



**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕЧЕТКИХ
ЗНАНИЙ**

Введение

- Часто, представляя знания о сложных предметных областях, приходится сталкиваться с их неполнотой, **неточностью, неоднозначностью, нечеткостью**
- Нечеткость связана с отсутствием точных границ области определений и свойственна большинству понятий
- Эта нечеткость границ приводит к тому, что в общем случае оказывается невозможным решать вопрос о соответствии данного объекта и данного понятия по принципу да/нет
- Часто можно только говорить о степени соотнесенности одного другому, оценивая ее, например, в интервале от 1 (определенное да) до 0 (определенное нет)
- Это означает, что переход от полной принадлежности объекта классу к полной его непринадлежности происходит не скачком, а плавно, причем принадлежность объекта классу выражается числом из интервала $[0,1]$
- Методы представления нечетких знаний были предложены американским профессором Л.Заде в 1965 году
- Он ввел два фундаментальных понятия: **лингвистическая переменная и нечеткое множество**

Понятие лингвистической переменной (1)

- **Лингвистическая переменная (ЛП)** – это переменная, значениями которой являются слова или выражения естественного (иногда искусственного) языка
- Например, переменную Возраст можно рассматривать как лингвистическую переменную, если она принимает не числовые значения (например, от 0 до 100), а лингвистические значения, такие как молодой, старый, очень молодой, очень старый и т.п.
- Лингвистическая переменная описывается кортежем:

$(N, T(N), U, G, M)$, где

N – название лингвистической переменной

$T(N)$ – терм-множество N , т.е. совокупность ее лингвистических значений

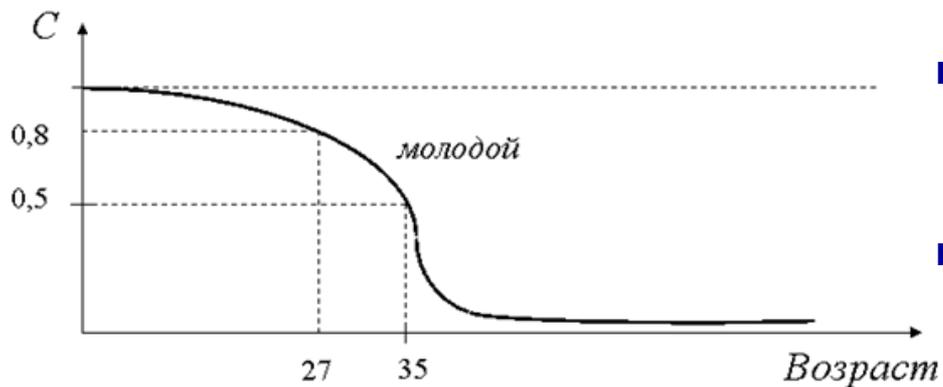
U – универсальное множество

G – синтаксическое правило, порождающее терм-множество $T(N)$

M – семантическое правило, которое каждому лингвистическому значению X ставит в соответствие его смысл $M(X)$, причем $M(X)$ обозначает нечеткое подмножество множества U (т.е. подмножество, границы которого размыты)

Понятие лингвистической переменной (2)

- Смысл лингвистического значения X характеризуется функцией совместимости $\mu(x): U \rightarrow [0,1]$, которая каждому элементу $u \in U$ ставит в соответствие значение совместимости этого элемента с X
- Так, например, если функция совместимости для значения молодой имеет вид, как показано на рисунке, совместимость возраста 27 лет со значением молодой может быть равна 0.8, а 35 лет – 0,5



- Чаще функцию совместимости $\mu(x)$ называют функцией принадлежности
 - Таким образом, с помощью лингвистических переменных можно приближенно описывать понятия и явления не поддающиеся точному описанию
- Если понимать истинность как лингвистическую переменную со значениями истинно, почти истинно, не очень истинно и т.п., то мы переходим к так называемой нечеткой логике, на которую могут опираться приближенные рассуждения

Нечеткие множества (1)

- Нечеткое множество (НМ) $A = \{(x, \mu_A(x))\}$ определяется как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов x универсального множества X и соответствующих степеней принадлежности $\mu_A(x)$, или непосредственно в виде функции
$$\mu_A: X \rightarrow [0,1]$$
- Универсальным множеством (УМ) X нечеткого множества A называется область определения функции принадлежности A
- Носителем НМ A называется множество таких точек в X , для которых $\mu_A(x) > 0$
- Высотой НМ A называется величина $\sup \mu_A(x)$
- Точкой перехода НМ A называется такой элемент множества X , степень принадлежности которого

Нечеткие множества (2)

