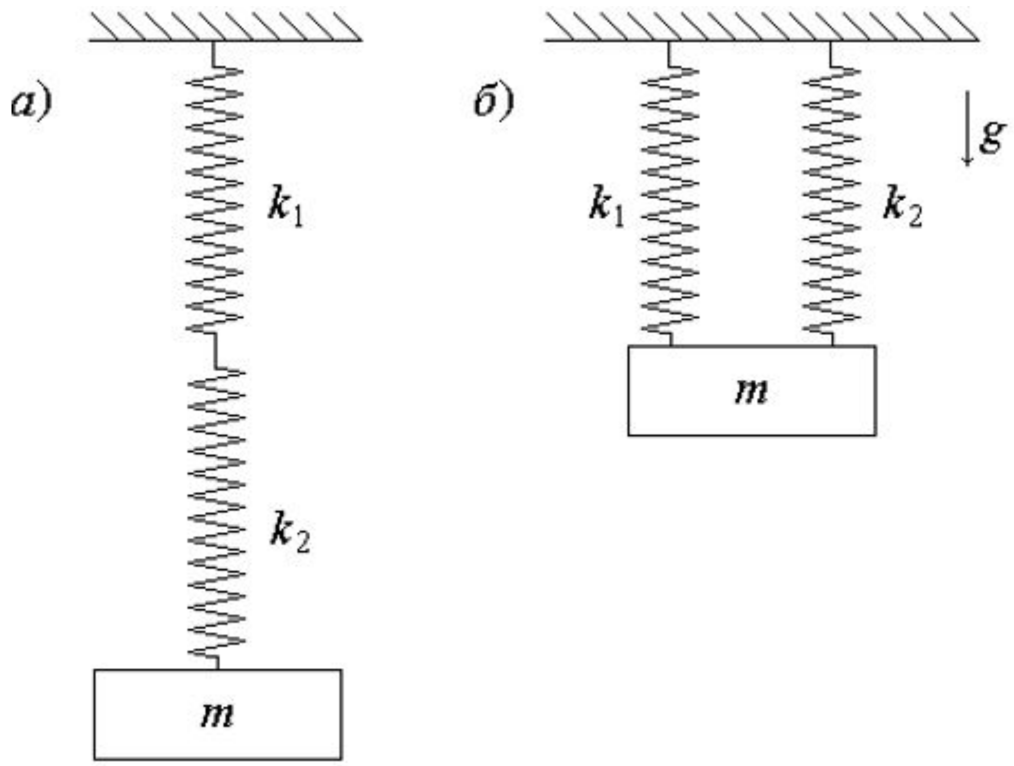
$$m\ddot{x} = mg - (k_1 + k_2)x.$$



Пример1 – Две пружины

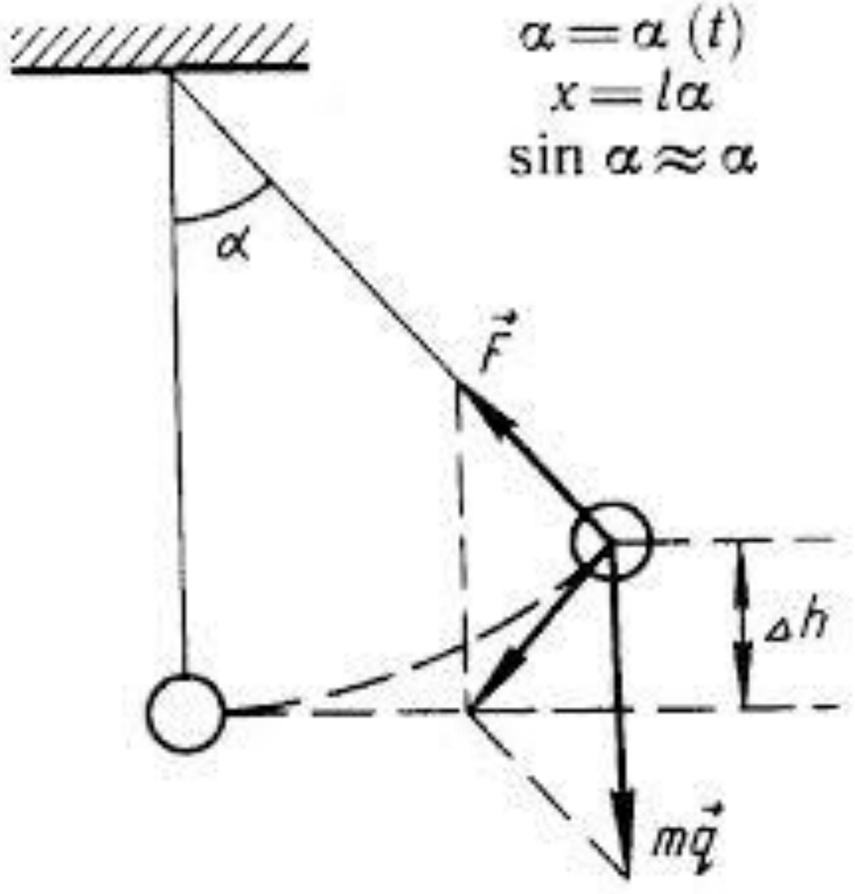
- Для этого случая частота колебаний груза равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.$$



