

Практическая работа №3

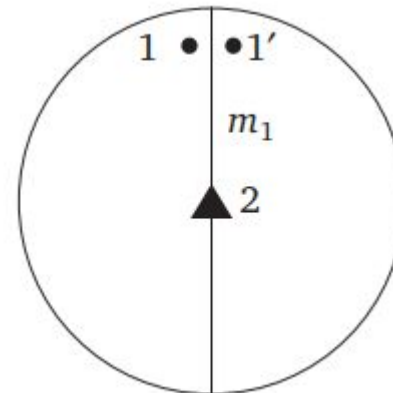
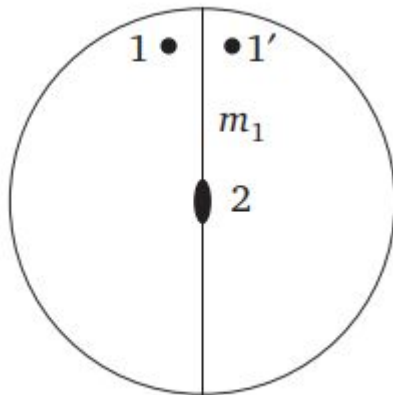
Группы симметрии и операции. Прямая и обратная решетки.

Дифракция

Задача 1. Группы симметрии, операции симметрии

Имеется ось симметрии n -го порядка и плоскость симметрии, параллельная этой оси. Какие возникнут новые элементы симметрии (точечные группы) в результате взаимодействия названных элементов симметрии, если даны:

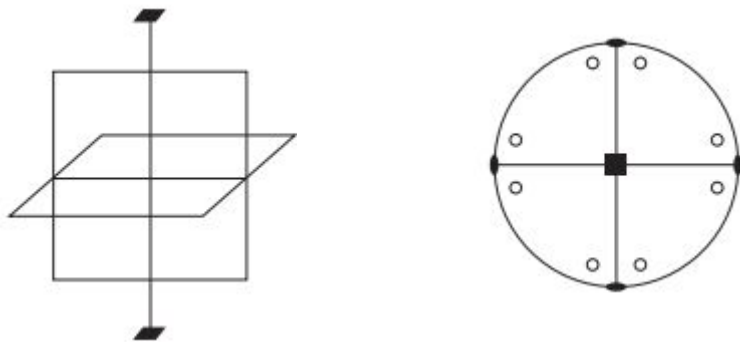
- а) ось симметрии второго порядка;
- б) ось симметрии третьего порядка?



Задача 2

В кристалле имеется одна ось четвертого порядка и плоскости симметрии, перпендикулярные и параллельные этой оси (рис. 2.18, а).

Определите весь набор элементов симметрии, систему и класс симметрии. Покажите эти элементы симметрии на стереографической проекции.

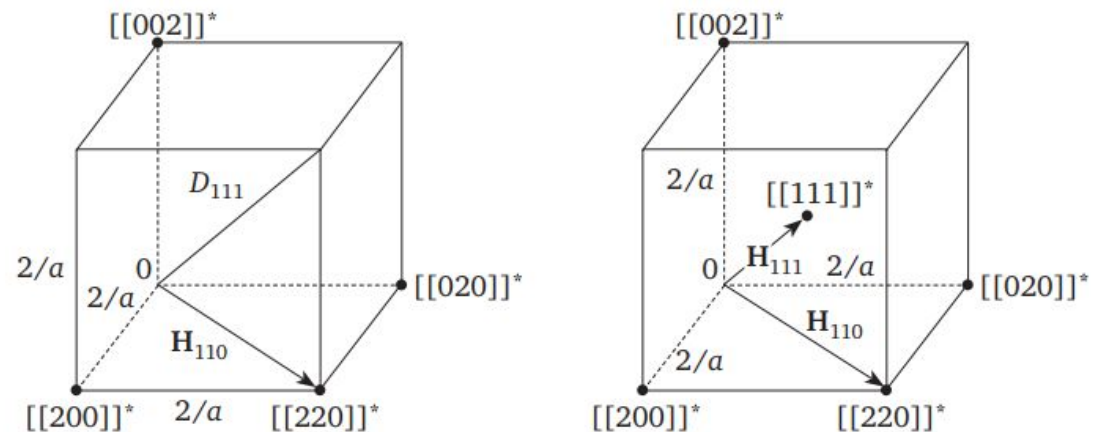
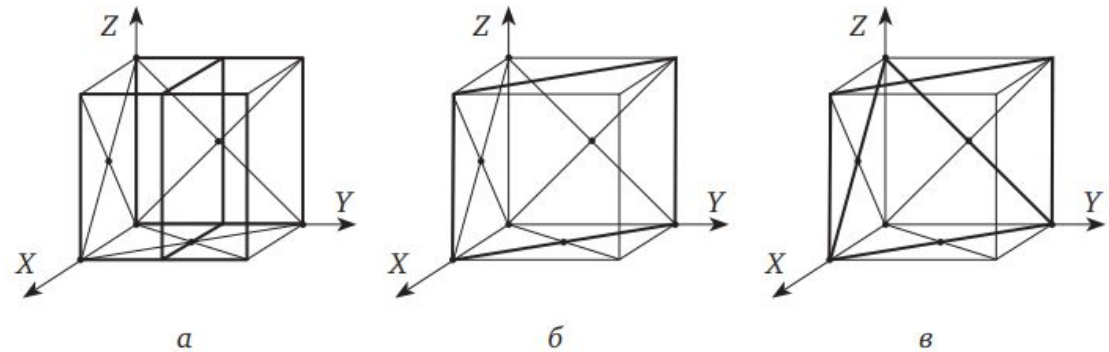


