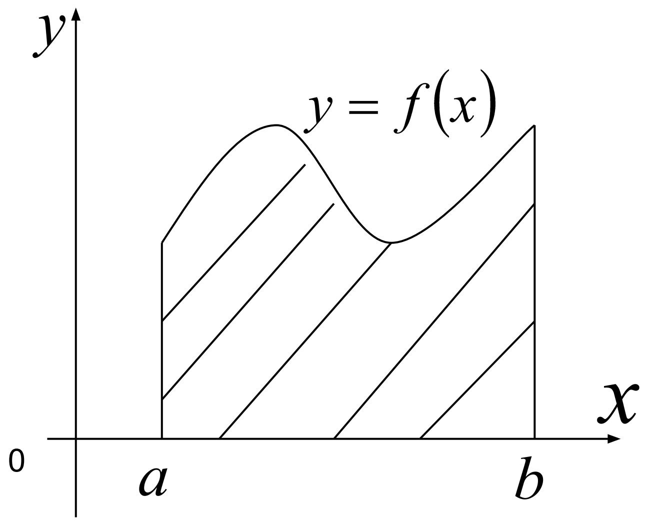
ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Ащеулова Алена Сергеевна,

кандидат физико-математических наук

2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ



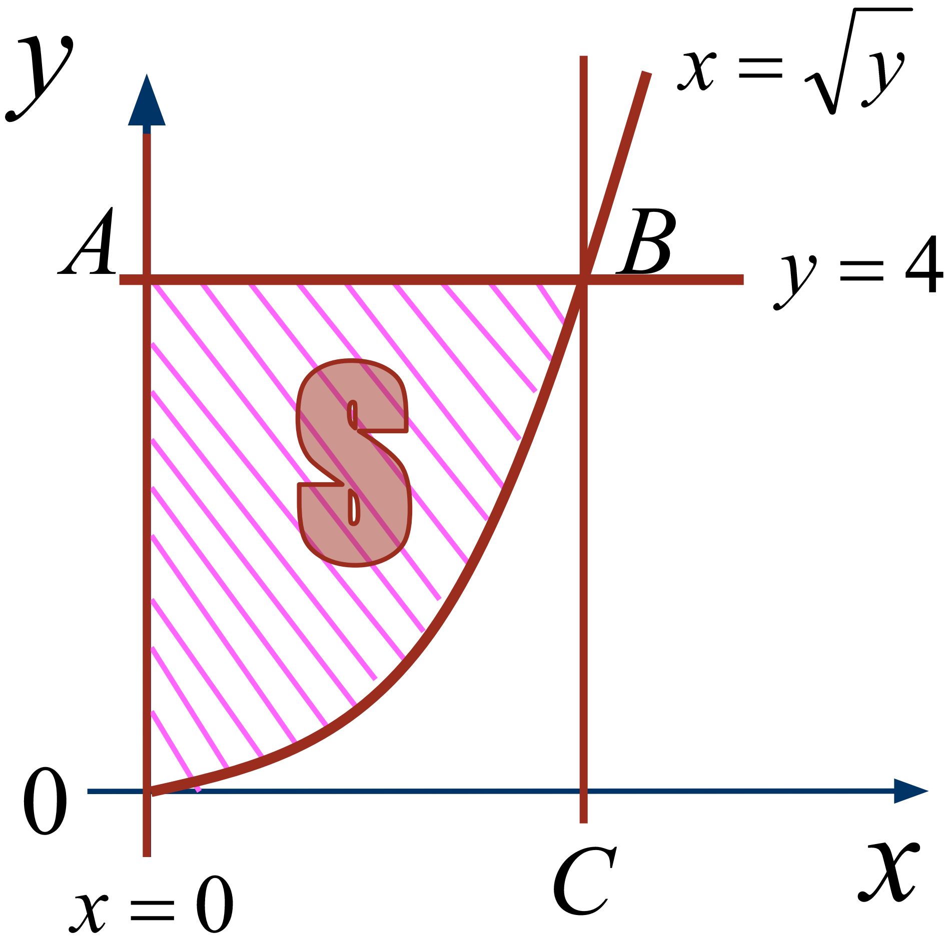
Площадь такой фигуры, называемой криволинейной трапецией, вычисляют по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

ПРИМЕР 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 4$$



$$S_{ABC}=S_{OABC}-S_{OBC}$$

Находим координаты точки В: $\begin{cases} y=4 \\ x=\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow B(2;4)$