Пример 2 – Математический маятник

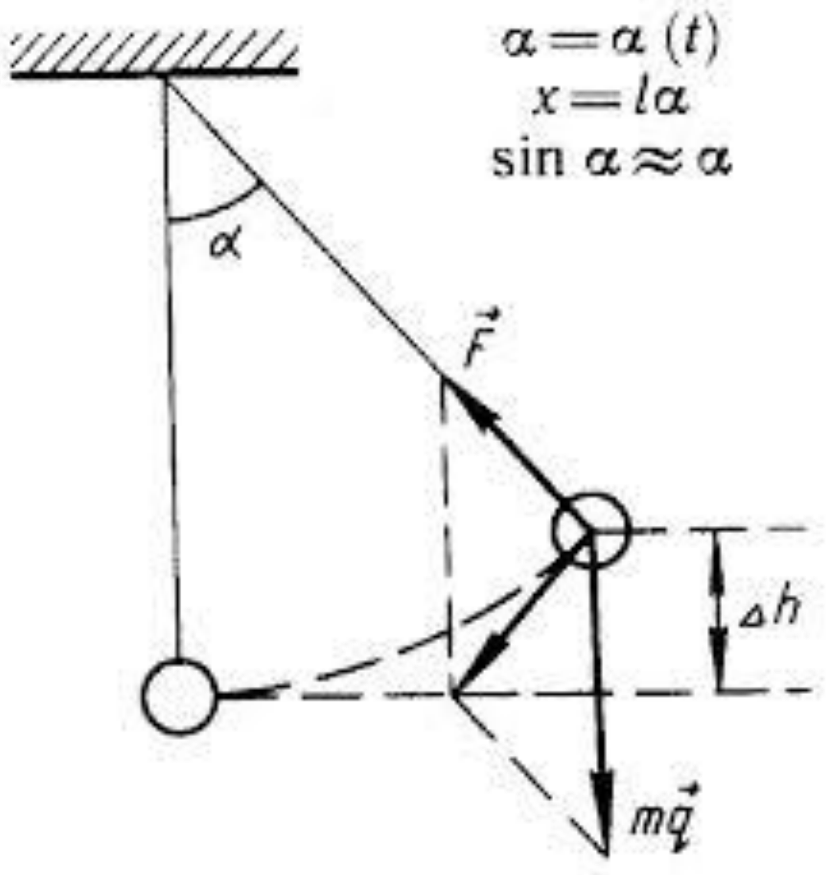
- Математическим маятником называют материальную точку массой m, подвешенную на невесомом и нерастяжимом стержне длиной l в однородном поле тяжести



Пример 2 – Математический маятник

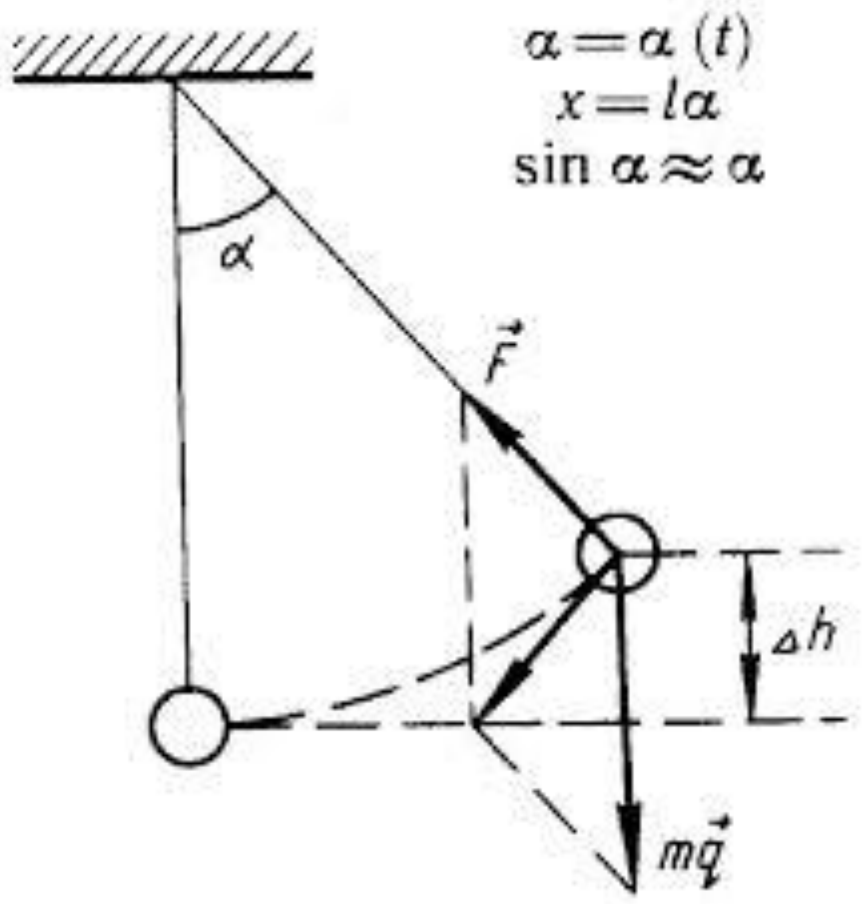
- На математический маятник действует сила тяжести равная $-mg$ и сила натяжения стержня F. Сила натяжения полностью компенсирует нормальную (направленную по радиусу компоненту силу тяжести. Тангенциальная компонента силы тяжести равна (см. рисунок) – $mgsin\alpha$. Теперь мы можем записать уравнение движения для маятника:

$$ml\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgsin\alpha$$



Пример 2 – Математический маятник

- Для малых углов $sin\alpha \approx \alpha$ и предыдущее выражение может быть представлено в виде:
-
- $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0$
- $\omega = \sqrt{g/l}$ – частота колебаний



