

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ



2

*Литература:
Линейная алгебра
Хамидуллин Р.Я. Гулиян
Б.Ш.
Занятие 3*



1.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

где E – единичная матрица



Алгоритм нахождения обратной матрицы

1

Определяем, квадратная ли матрица. Если нет, то обратной матрицы для нее не существует.



2

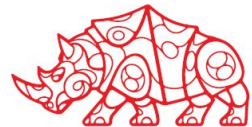
*Находим определитель
матрицы.*

*Если он равен нулю, то
обратной
матрицы не
существует.*



3

*Заменяем каждый
элемент
матрицы
его алгебраическим
дополнением.*



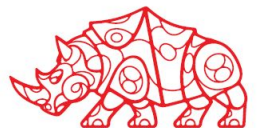
4

*Полученную матрицу
транспонируем.*



5

*Каждый элемент
полученной матрицы
делим
на определитель
исходной
матрицы. Получаем
матрицу, обратную*



6

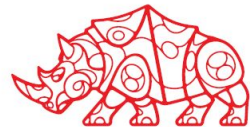
*Делаем проверку.
Для этого
перемножаем
полученную и
исходную матрицы.
Должна получиться
единичная матрица.*



Пример.

Найти матрицу,
обратную к матрице A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$



Решение:

Применяем алгоритм нахождения обратной матрицы.

① Матрица квадратная, следовательно обратная матрица для нее существует.

② Находим определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$



③ Находим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^2 \cdot M_{22} = 2$$

Составляем из полученных значений матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



④ Транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

⑤ Каждый элемент матрицы делим на определитель $\Delta=1$ и получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$



⑥

Проверяем:

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$



Практикум :

Найти матрицы, обратным данным:

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