$$S_{OABC}=\int_0^2 4dx=4x\Big|_0^2=8$$

$$S_{OBC}=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}$$

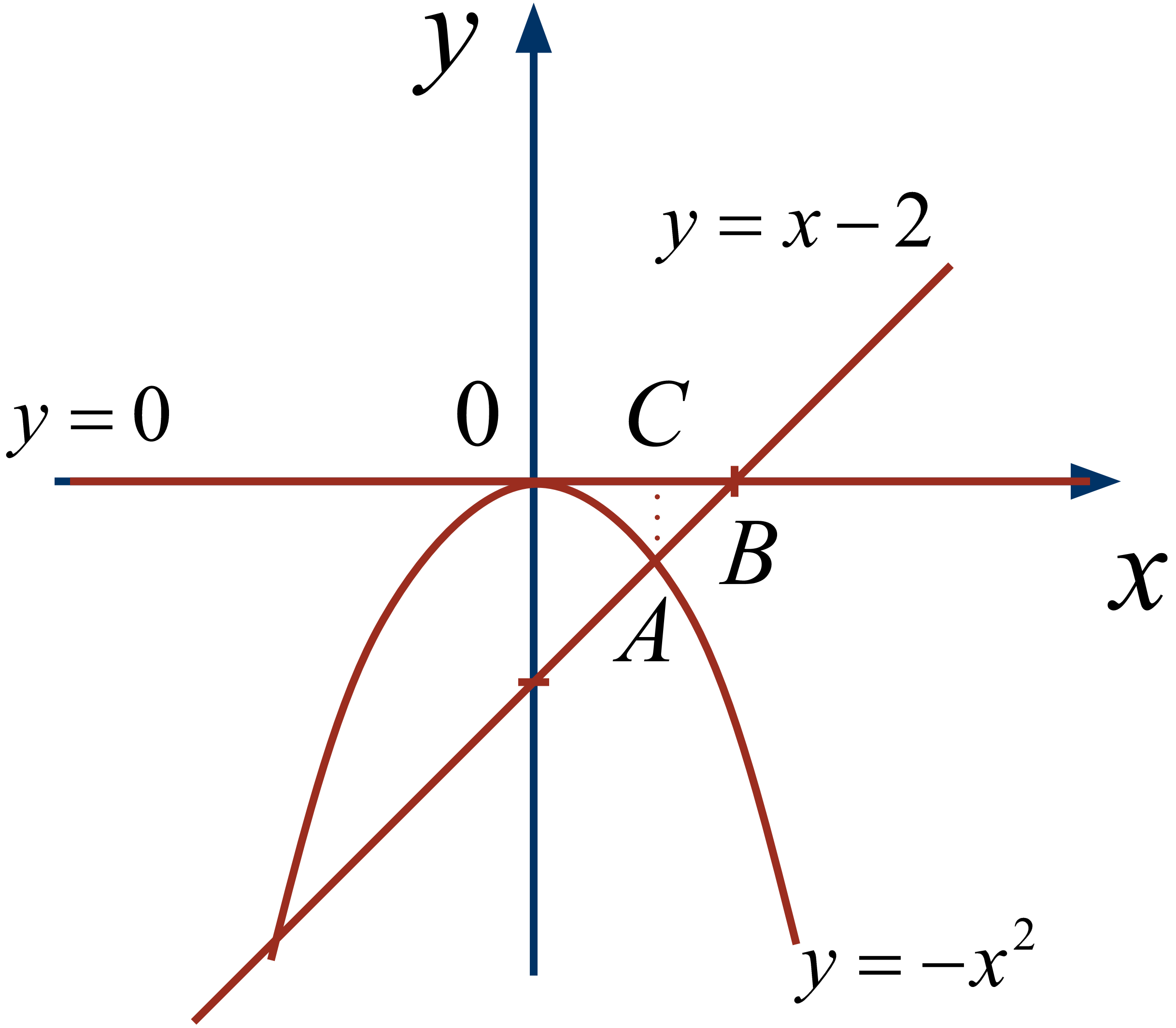
$$S_{ABC}=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

ПРИМЕР 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = -x^2, \quad y = 0,$$

$$y = x - 2$$



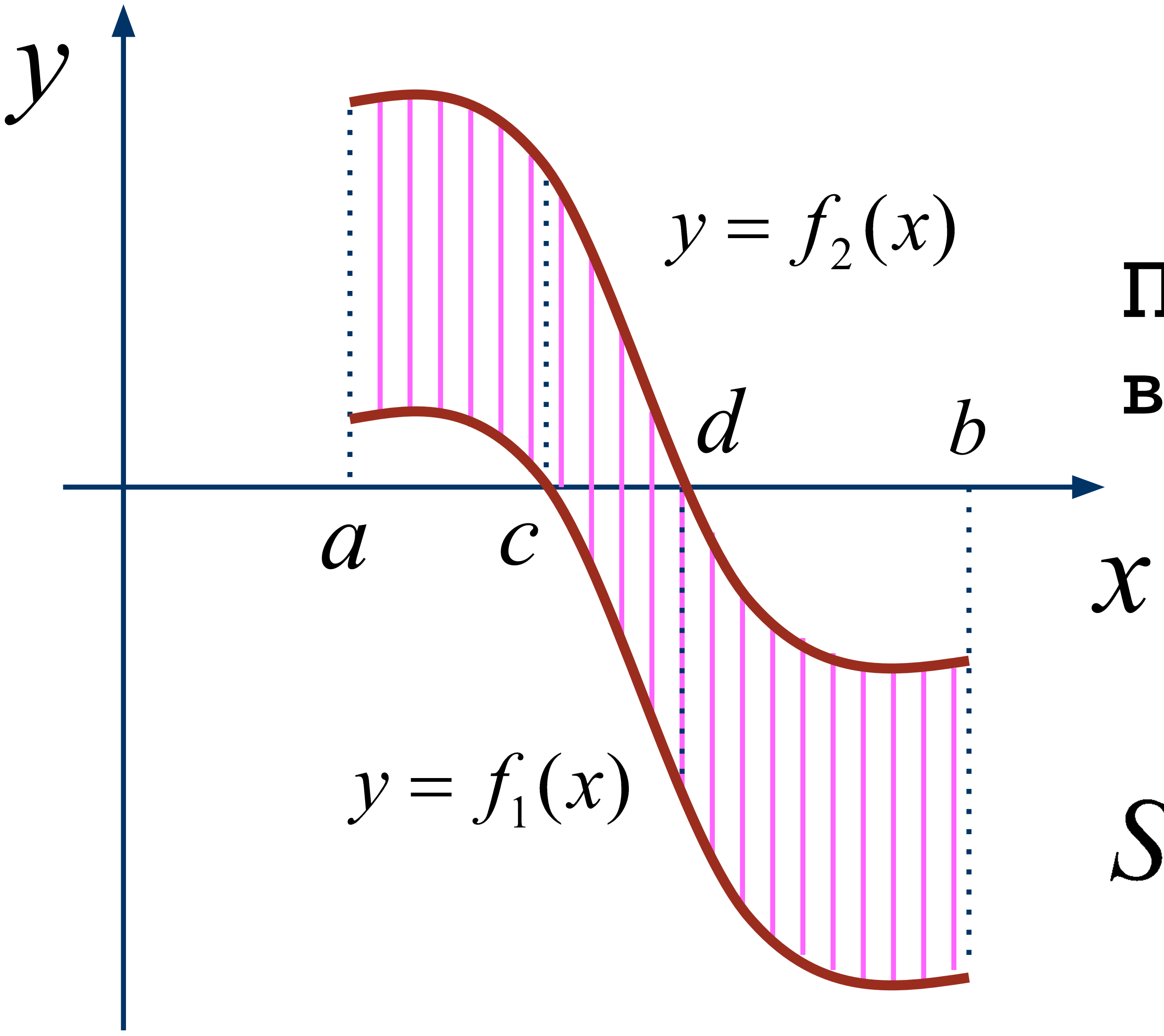
Находим координаты точек O(0,0), B(2,0), A(1,-1).