Пример 2 – Математический маятник

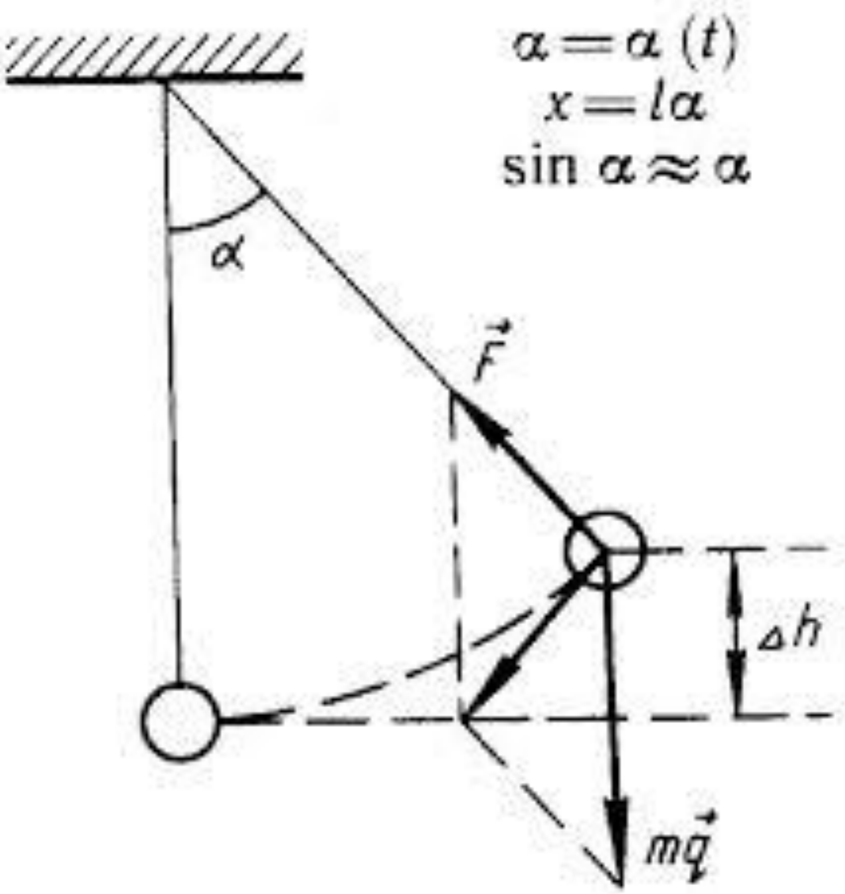
- Потенциальная энергия маятника

$$U = mgl(1 - cos\alpha) \approx mgl\frac{\alpha^2}{2}.$$

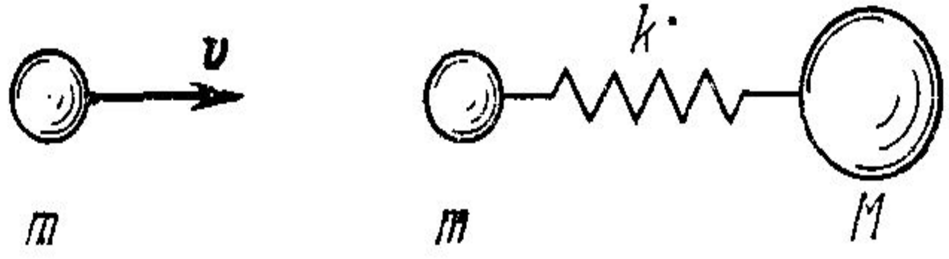
Полная энергия маятника:

$$E = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} + mgl\frac{\alpha^2}{2}.$$

Амплитуда и фаза колебаний могут быть найдены из начальных условий

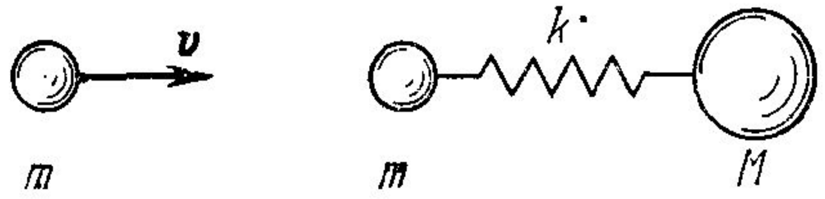


Пример 3 –Задача двух тел



Рассмотрим колебания, которые возникают в системе двух тел разной массы *m* и *M*, связанных пружиной жесткости *k* после столкновения с частицей массы *m*, двигающейся со скоростью *v*. Удар будем считать лобовым и абсолютно упругим.

Пример 3 –Задача двух тел



- Скорость центра масс системы.

$$V_{Ц} = \frac{mv}{m+M}.$$

Кинетическая энергия поступательного движения системы

$$E_k = \frac{(m+M)V_{Ц}^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2(m+M)}.$$

Пример 3 –Задача двух тел

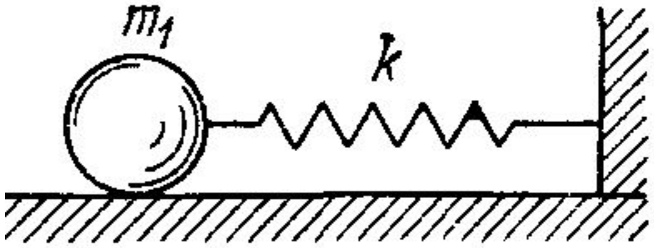
- Внутренняя энергия системы – энергия колебаний.

$$E_{\text{вн}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(mv)^2}{2(m+M)} = \frac{mv^2}{2}\frac{M}{(m+M)}.$$

Амплитуда колебаний системы

$$E_{\text{вн}} = \frac{kA^2}{2} \rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_{\text{вн}}}{k}} = v\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{mM}{m+M}\right)}.$$

Пример 3 –Задача двух тел



- Колебания системы могут быть сведены к колебаниям тела с приведенной массой прикрепленного к бесконечно тяжелой стенке.

Уравнение колебаний

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0,$$

m_1 – приведенная масса. $m_1 = \frac{mM}{M+m}$.

Пример 3 –Задача двух тел

- Частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$$

Относительное движение тел системы

$$x = v\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{mM}{m+M}\right)}\, sin\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}\, t\right).$$

Пример 3 –Задача двух тел

- Зависимость от времени координат тел относительно центра масс

Для массы *m*:

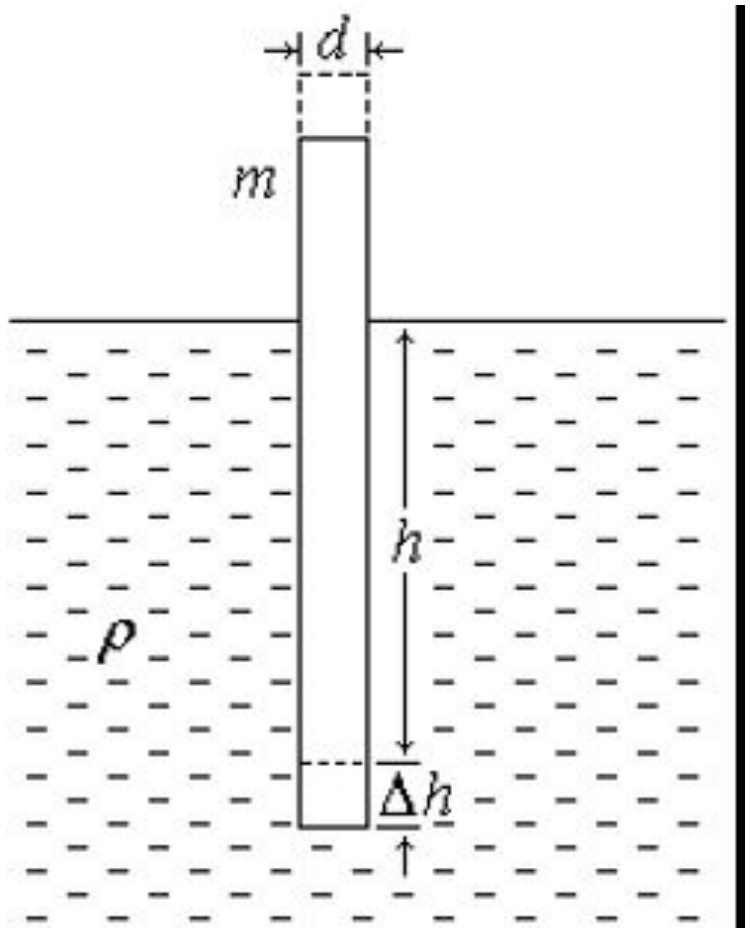
$$x_{m\text{Ц}} = -\frac{M}{m+M} v \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{mM}{m+M}\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} t\right)$$

Для массы *M*:

$$x_{M\text{Ц}} = \frac{m}{m+M} v \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{mM}{m+M}\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} t\right)$$

Пример 4 – Колебания ареометра

Ареометр массой m с цилиндрической трубкой диаметром d плавает в жидкости плотностью ρ и приводится толчком в вертикальном направлении в движение Найдем частоту малых колебаний ареометра. Движение жидкости и ее сопротивление движению ареометра учитывать не будем.



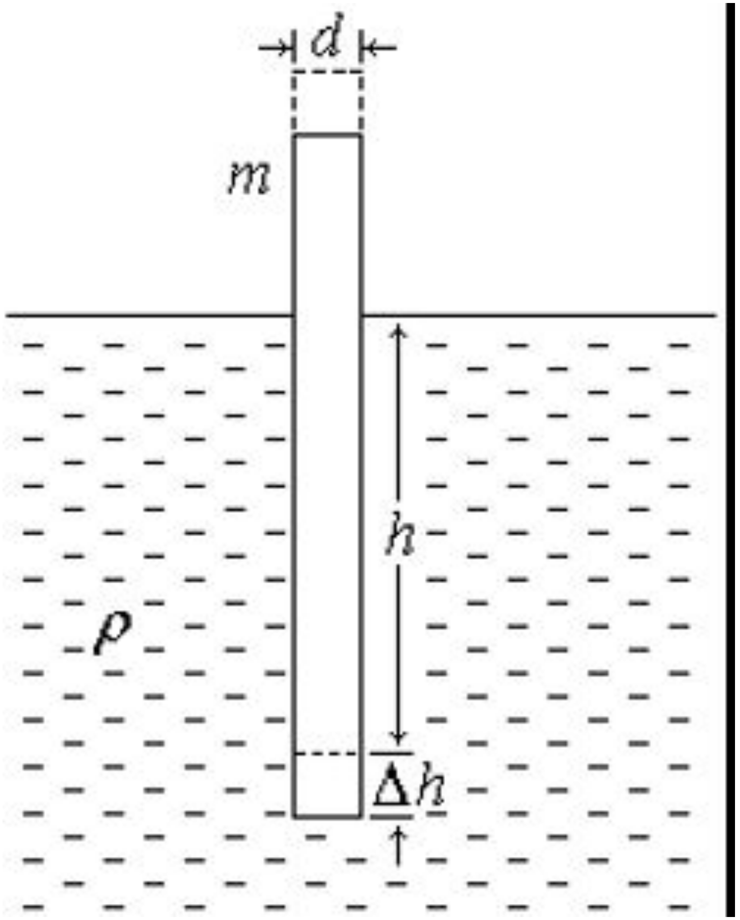
Пример 4 – Колебания ареометра

- Выталкивающая сила равна весу вытесненной жидкости. До толчка ареометр покоился, и его вес уравновешивался выталкивающей силой

$$mg = \rho g \frac{1}{4}\pi d^2 h.$$

Отсюда находим глубину погружения ареометра:

$$h = \frac{4m}{\rho \pi d^2}.$$



Пример 4 – Колебания ареометра

- Согласно 2-му закону Ньютона

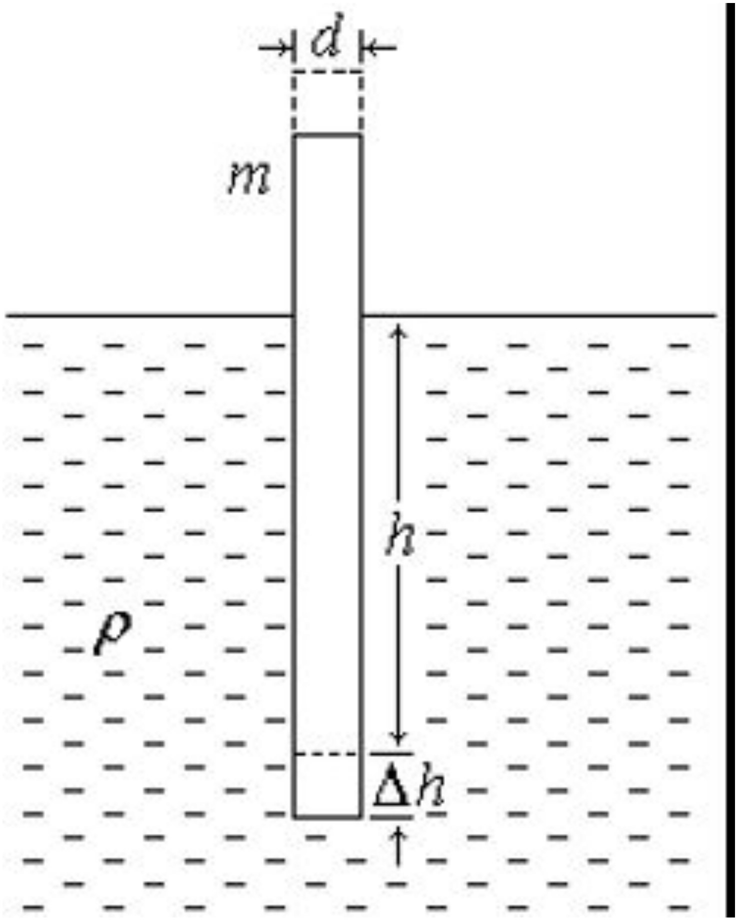
$$m\Delta\ddot{h} = mg - \rho g \frac{1}{4}\pi d^2 (h + \Delta h).$$