Задача 3

Даны две плоскости зеркального отражения, параллельные друг другу и расположенные на расстоянии a . Какая симметрическая операция получится в результате взаимодействия этих двух плоскостей?

Задача на самостоятельное решение

Известно, что у кристалла прямая решетка — гранецентрированная кубическая решетка. Определить тип обраной решетки Браве.



Задачи 4-6. Дифракция

Дифракционная картина – Фурье-образ объекта, на котором происходит дифракция. Для решения задач дифракции

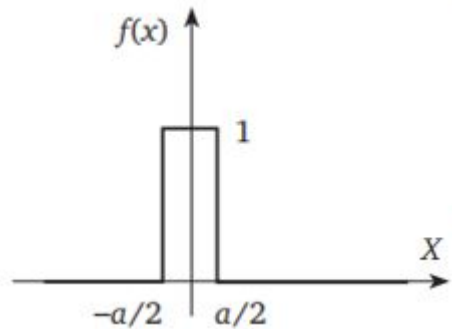
Необходимо математически описать объект, на котором происходит дифракция, в виде функции $f(x)$, и вычислить интеграл Фурье для этой функции.

$$\mathbb{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{2\pi i u x} dx.$$

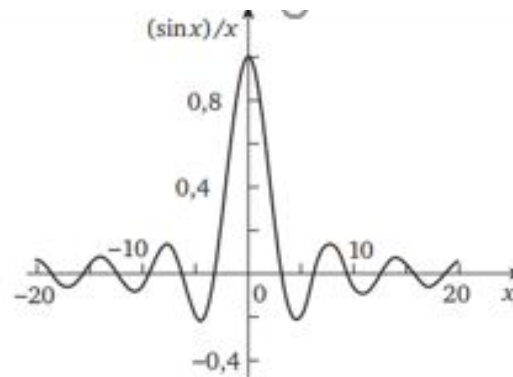
Задача 4. Дифракция

Плоская волна падает на узкую щель шириной a . Вычислить дифракционную картину (распределение интенсивности) на экране за щелью.

$$\mathbb{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{2\pi i u x} dx.$$



$\mathbb{F}\{f(x)\}$ →



Формулы Эйлера

$$\exp(\pm ix) = \cos x \pm i \sin x$$

$$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$$

Табличный
интеграл

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

Задача 5. Дифракция

Определить результат интерференции двух сферических когерентных волн в точке M , источники которых расположены в точках A_1 и A_2 .

Сферическая

волна:

$$E_1 = \frac{E_{01}}{r_1} \sin(\omega t - kr_1),$$

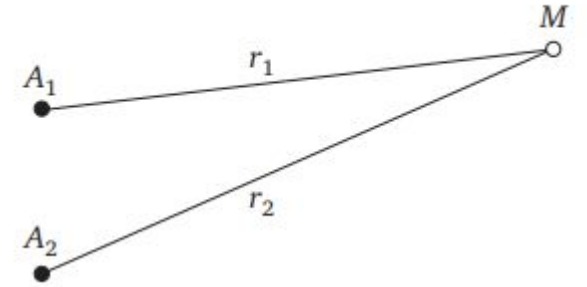
$$E_2 = \frac{E_{02}}{r_2} \sin(\omega t - kr_2).$$

Амплитуда двух когерентных волн в точке?