$$S_{OBA} = S_{OAC} + S_{CAB}$$

$$S_{OAC} = -\int_0^1 (-x^2)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$S_{ABC} = -\int_1^2 (x-2)dx = \left.\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\right|_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$S_{OBA} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$



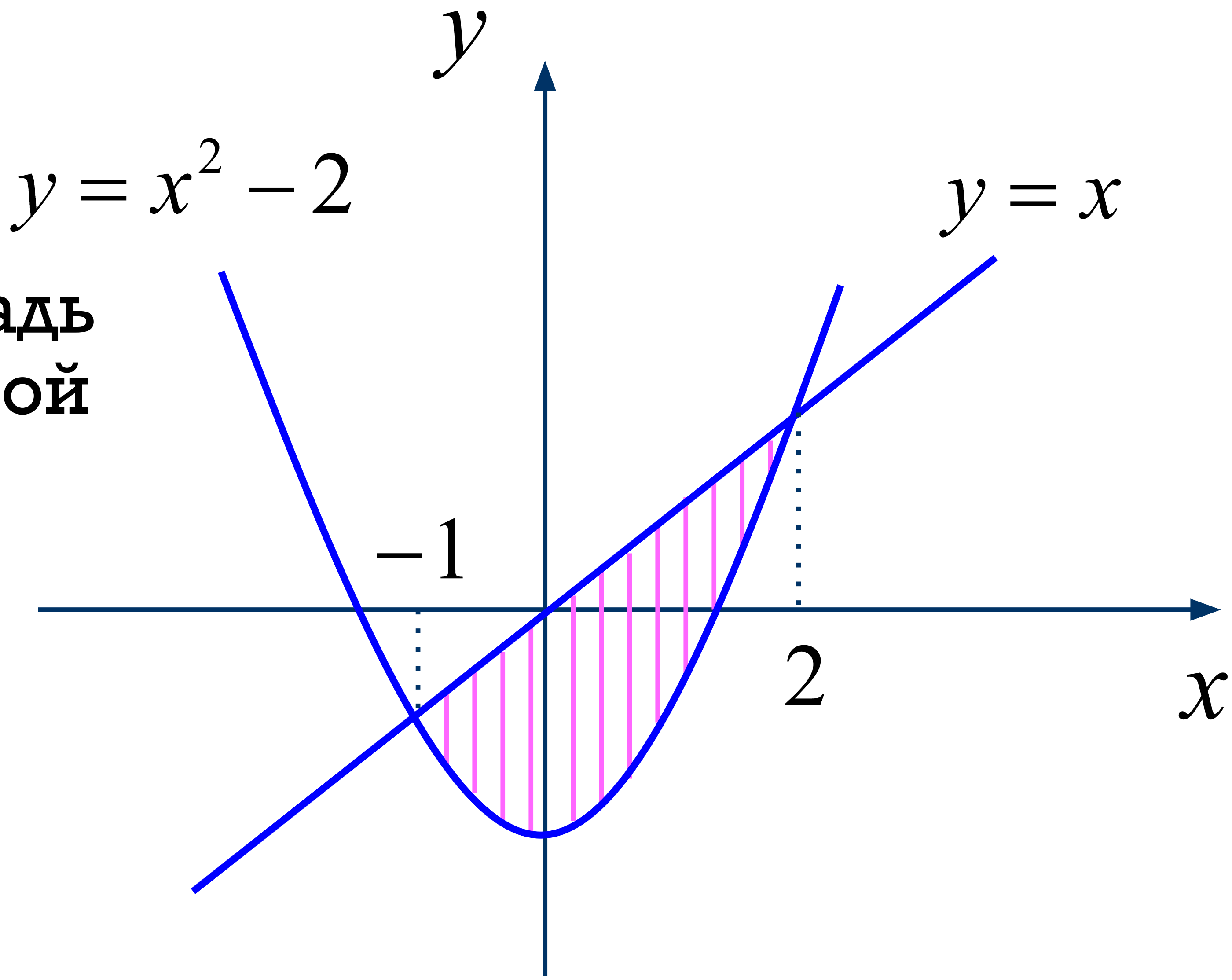
Площадь такой фигуры, вычисляют по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$$