Исключая *h*, получаем:

$$\Delta\ddot{h} = -\rho g \frac{1}{4m}\pi d^2 \Delta h.$$

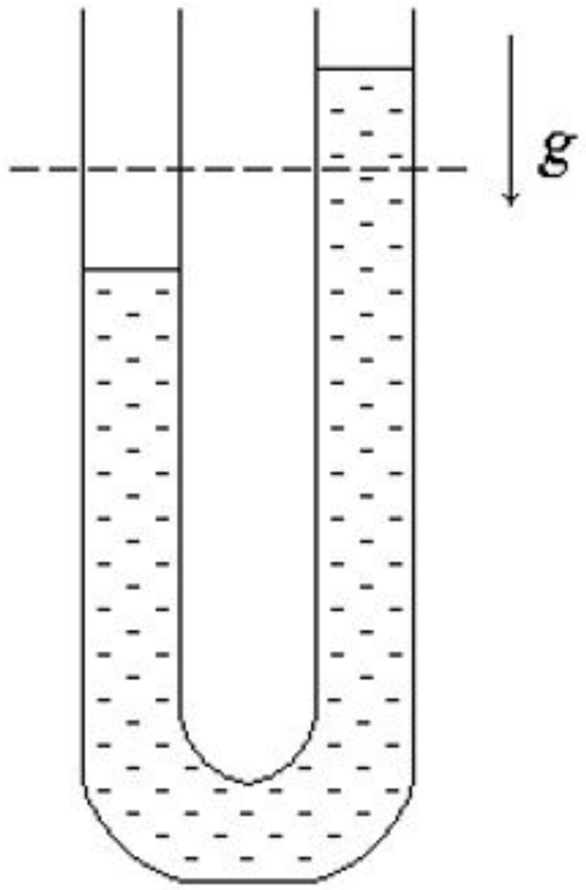
Частота малых колебаний ареометра равна

$$\omega = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{\rho g \pi}{m}}.$$



Пример 5 – Колебания жидкости

- Рассмотрим колебания жидкости в U-образной трубке. Полная длина столба жидкости в трубке равна l. Трением пренебрежем.
- Движение жидкости происходит из-за наличия перепада ее уровней в левом и правом коленах и вызывается весом столба жидкости между ее уровнями в коленах.



Пример 5 – Колебания жидкости

- Вес столба жидкости между неравновесными положениями уровней

$$P = 2\rho g S x$$

Уравнение движения жидкости

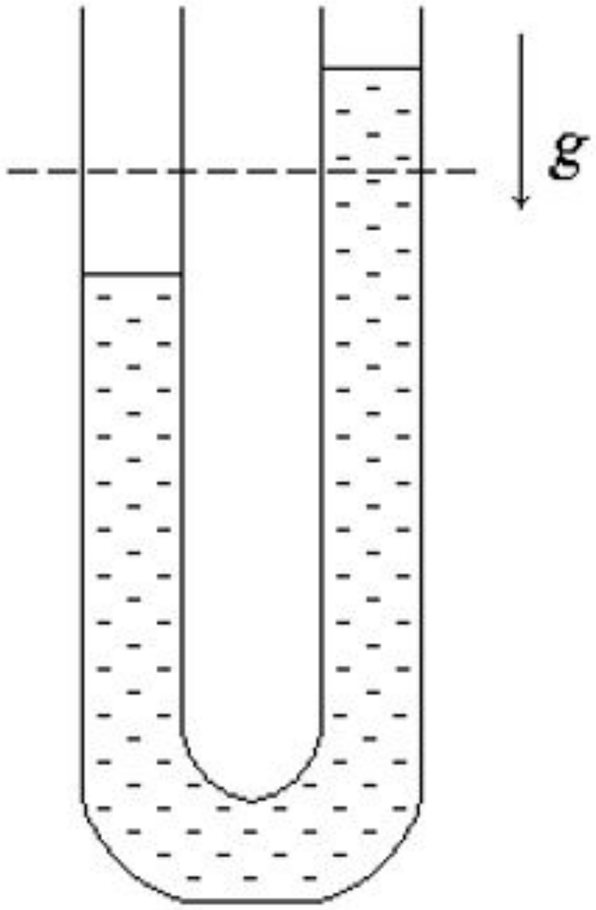
$$\rho S l \ddot{x} = -2\rho g S x.$$

или

$$\ddot{x} = -2\frac{g}{l}x.$$

Частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{2\frac{g}{l}}.$$



Затухающие колебания

- Во всех предыдущих задачах мы не учитывали трение. Между тем, на тела движущиеся в газе или в жидкости при малых скоростях действует направленная против скорости сила трения: $f_{\text{тр}} = -\beta v$, где β – коэффициент трения, зависящий от свойств среды.
- Вернемся к задаче «тело на пружине» и учтем трение.