Пример. Пусть УМ X представляет собой интервал $[0,100]$, и переменная x , принимающая значения из этого интервала, интерпретируется как возраст

Нечеткое подмножество универсального множества X , обозначаемое термином *старый*, можно определить функцией принадлежности вида

$$\mu_A(x) = 0, \text{ при } 0 \leq x \leq 50$$

$$\mu_A(x) = (1 + ((x - 50)/5) - 2) - 1), \text{ при } 50 < x \leq 100$$

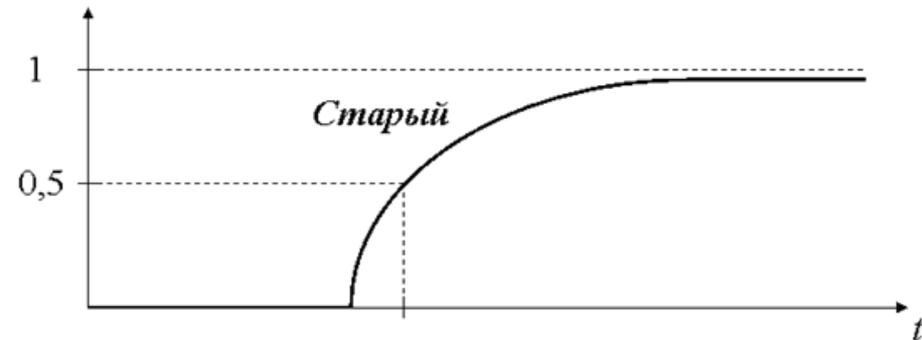
В этом примере носителем НМ "старый" является интервал $[50,100]$, высота близка к 1, а точкой перехода является значение $x=55$

Обычно НМ A универсального множества X записывается в виде

$$A = 1|x_1 + 2|x_2 + \dots + n|x_n$$

где $i, i=1, \dots, n$ - степень

принадлежности элемента x_i НМ A



Нечеткие множества: основные операции (1)

Пусть A и B — нечеткие множества на универсальном множестве U

■ **Дополнение.** A и B дополняют друг друга, если $\forall x \in U \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$ Обозначение: $B = \bar{A}$ или $A = \bar{B}$

■ Очевидно, что $A = \bar{\bar{A}}$ (дополнение определено для $M = [0, 1]$, но очевидно, что его можно определить для любого упорядоченного НМ)

■ **Пересечение.** $A \cap B$ — наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

■ **Объединение.** $A \cup B$ — наименьшее нечеткое подмножество, включающее как A , так и B , с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

■ **Разность.** $A - B = A \cap \bar{B}$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A \cap \bar{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$$

Нечеткие множества: основные операции (2)

■ **Дизъюнктивная сумма** $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$
с функцией принадлежности:

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A \cap \bar{B}}(x) = \max(\min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)); \min(1 - \mu_A(x), \mu_B(x)))$$

■ **Примеры.** Пусть

$$1) A = 0,4/x_1 + 0,2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$$

$$2) B = 0,7/x_1 + 0,9/x_2 + 0,1/x_3 + 1/x_4$$

$$3) C = 0,1/x_1 + 1/x_2 + 0,2/x_3 + 0,9/x_4$$



1) $A \subset B$, т. е.

- A содержится в B или B доминирует A
- C несравнимо ни с A , ни с B
- пары $\{A, C\}$ и $\{B, C\}$ — пары недоминируемых нечетких множеств

2) $A \neq B \neq C$

$$3) \bar{A} = 0,6/x_1 + 0,8/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4; \quad \bar{B} = 0,3/x_1 + 0,1/x_2 + 0,9/x_3 + 0/x_4.$$

$$4) A \cap B = 0,4/x_1 + 0,2/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$$

$$5) A \cup B = 0,7/x_1 + 0,9/x_2 + 0,1/x_3 + 1/x_4$$

$$6) A - B = A \cap \bar{B} = 0,3/x_1 + 0,1/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4; \quad B - A = \bar{A} \cap B = 0,6/x_1 + 0,8/x_2 + 0,1/x_3 + 0/x_4$$

$$7) A \oplus B = 0,6/x_1 + 0,8/x_2 + 0,1/x_3 + 0/x_4$$

Нечеткие множества: нечеткие отношения (1)

- Одним из основных понятий теории нечетких множеств считается понятие нечеткого отношения. Эти отношения позволяют формализовать неточные утверждения типа "почти равно" или "значительно больше чем"
- **Нечеткое отношение** между двумя непустыми множествами (четкими) будем называть нечеткое множество, определенное на декартовом произведении, т.е.

