Методы решения тригонометрических уравнений

Уравнения со сложным аргументом

$$\cos 4x = 1$$

$$4x = 2\pi k,\ k \in Z$$

$$x = \frac{2\pi k}{4}\ k \in Z$$

$$x = \frac{\pi k}{2}\ k \in Z$$

$$Ответ: x = \frac{\pi k}{2}\ k \in Z$$

Уравнения со сложным аргументом

$$\sin\frac{x}{2} = -1$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = -\frac{2\pi}{2} + 4\pi k, k \in Z$$

$$x = -\pi + 4\pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = -\pi + 4\pi k, k \in Z$

Уравнения со сложным аргументом

$$cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$

$$x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$

Метод введения новой переменной

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Пусть $\sin x = t$, *где* $t \in [-1; 1]$, *тогда*

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2, \text{– не удовлетворяет условию } t \in [-1; 1] \\ t_2 = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Метод введения новой переменной

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Пусть $\cos x = t$, *где* $t \in [-1; 1]$, *тогда*

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной :

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \pm \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $2\pi k,\ k \in Z;\ \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Метод введения новой переменной

$$tg\frac{x}{2}+3ctg\frac{x}{2}=4$$

Поскольку $ctg\frac{x}{2}=\frac{1}{tg\frac{x}{2}}$, *то*

$$tg\frac{x}{2}+\frac{3}{tg\frac{x}{2}}=4$$

Пусть $tg\frac{x}{2}=t$, *где* $t\neq 0$, *тогда*

$$t+\frac{3}{t}=4 \quad \Big|\times t$$

$$t^2-4t+3=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=3 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=1, \\ tg\frac{x}{2}=3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=arctg1+\pi k,\ k\in Z \\ \frac{x}{2}=arctg3+\pi k,\ k\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=arctg1+\pi k,\ k\in Z \\ \frac{x}{2}=arctg3+\pi k,\ k\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z \\ x=2arctg3+\pi k,\ k\in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z \\ x=2arctg3+2\pi k,\ k\in Z \end{array}\right.$$

$$\text{Ответ}: \frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2arctg3+2\pi k;\ k\in Z.$$

Метод разложения на множители

$$\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)\left(\cos x+\frac{2}{5}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x-\dfrac{1}{3}=0,\\[2ex] \cos x+\dfrac{2}{5}=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{3},\\[2ex] \cos x=-\dfrac{2}{5};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z\\[2ex] x=\pm\arccos\left(-\dfrac{2}{5}\right)+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z\\[2ex] x=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{2}{5}\right)+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

$$\text{Ответ}:\ (-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k;\ \pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{5}\right)+2\pi k;\ k\in Z$$

Метод разложения на множители

$$2\sin x\boxed{\cos 5x}-\boxed{\cos 5x}=0$$

$$\boxed{\cos 5x}(2\sin x-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0,\\ \cos 5x=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \cos 5x=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ 5x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\\ x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi k}{5},\ k\in Z\end{array}\right.$$

$$\text{Ответ}:\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ k\in Z.$$

Однородные тригонометрические уравнения

*Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением первой степени.***

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad \Big| : \cos x$$

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Замечание.

Деление на $\cos x$ допустимо, поскольку решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями уравнения $a \sin x + b \cos x = 0$.

Пример

$$2\sin x - 3\cos x = 0 \quad \Big|: \cos x$$

$$\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$2tgx - 3 = 0$$

$$tgx = \frac{3}{2}$$

$$x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, \ \ k \in Z$$

$$Ответ: \ arctg\frac{3}{2} + \pi k, \ \ k \in Z.$$

Пример

$$\sin 2x + \cos 2x = 0 \quad \Big|: \cos 2x$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{0}{\cos 2x}$$

$$tg2x + 1 = 0$$

$$tg2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ \ k \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \ \ k \in Z$$

$$Ответ: \ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \ \ k \in Z.$$

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ называют **однородным тригонометрическим уравнением второй степени.**

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad \Big| : \cos^2 x$$

$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a \,\mathrm{tg}^2 x + b \,\mathrm{tg}\, x + c = 0$$

Далее, вводим новую переменную $\mathrm{tg}\, x = t$ и решаем методом замены переменной.

<u>Замечание.</u> Если в данном уравнении $a = 0$ или $c = 0$ то, уравнение решается методом разложения на множители.

Пример

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0 \qquad \Big|: \cos^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$tg^2 x - 3tgx + 2 = 0$$

Пусть $tgx = t$, *тогда*

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \\ x = arctg 2 + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

$$Ответ: \frac{\pi}{4} + \pi k,\ arctg 2 + \pi k,\ k \in Z$$

Пример

$$\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$$

$$\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}\sin x+\cos x=0, \qquad \Big|:\cos x\\ \cos x=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}tgx+1=0,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\pi k,\ \ k\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z.\end{array}\right.$$

$$Ответ:\ -\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad \frac{\pi}{2}+\pi k,\, k\in Z$$

Пример

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2 \qquad \Big|\times\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right)$$

$$3\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 5\cos^2 3x = 2\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right)$$

$$\underline{\underline{3\sin^2 3x}} - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x \underline{+5\cos^2 3x} \underline{-2\cos^2 3x} \underline{\underline{-2\sin^2 3x}} = 0$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0 \qquad \Big| : \cos^2 3x$$

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - \frac{2\sqrt{3}\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x} + \frac{3\cos^2 3x}{\cos^2 3x} = 0$$

$$tg^2 3x - 2\sqrt{3}tg 3x + 3 = 0$$

Пусть $tg 3x = t$, *тогда*

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 = 0$$

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$\left(t - \sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$t - \sqrt{3} = 0$$

$$t = \sqrt{3}$$

Вернемся к исходной переменной

$$tg 3x = \sqrt{3}$$

$$3x = arctg\sqrt{3} + \pi k, k \in Z$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$

Пример

$$\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x - 3\cos^3 x = 0 \qquad \Big| : \cos^3 x$$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos^3 x} - \frac{3\sin x \cos^2 x}{\cos^3 x} - \frac{3\cos^3 x}{\cos^3 x} = 0$$

$$tg^3 x + tg^2 x - 3tgx - 3 = 0$$

$$tg^2 x(tgx + 1) - 3(tgx + 1) = 0$$

$$(tg^2 x - 3)(tgx + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg^2 x - 3 = 0, \\ tgx + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg^2 x = 3, \\ tgx = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = \pm\sqrt{3}, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \ \ k \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm arctg\sqrt{3} + \pi k, \ \ k \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \ \ k \in Z; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k, \ \ k \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \ \ k \in Z. \end{array}\right.$$

$$Ответ: \ -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ \pm\frac{\pi}{3} + \pi, \ \ k \in Z$$

С помощью формул тригонометрии

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x=\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$$

$$\cos x=1$$

$$x=2\pi k,\;\; k\in Z$$

$$\textit{Ответ}:\;2\pi k,\;\; k\in Z$$

С помощью формул тригонометрии

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1 \qquad \Big| : 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$$

Заметим, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}, \ \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6},$ *тогда*

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, \ \ k \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z \qquad x_2 = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in Z \qquad x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \ k \in Z$$

С помощью формул тригонометрии

$$\sin 4x - \cos 2x = 0$$

$$2\sin 2x \boxed{\cos 2x} - \boxed{\cos 2x} = 0$$

$$\boxed{\cos 2x}(2\sin 2x - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ 2\sin 2x - 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \\ 2x = (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z \\ x = (-1)^k \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z \end{array}\right.$$

$$Ответ: \ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$$