Затухающие колебания

Основное уравнение динамики:

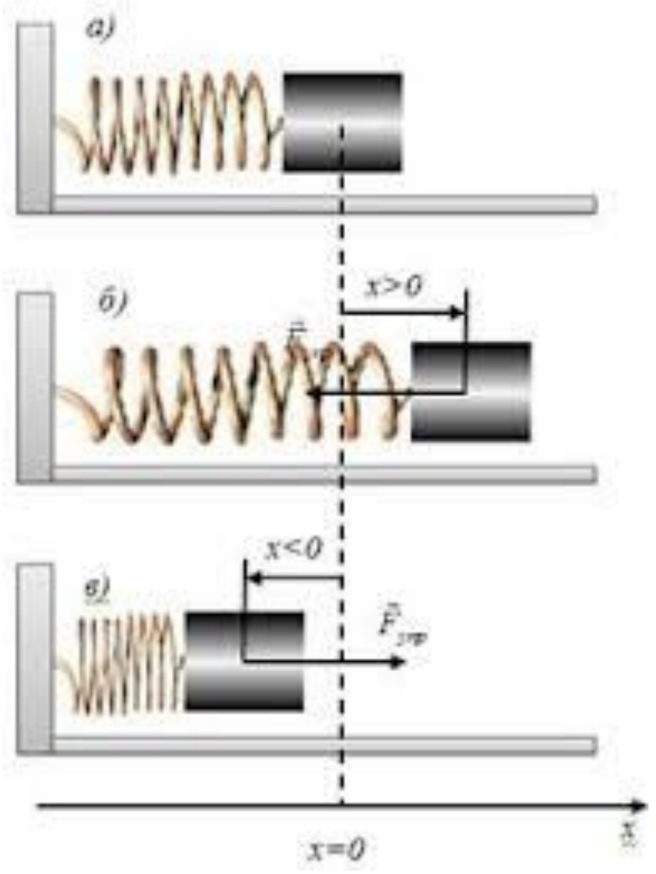
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta v.$$

Или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt}.$$

Обозначения:

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ –частота аналогичных колебаний в отсутствие трения; $\gamma = \beta/2m$.



Затухающие колебания

- Основное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решение уравнения для затухающих колебаний

$$x = Ae^{-\gamma t}cos\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

или, что эквивалентно

$$x = e^{-\gamma t}(C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t).$$

Частота колебаний

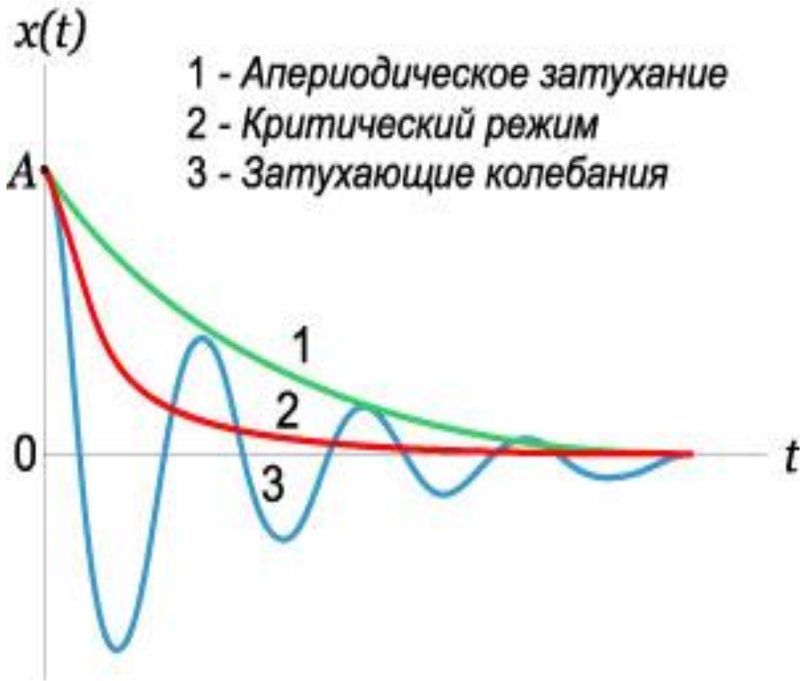
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Затухающие колебания

- *Частота колебаний*

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

1. $\gamma^2 > \omega_0^2$ - кривая 1.
2. $\gamma^2 = \omega_0^2$ - кривая 2.
3. $\gamma^2 < \omega_0^2$ -кривая 3.
4. $\gamma^2 \ll \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad \omega \approx \omega_0.$



Затухающие колебания-Пример 1

- Константы в уравнениях находятся из начальных условий.

Два простых примера.

А). Тело переместили из положения равновесия в положение x_0 и отпустили без начальной скорости. Очевидно, что в этом случае $A = x_0, \varphi_0 = 0$. Окончательно имеем

$$x = x_0 e^{-\gamma t} cos\omega t.$$

Затухающие колебания-Пример 2

- Б). В положении равновесия телу сообщили скорость v_0.

В этом случае

$$A\cos(\varphi_0) = 0 \;\rightarrow\; \varphi_0 = \pi/2,$$

$$v_0 = -\omega A\sin(\pi/2) \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega}.$$

$$x = \frac{v_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin\omega t.$$

Затухающие колебания

- Для случая слабого трения ($\omega \approx \omega_0$) полезно ввести логарифмический декремент затухания λ, равный логарифму отношения амплитуд в момент времени *t* и *t+T*, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний.

$$\lambda = ln\frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma(t+T)}} = \gamma T.$$

Логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в «*e*» раз. Иначе логарифмический декремент затухания можно определить, как величину, пропорциональную натуральному логарифму отношения амплитуд x_0 и x_N двух колебаний, отстоящих друг от друга на *N* периодов:

$$\lambda = \frac{1}{N} ln\frac{x_0}{x_N}.$$

Например, пусть через 50 колебаний амплитуда смещения уменьшилась в 2 раза. Найдем λ для этого случая:

$$\lambda = \frac{1}{50} ln2 \approx \frac{1}{50} 0.693 = 0.0139.$$

Затухающие колебания

- При малом затухании можно приближенно считать, что энергия E убывает, как квадрат амплитуды:

$$E = E_0 e^{-2\gamma t}.$$

При малых γ изменение энергии за период

$$\Delta \mathrm{E} = E_0 - E = E_0(1 - e^{-2\gamma T}) = 2\gamma T E_0,$$

Затухающие колебания

- Отношение начальной энергии к изменению энергии за период колебаний к начальной энергии равно:

$$\frac{E_0}{\Delta E} = \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{2\gamma} = \frac{1}{2\pi}Q.$$

Величину $Q = \frac{\omega}{2\gamma}$ называют добротностью. С точностью до множителя $1/2\pi$ она равна отношению начальной энергии к изменению энергии за период колебаний к начальной энергии. Чем меньше трение – тем больше добротность, тем меньше потери энергии колебаний.