Разность фаз в точке

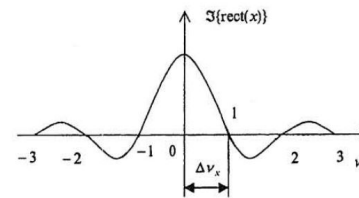
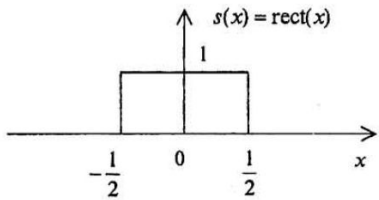
н.н.

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -k(r_2 - r_1).$$

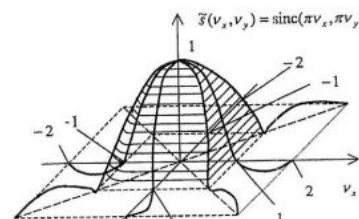
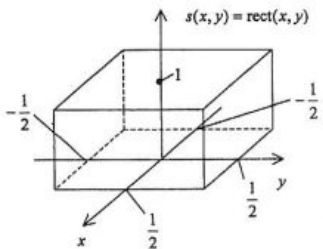


Примеры Фурье образов различных объектов

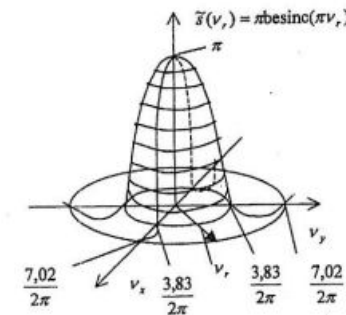
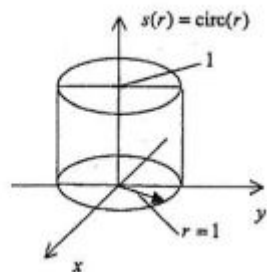
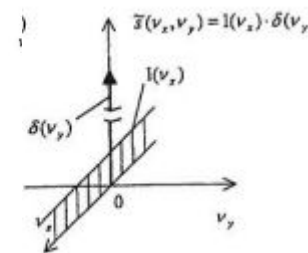
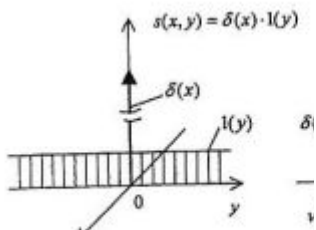
$$s(x) = \text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2}; \\ 0 & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$



$$s(x, y) = \text{rect}(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, y \text{ - любое;} \\ 0, & |y| > \frac{1}{2}, x \text{ - любое.} \end{cases}$$



$F\{f(x)\}$



Примеры Фурье образов различных объектов

Гребенчатая функция. Периодическая функция, состоящая из равноотстоящих δ -функций, обозначается $\text{comb}(x)$:

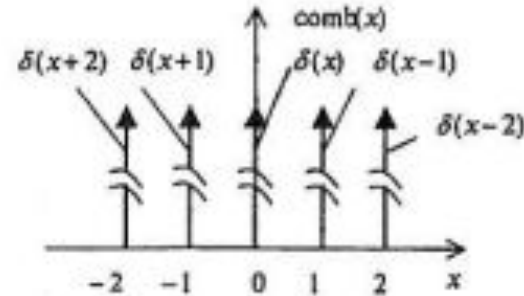
$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) = \text{comb}(x),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

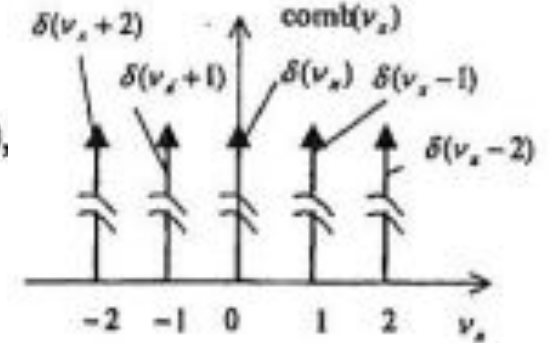
Функция $\text{comb}(x)$, показанная на рис. 29, а, записывается в виде

$$\text{comb}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp(i2\pi kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp(i2\pi kx),$$

где $C_k = 1$.