$$R \subseteq X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

- Операции над нечеткими отношениями:
 - произведение двух отношений
 - пересечение двух отношений
 - сумма двух отношений
- http://sernam.ru/book_gen.php?id=20
- <http://neuronus.com/fl/45-theory/311-chast-4-nechetkie-otnosheniya.html>

Нечеткие множества: нечеткие отношения (2)

- Пусть $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ — прямое произведение универсальных множеств и M — некоторое множество принадлежности (например, $M = [0, 1]$)
- Нечеткое n -ое отношение определяется как нечеткое подмножество R на U , принимающее свои значения в M
- В случае $n = 2$ и $M = [0, 1]$ нечетким отношением R между множествами $X = U_1$ и $Y = U_2$ будет называться функция $R: (X, Y) \rightarrow [0, 1]$, которая ставит в соответствие каждой паре элементов $(x, y) \in X \times Y$ величину $\mu_R(x, y) \in [0, 1]$
- Обозначение: нечеткое отношение на $X \times Y$ запишется в виде
$$x \in X, y \in Y: xRy$$
- В случае, когда $X = Y$, т.е. X и Y совпадают, нечеткое отношение $R: X \times X \rightarrow [0, 1]$ называется **нечетким отношением на множестве X**

Нечеткие множества: нечеткие отношения: операции над нечеткими отношениями (1)

■ *Объединение двух отношений R_1 и R_2 .* Объединение двух отношений обозначается $R_1 \cup R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \vee \mu_{R_2}(x, y)$$

■ *Пересечение двух отношений.* Пересечение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cap R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(x, y)$$

■ *Алгебраическое произведение двух отношений.* Алгебраическое произведение двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \cdot R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(x, y)$$

■ *Алгебраическая сумма двух отношений.* Алгебраическая сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \hat{+} R_2$ и определяется выражением

$$\mu_{R_1 \hat{+} R_2}(x, y) = \mu_{R_1}(x, y) + \mu_{R_2}(x, y) - \mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(x, y)$$

Нечеткие продукции: определение

- **Определение.** В общем случае под **правилом нечеткой продукции** или просто — **нечеткой продукцией** понимается выражение следующего вида:

(i): $Q;P; A \Rightarrow B ; S,F,N$, где

- (i) — имя нечеткой продукции
 - Q — сфера применения нечеткой продукции
 - P — условие применимости ядра нечеткой продукции
 - $A \Rightarrow B$ — ядро нечеткой продукции, в котором
 - A — условие ядра (или антецедент)
 - B — заключение ядра (или консеквент)
 - ' \Rightarrow ' — знак логической секвенции (или следования)
 - S — метод или способ определения количественного значения степени истинности заключения ядра
 - F — коэффициент определенности или уверенности нечеткой продукции
 - N — постусловия продукции
- Аналогично классическим правилам продукции ядро $A \Rightarrow B$ также является центральным компонентом нечеткой продукции

Нечеткие продукции: ядро продукции

- Ядро продукции записывается в более привычной форме:
"ЕСЛИ А, ТО В"
- или в наиболее распространенном виде:
"IF A, THEN B", где
- А и В — некоторые выражения нечеткой логики, которые наиболее часто представляются в форме нечетких высказываний
- При этом **секвенция** (\Rightarrow , TO, THEN) интерпретируется в обычном логическом смысле как **знак логического следования** заключения из условия
- В качестве выражений и могут использоваться составные логические нечеткие высказывания, т. е. элементарные нечеткие высказывания (**атомарные формулы**), соединенные нечеткими логическими связками, такими как:
 - нечеткое отрицание
 - нечеткая конъюнкция