Добротность и логарифмический декремент затухания связаны соотношением;

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

Например, в приведенном выше примере $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{0.0139} \approx 227.$

Задача

- Период затухающих колебаний *T* = 1 с, логарифмический декремент затухания θ = 0,3, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при t = 2T составляет 5 см. Запишите уравнение движения этого колебания

Задача

Дано	***Решение***
$T = 1$ с $\Theta = 0{,}3$ $\varphi = 0$ $t = 2T$ $x_1 = 5$ см $= 0{,}05$ м	$x = A_0\, e^{-\delta t} \cos \omega t$, $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $\quad \Theta = \delta T$, $\delta = \dfrac{\Theta}{T}$, $\quad x_1 = A_0\, e^{-\delta\, 2T} \cos \dfrac{2\pi}{T} \cdot 2T = A_0\, e^{-2\Theta}$, $A_0 = x_1\, e^{2\Theta}$, $\quad x = A_0\, e^{-\frac{\Theta}{T} t} \cos \dfrac{2\pi}{T} t$.
$x(t)$ — ?	***Ответ*** $\quad x = 9{,}1 \cdot e^{-0{,}3t} \cos 2\pi t$, см.

Вынужденные колебания - Резонанс

- Пусть на колебательную систему (например, на тело на пружине) действует внешняя сила, изменяющаяся со временем по гармоническому закону с частотой ω:

$$F(t) = F_0 cos\omega t.$$

При отсутствии затухания из второго закона Ньютона имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} cos\omega t,$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m} -$ собственная частота колебаний системы.

Вынужденные колебания - Резонанс

- Решением этого уравнения является выражение:

$$x = A\left(cos\omega_0 t + \varphi_0\right) + \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega\right)} cos\omega t.$$

Второе слагаемое, показывающее влияние вынужденной силы, резко возрастает при $\omega \to \omega_0$. Указанное явление называется *резонансом*. В данной простой модели амплитуда колебаний $x(t)$ стремится к бесконечности, если частота вынужденной силы стремится к частоте свободных колебаний системы. При этом колебания перестают быть малыми, и уравнение второго закона Ньютона становится неверным.

Вынужденные колебания - Резонанс

- Учтем затухание колебаний.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}cos\omega t.$$

Решением этого уравнения является выражение:

$$x = Ae^{-\gamma t}cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi),$$

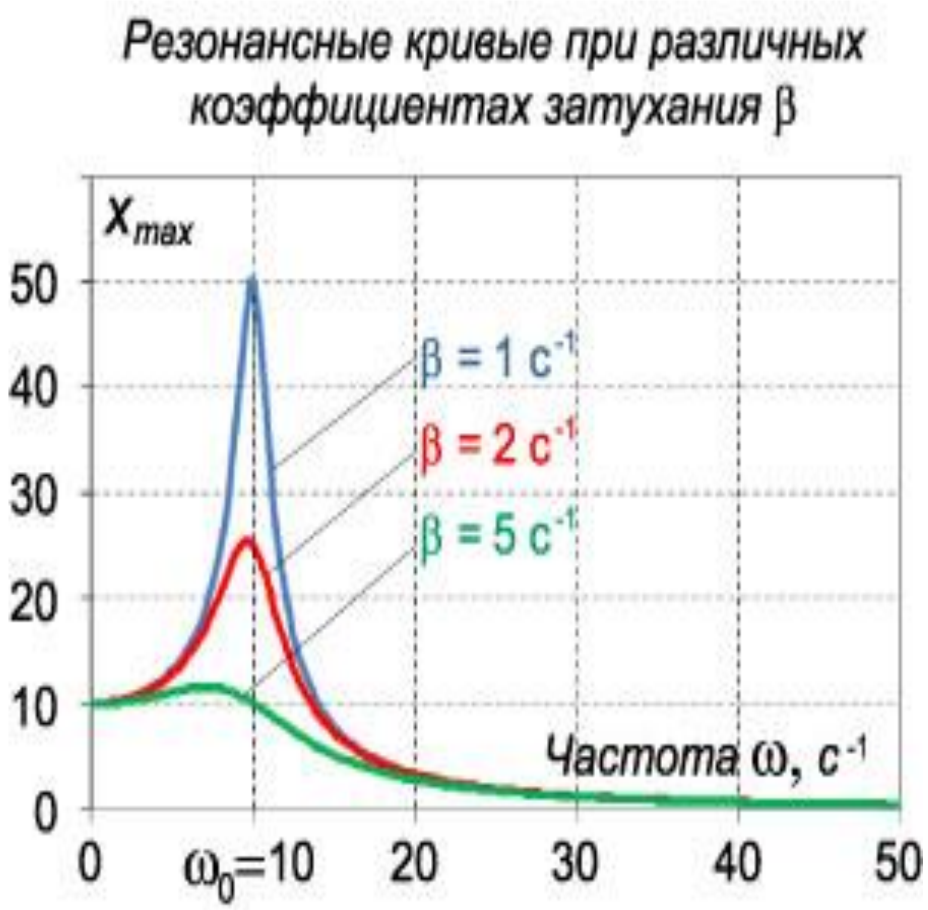
где $\varphi = -arctg\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$- сдвиг фазы между амплитудой и силой.