ПРИМЕР 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \quad y = x$$



Находим координаты точек пересечения линий

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

Следовательно, линии пересекаются в точках $(-1,-1), \quad (2,2)$

$$f_1(x) = x^2 - 2, \quad f_2(x) = x$$

$$S = \int_1^2 (x - x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right)\Bigg|_1^2 = 4,5$$

11

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс $a \le x \le b$ и прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, отрезком оси ординат $c \le y \le d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле

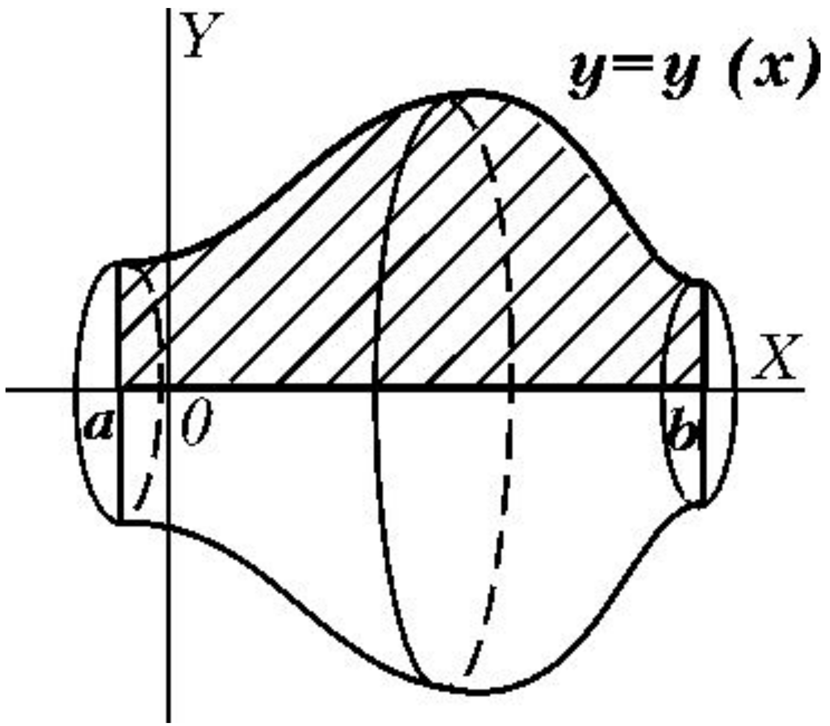
$$V_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 \, dy$$

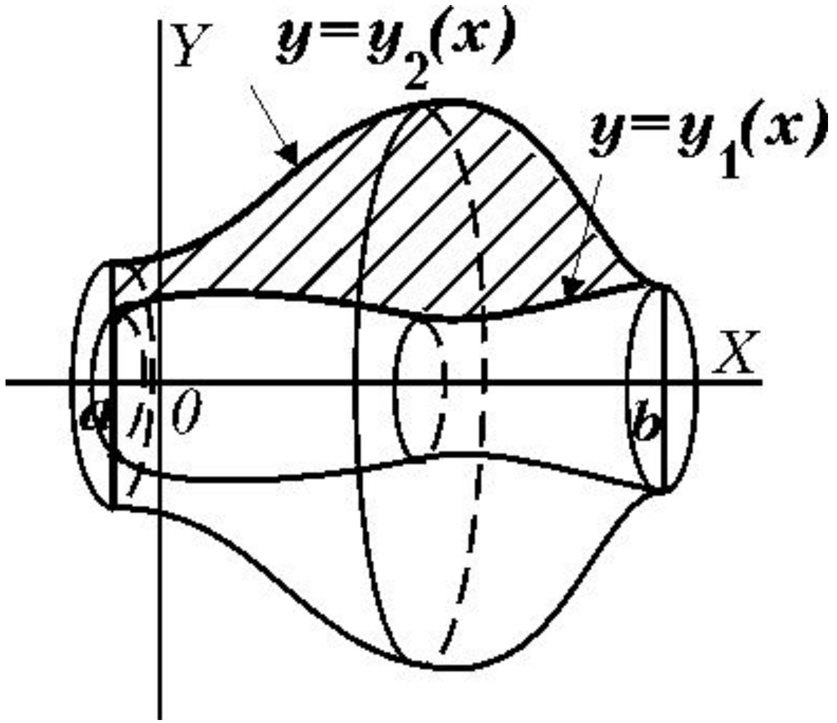
.

ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ОСИ OX

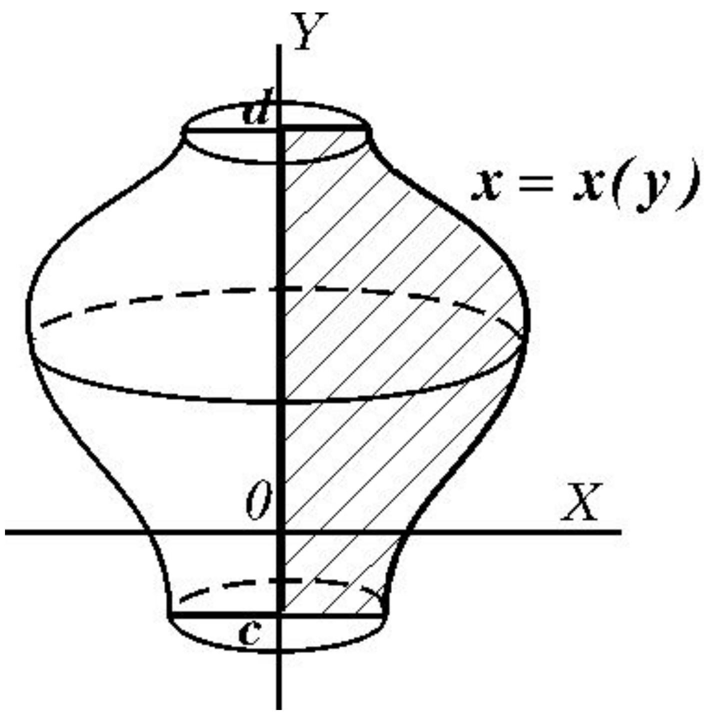
$$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx$$

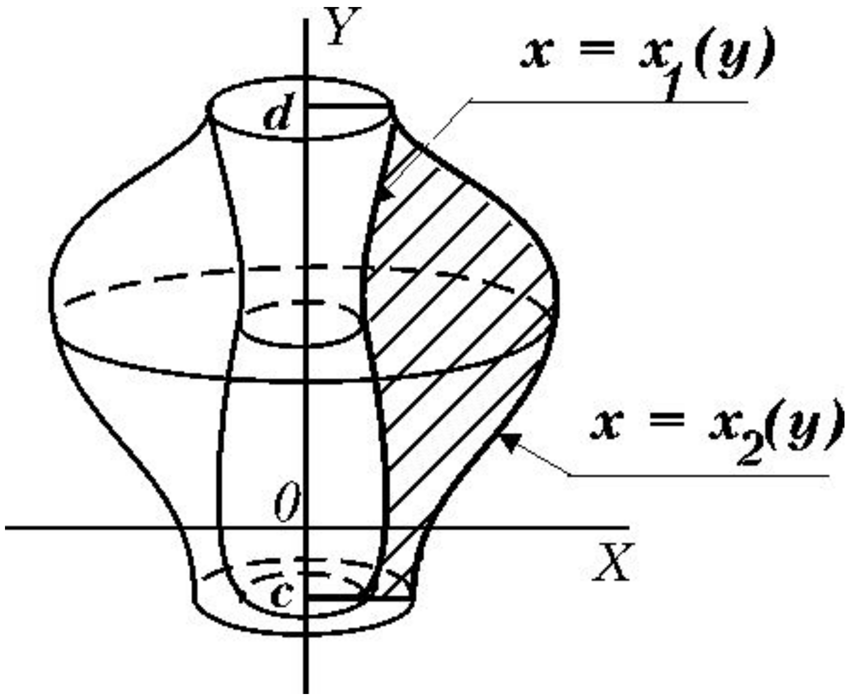
$$V_{ox} = \pi \int_a^b [y_2{}^2(x) - y_1{}^2(x)]\, dx$$