Нечеткие продукции: база знаний

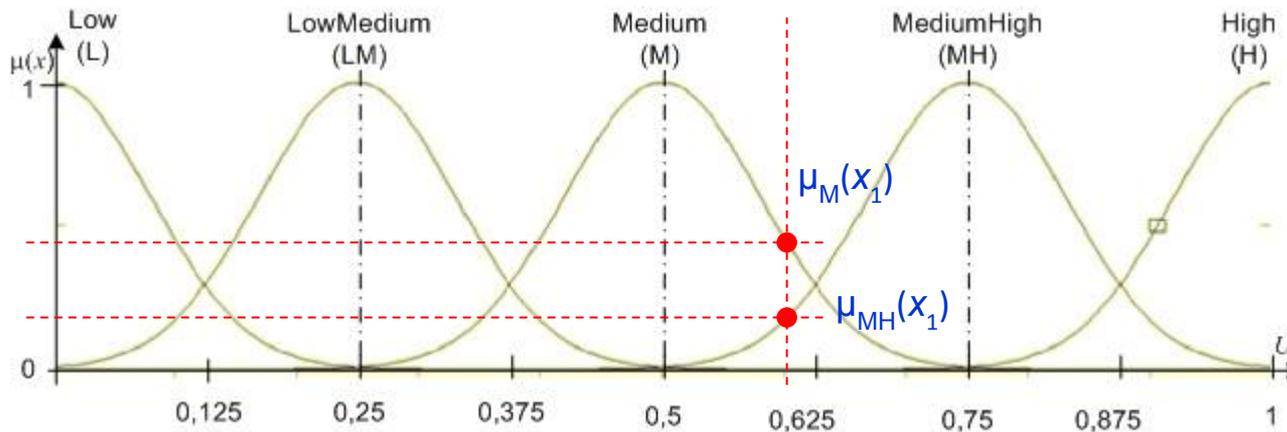
- Продукционная нечеткая система или система нечетких правил продукции представляет собой некоторое согласованное множество отдельных нечетких продукции или правил нечетких продукции в форме "ЕСЛИ , ТО"
или в виде: "IF , THEN " , как определено в Стандарте IEC 1131-7
- Далее обе эти формы записи будут использоваться как эквивалентные в зависимости от удобства в том или ином контексте
- Согласованное множество нечетких продукции также называется нечеткой базой знаний или базой нечетких продукции или базой нечетких правил

Нечеткие продукции: ядро продукции: посылки (1)

- В правиле "ЕСЛИ А, ТО В" после ключевого слова "ЕСЛИ" следует антецедент (посылки) или по-другому **условие правила** – А
- Посылки или условие правила зачастую состоит из подусловий – элементарных высказываний (атомарных формул)
 $A = \{A_i | i=1, \dots, n, n - \text{количество входных переменных}\}$
- Подусловие или атомарная формула имеет вид
 $\langle \text{параметр} \rangle = \langle \text{значение} \rangle$, где
 - Параметр – это входная лингвистическая переменная $x_i \in X$
 - Значение – это терм $t \in T$
 - T – множество значений лингвистической переменной x_i , его также называют базовым терм-множеством
 - Часто вместо знака равенства используют слово "есть", например,
"ЕСЛИ температура x_1 есть t_1 высокая И головная боль x_2 есть t_1 высокая ТО ..."
1-ое подусловие 2-ое подусловие

Нечеткие продукции: ядро продукции: посылки (2)

- Традиционно атомарную формулу (подусловие) можно записать в виде: $P(x_i, t)$
- Его значение есть функция принадлежности $\mu_T(x_i)$ – степень истинности



На рисунке:

1. $U=[0,1]$
2. $T=\{\text{низкий, между низким и средним, средний, между средним и высоким, высокий}\}$
3. Функция принадлежности – Гаусса

- Приведем шкалу измерения температуры $35 \div 40$ к шкале $[0,1]$, используя формулу: $y_i = (x_i - x_{\min}) / (x_{\max} - x_{\min})$, $x_{\max} - x_{\min} = 5$
- Пусть $x_1 = 38^\circ$, тогда нормализованное значение = 0,6, откладываем это значение по оси абсцисс
- Получаем степени истинности атомарной формулы 1-го подусловия "температура есть высокая": $\mu_{MH}(x_1) = 0,22$ и $\mu_M(x_1) = 0,47$

Нечеткие продукции: ядро продукции: заключение правила(2)

- В ядре продукции "ЕСЛИ А, ТО В" заключением правила (консеквентом) является элемент В
- Заключение правила В также как и условие А может состоять из набора подзаключений
- За исключением модели Сугено каждое подзаключение имеет такой же как и подусловие:
$$\langle \text{параметр} \rangle = \langle \text{значение} \rangle$$
- Отличие заключается в том, что параметром является выходная лингвистическая переменная

Заключение

Для формирования базы нечетких продукций необходимо:

- Определить входные и выходные лингвистические переменные
- Определить шкалы их измерений
- Построить терм-множество значений лингвистических переменных
- Сформировать правила

Системы правил нечетких продукций позволяют не только получить более адекватное решение проблемы, но и менее строго относиться к противоречивости и полноте исходных правил

Контрольные вопросы

1. Назовите основные характеристики нечетких множеств
2. Дайте определение нечеткой переменной
3. Дайте определение лингвистической переменной
4. В чем заключается отличие числовой лингвистической переменной от нечисловой
5. Перечислите операции нечеткие числа
6. В чем заключается принцип обобщения Заде?
7. Дайте понятие лингвистической неопределенности