При $t \to \infty$ первое слагаемое стремится к нулю и, таким образом установившиеся колебания описываются формулой:

$$x = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi)$$

Вынужденные колебания - Резонанс

Зависимость амплитуды установившихся колебаний *x* от частоты вынужденной силы *ω* вблизи резонанса при различных коэффициентах затухания показана ниже на рисунке. Такие кривые называются *резонансными кривыми*



Вынужденные колебания - Резонанс

- Максимальная амплитуда установившихся колебаний при резонансе будет конечной и равной

$$x_{max}(\omega = \omega_0) = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}.$$

Добротность показывает во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при резонансе превышает их амплитуду вдали от резонанса. При стремлении частоты вынужденной силы ω к нулю амплитуда колебаний механической системы приближается к:

$$\lim_{\omega\to 0} x = \lim_{\omega\to 0} \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

Поэтому добротность механической колебательной системы Q будет равна

$$Q = \frac{x_{max}(\omega = \omega_0)}{x(\omega \to 0)} = \frac{\dfrac{F_0}{2m\gamma\omega_0}}{\dfrac{F_0}{m\omega_0^2}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Точное решение

-

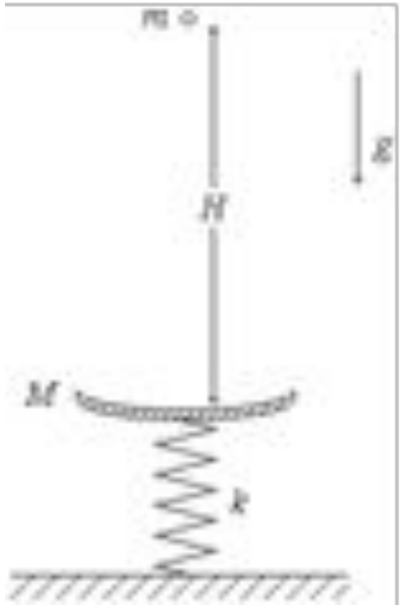
  - $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$
  - $\text{A}_{\text{рез}} = \dfrac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

Колебания

Основные результаты этой лекции будут нам необходимы при изучении электрических колебаний и волновых явлений

Задача 1

- Груз массой *m* упал вертикально со скоростью *V* на чашку пружинных весов. Масса чашки равна *M*, жесткость пружины – *k*. При ударе груз прилипает к чашке. Найти зависимость координаты чашки от времени после падения пластилина.



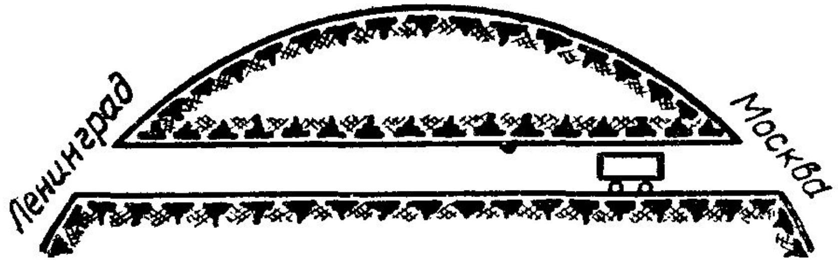
Задача 1

- После падения пластилина чашка приобретает скорость
- $V_0 = \frac{mV}{M+m}$ и колеблется с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$.
- Положение равновесия смещается в точку $x = \frac{mg}{k}$ Подставляя начальные условия $x(0) = 0$ и $V(0) = V_0$ в общее решение уравнения колебаний типа
-
- $x = Asin\omega t + Bcos\omega t + \frac{mg}{k}$,
-
- Получим
-
- $x = \frac{mV_0}{\sqrt{k(m+M)}} sin\omega t + \frac{mg}{k}(1 - cos\omega t)$.

Задача 2

- Вообразим, что между Москвой и Ленинградом прорыт тоннель, в котором проложены рельсы.

Как будет вести себя вагон, поставленный на эти рельсы, если на его пути не будет трения и сопротивления воздуха? Сколько времени он будет двигаться до Ленинграда? (Начальная скорость вагона равна нулю.)



Задача 2 - решение

238. Рассмотрим этот вагон в промежуточный момент времени (рис. 294). Внутри Земли сила тяжести изменяется прямо пропорционально расстоянию от центра O. Поэтому

$$P = mg\,\frac{OB}{R},$$

и

$$P_x = -P\cos\alpha = -\frac{mg}{R}\,OB\cos\alpha = -\frac{mg}{R}\,x,$$

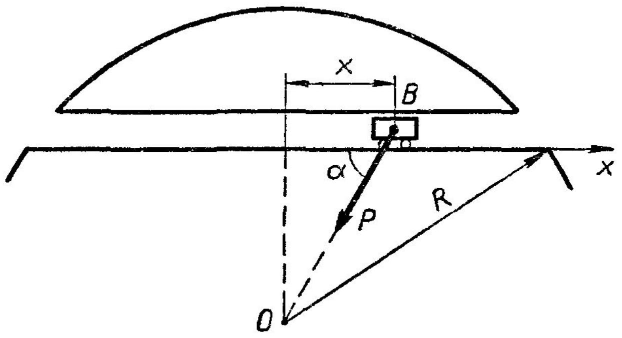


Рис. 294

где P_x — проекция силы тяжести на ось x. Мы видим, что сила, движущая вагон, является восстанавливающей, с коэффициентом $k = \frac{mg}{R}$. Следовательно, вагон будет совершать гармонические колебания между Москвой и Ленинградом. Период этих колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

что после вычислений дает $T \approx 84$ *мин.* Поэтому на движение от Москвы до Ленинграда будет затрачено примерно 42 *мин.*

Задача 3

12.53. Тело массой $m=10$ г совершает затухающие колебания с максимальной амплитудой $A_{max}=7$ см, начальной фазой $\varphi=0$ и коэффициентом затухания $\delta=1,6$ с$^{-1}$. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила F, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид $x=5\sin(10\pi t-3\pi/4)$ см. Найти (с числовыми коэффициентами) уравнение собственных колебаний и уравнение внешней периодической силы.

Задача 3 -решение

12.53. Уравнение собственных колебаний имеет вид

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t. \qquad (1)$$

По условию сдвиг фаз между собственными и вынужденными колебаниями равен $-3\pi/4$; следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \operatorname{tg}(-3\pi/4) = 1,$$

отсюда

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\delta\omega}. \qquad (2)$$

У нас $\omega = 10\pi$ и $\delta = 1{,}6\ \text{с}^{-1}$. Подставляя эти значения в (2), получим $\omega_0 = 10{,}5\,\pi$, и тогда уравнение собственных колебаний примет вид

$$x = 7e^{-1{,}6t} \sin 10{,}5\pi t \ \text{см}.$$

Уравнение внешней периодической силы имеет вид

$$F = F_0 \sin \omega t.$$

Максимальное значение внешней периодической силы

$$F_0 = Am\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} = 72\ \text{мН},$$

До следующей лекции