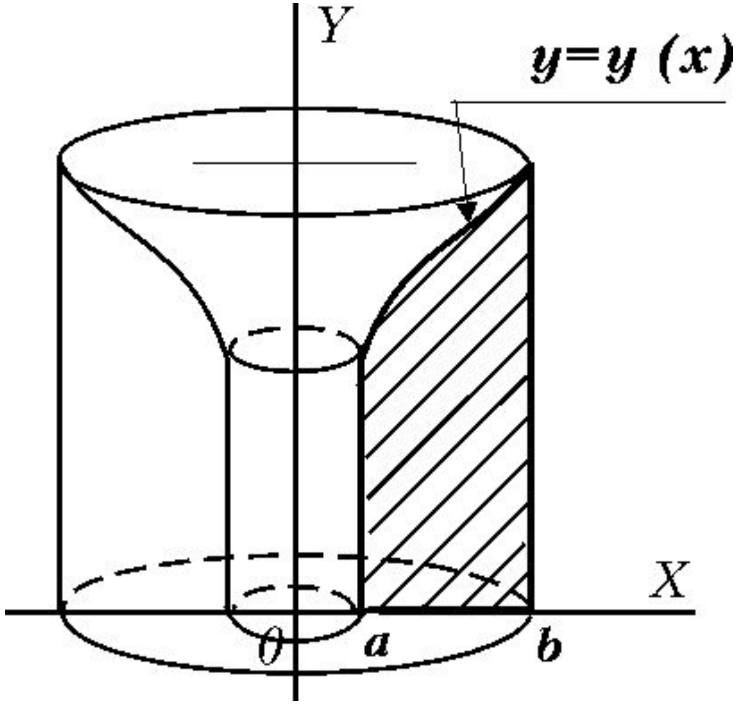




ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ОСИ OY







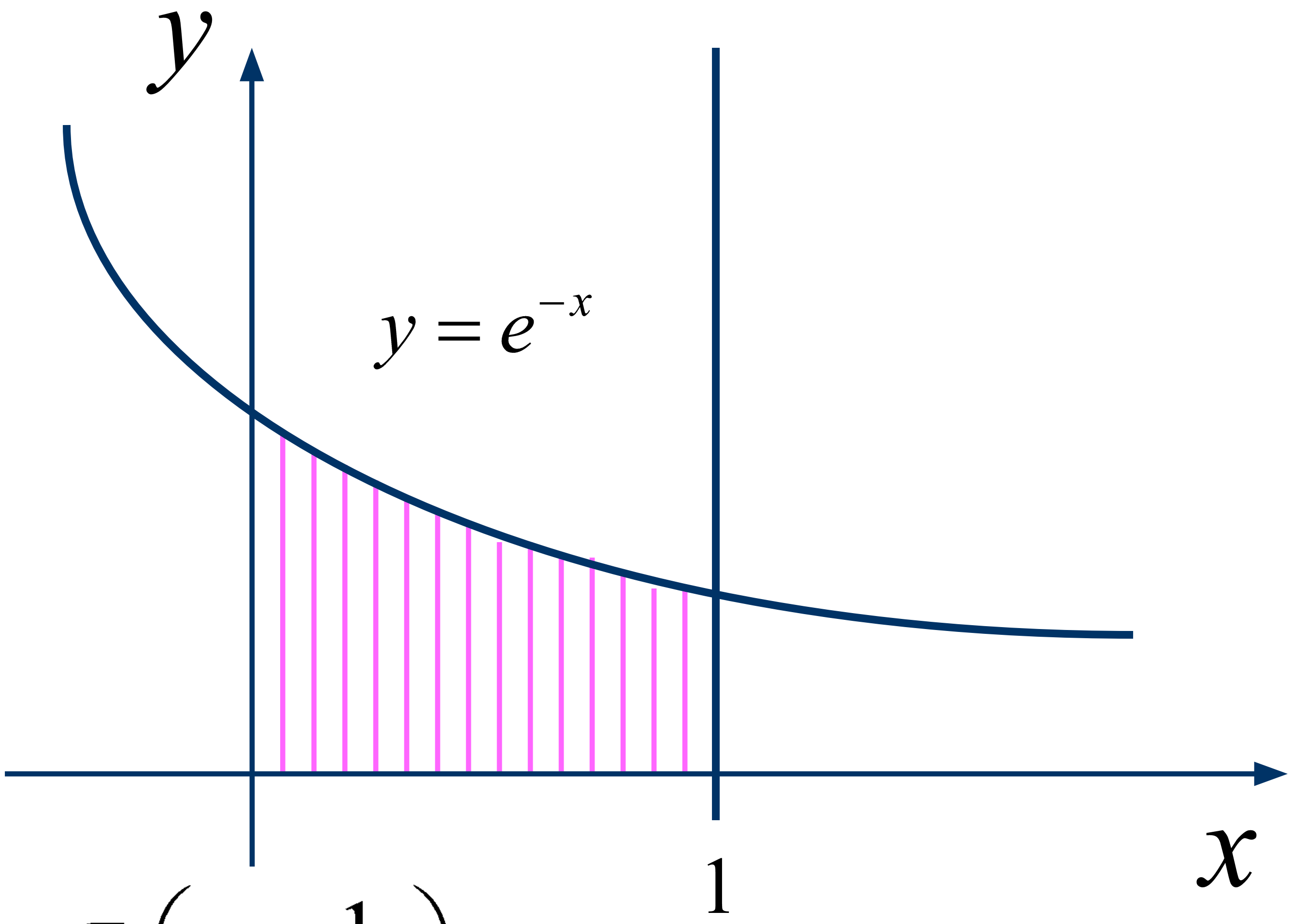
$$V_{oy} = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy \qquad V_{oy} = \pi \int_c^d [x_2{}^2(y) - x_1{}^2(y)]\,dy \qquad V_{oy} = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x)\,dx$$

ПРИМЕР 4

Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$$y = e^{-x}, \quad y = 0,$$