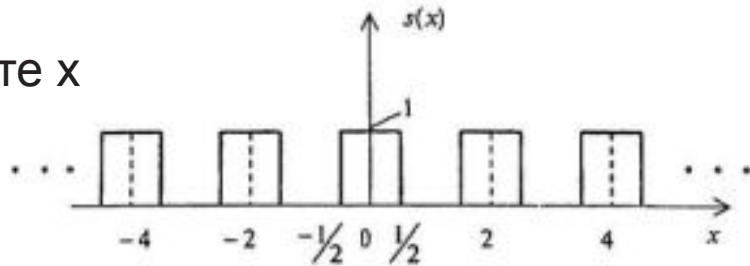


$$\mathfrak{F}\{\text{comb}(x)\} = \text{comb}(v_x),$$

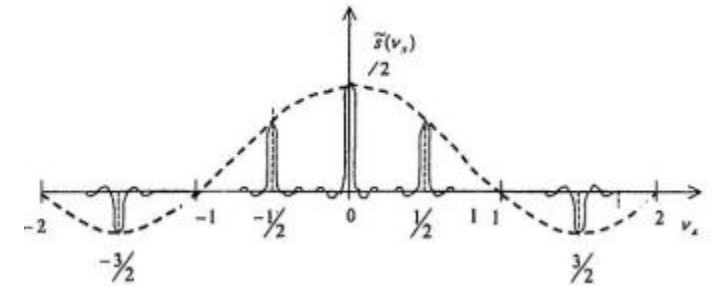


Периодическая последовательность $\text{rect}(x)$ сигналов, ограниченная по координате x

$$s(x) = \left[\text{rect}(x) \otimes \frac{1}{2} \text{comb}\left(\frac{x}{2}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{9}\right).$$



$\mathfrak{F}\{f(x)\}$:



$$\begin{aligned} \tilde{s}(v_x) &= 9 \text{sinc}(\pi v_x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[9\pi(v_x - v'_x)] \delta\left(v'_x - \frac{\kappa}{2}\right) dv'_x = \\ &= \frac{9}{2} \text{sinc}(\pi v_x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left[9\pi\left(v_x - \frac{\kappa}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Задача 6. Дифракция

Рассчитать результат дифракции плоской волны на бесконечной дифракционной решетке.

Считать щель как дельта-функцию (бесконечно большая амплитуда и бесконечно малая толщина)

Изменение индекса суммирования:

$$\sum_{n=-N}^{+N} \exp(nx) = \exp(-Nx) \sum_0^{2N} \exp(nx).$$

Подсказка: Найти в выражении геометрическую прогрессию, сумма которой определяется, как:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Итоговый результат – известная функция Лауэ для дифракции на одномерной решетке

Задача 5. Дифракция

Итоговый результат – известная функция Лауэ для дифракции на одномерной решетке:

$$I_{\Sigma}^M = \left(\frac{E}{R}\right)^2 \prod_{a,b,c} \frac{\sin^2(N\Psi_{a,b,c})}{\sin^2(\Psi_{a,b,c})}.$$

Положения

максимумов:

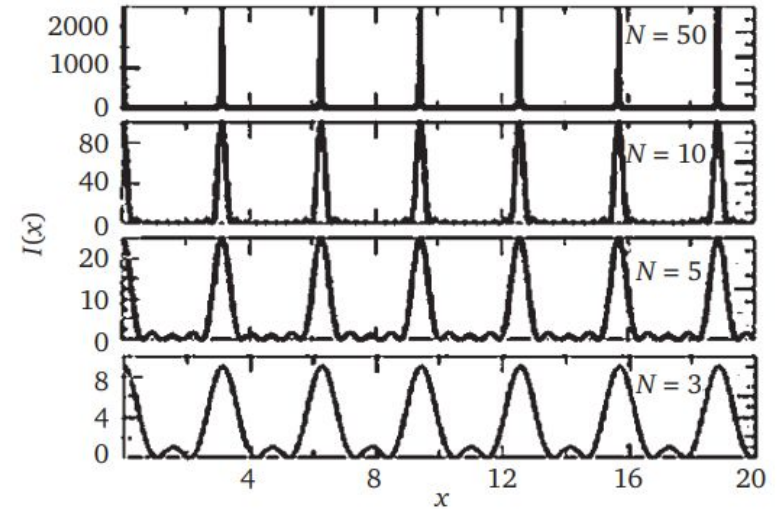
$$\Psi_a = \frac{\pi}{\lambda}[(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0), \mathbf{a}] = \pi h;$$

$$\Psi_b = \frac{\pi}{\lambda}[(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0), \mathbf{b}] = \pi k;$$

$$\Psi_c = \frac{\pi}{\lambda}[(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0), \mathbf{c}] = \pi l.$$

$$I_{\max} = \left(\frac{E}{R}\right)^2 (N^3)^2.$$

С увеличением количества щелей (Рассеивающих центров) дифракционные рефлексы сужаются, амплитуда их возрастает, величина побочных максимумов уменьшается.



Таким образом, функция Лауэ (или уравнение Вульфа — Брэгга) определяют геометрию дифракционной картины, т. е. определяют положения каждого дифракционного рефлекса на дифракционной картине.