$$x = 0, \quad x = 1$$

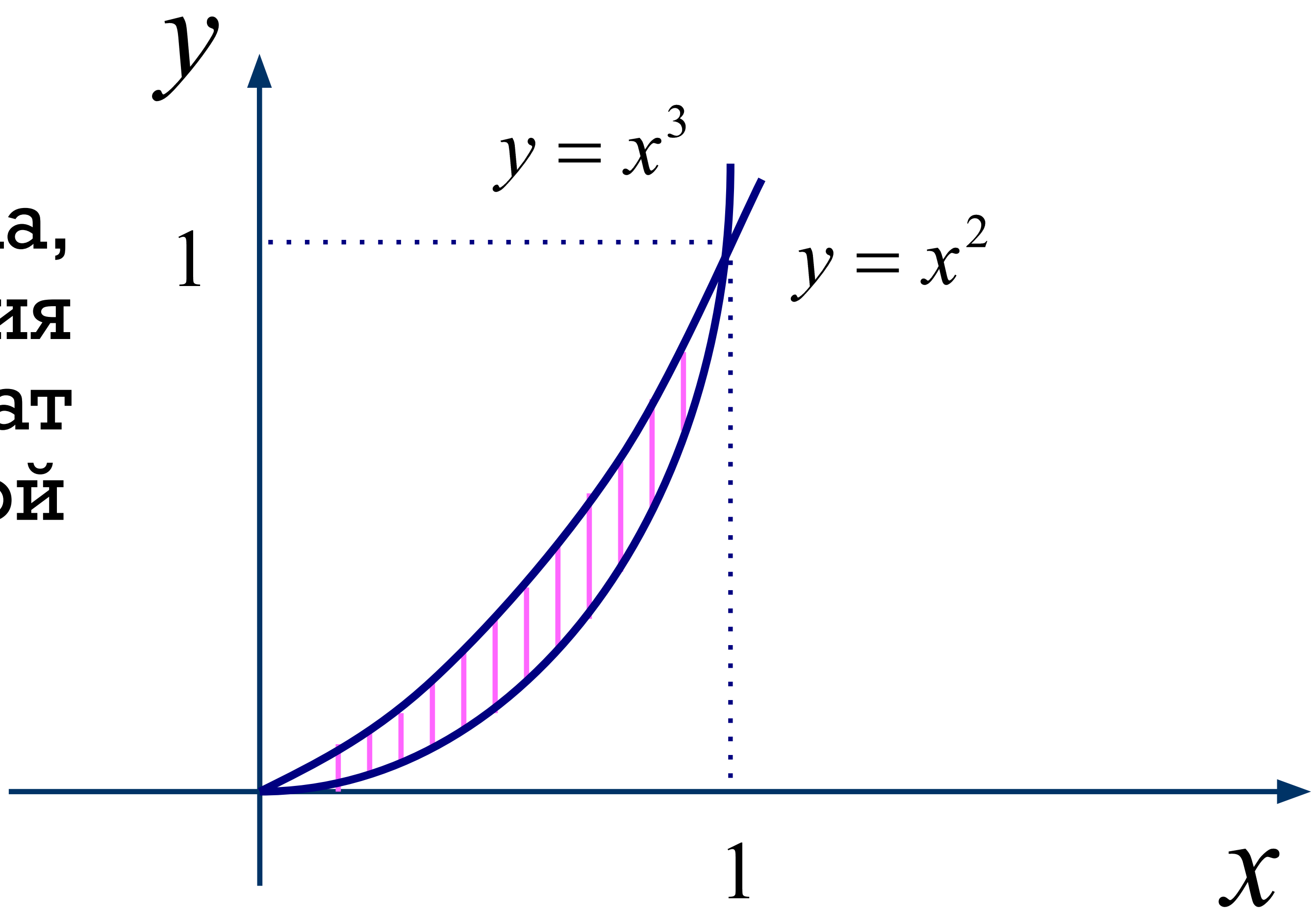


$$V_x = \pi \int_0^1 e^{-2x} dx = -\pi \cdot \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = 1{,}36$$

ПРИМЕР 5

Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2, \quad y = x^3$$



$$V_y = V_{y1} - V_{y2}$$

V_{y1} ограничен линиями $x = \sqrt[3]{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

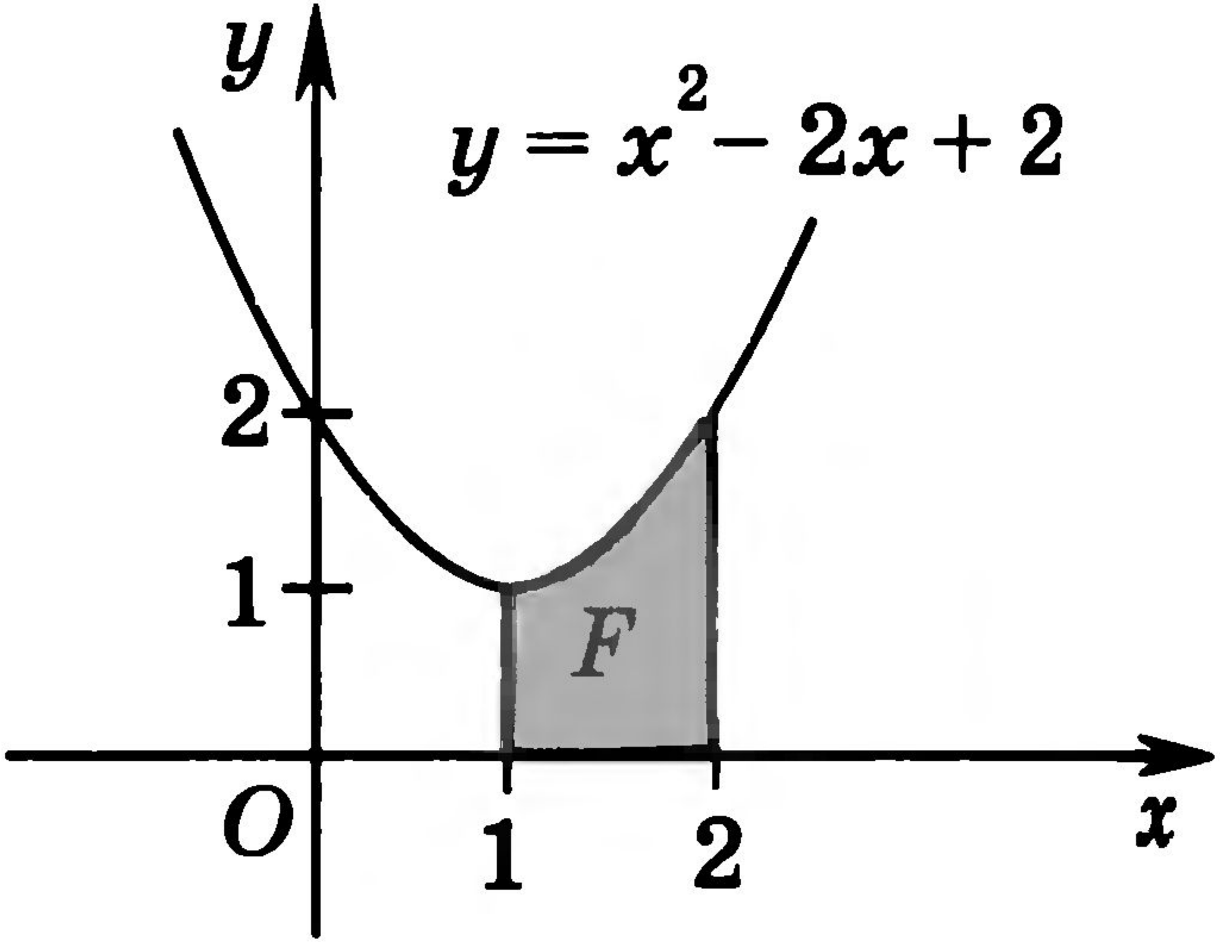
V_{y2} ограничен линиями $x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

$$V_{y1} = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy = \pi \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{5}\pi$$

$$V_{y2} = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

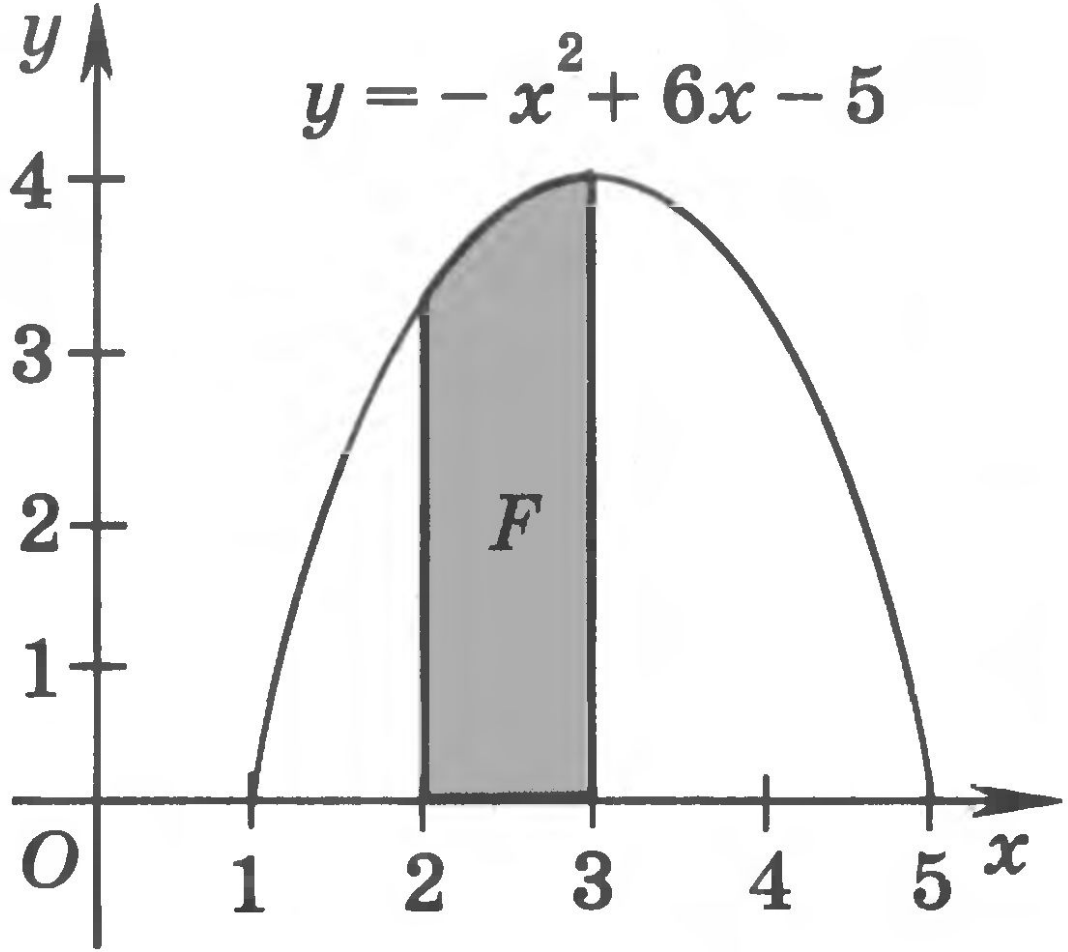
$$V_y = \frac{3}{5}\pi - \frac{1}{2}\pi = 0,1\pi$$

Вычислите площади фигуры



ЗАДАНИЕ 1

Вычислите площади фигуры



ЗАДАНИЕ 2

ЗАДАНИЕ 3

ЗАДАНИЕ 4

3. Вычислите площади фигуры ограниченной линиями

$$y = x^2 - 1 \qquad y = -x^2 - 2x + 3$$

4. Вычислите объем фигуры полученной вращением вокруг оси криволинейных трапеций, ограниченных линиями

$$y = x^2 \qquad y = \sqrt{x}$$