

# Методы решения тригонометрических уравнений

101001010100111101000010010111010010 11010101010111010000410001010010100  
0041000010100101001001010000101101001010140000111101001010100111101000010010111010010  
110101010101110100004100001010010100100101000010110100101014000011110100101

# Уравнения со сложным аргументом

$$\cos 4x = 1$$

$$4x = 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{2\pi k}{4} k \in Z$$

$$x = \frac{\pi k}{2} k \in Z$$

$$\text{Ответ : } x = \frac{\pi k}{2} k \in Z$$

# Уравнения со сложным аргументом

$$\sin \frac{x}{2} = -1$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{2\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = -\pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$

# Уравнения со сложным аргументом

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

# Метод введения новой переменной

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Пусть  $\sin x = t$ , где  $t \in [-1; 1]$  тогда

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} t_1 = 2, \text{ не удовлетворяет условию } t \in [-1; 1] \\ t_2 = \frac{1}{2}; \end{array} \right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$\text{Ответ: } (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

# Метод введения новой переменной

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Пусть  $\cos x = t$ , где  $t \in [-1; 1]$  тогда

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной :

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, k \in Z \\ x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, k \in Z \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

Ответ :  $2\pi k, k \in Z; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

# Метод введения новой переменной

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 4$$

Поскольку  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ , то

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{3}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = 4$$

Пусть  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , где  $t \neq 0$ , тогда

$$t + \frac{3}{t} = 4 \quad | \times t$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2 \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$ .

# Метод разложения на множители

$$\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{3} = 0, \\ \cos x + \frac{2}{5} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{3}, \\ \cos x = -\frac{2}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{2}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k; \pm \left(\pi - \arccos \frac{2}{5}\right) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

# Метод разложения на множители

$$2 \sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$$

$$\cos 5x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} 2 \sin x - 1 = 0, \\ \cos 5x = 0; \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos 5x = 0; \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z.$$

# Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида  $a \sin x + b \cos x = 0$  называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени.

$$a \sin x + b \cos x = 0 \quad | : \cos x$$
$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$
$$a \operatorname{tg} x + b = 0$$
$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Замечание.

Деление на  $\cos x$  допустимо, поскольку решения уравнения  $\cos x = 0$  не являются решениями уравнения  $a \sin x + b \cos x = 0$ .

## Пример

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0 \quad | : \cos x$$

$$\frac{2 \sin x}{\cos x} - \frac{3 \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

## Пример

$$\sin 2x + \cos 2x = 0 \quad | : \cos 2x$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{0}{\cos 2x}$$

$$\operatorname{tg} 2x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z.$$

# Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида  $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$  называют *однородным тригонометрическим уравнением второй степени*.

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$
$$\frac{a \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{c \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$
$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

Далее, вводим новую переменную  $\operatorname{tg} x = t$  и решаем методом замены переменной.

Замечание. Если в данном уравнении  $a = 0$  или  $c = 0$  то, уравнение решается методом разложения на множители.

# Пример

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

Пусть  $\operatorname{tg} x = t$ , тогда

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

# Пример

$$\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

$$\cos x (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0, & | : \cos x \\ \cos x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

# Пример

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x = 2 \quad | \times (\cos^2 3x + \sin^2 3x)$$

$$3 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 5 \cos^2 3x = 2(\cos^2 3x + \sin^2 3x)$$

$$\underline{3 \sin^2 3x} - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + \underline{5 \cos^2 3x} - \underline{2 \cos^2 3x} - \underline{2 \sin^2 3x} = 0$$

$$\sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x + 3 \cos^2 3x = 0 \quad | : \cos^2 3x$$

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - \frac{2\sqrt{3} \sin 3x \cos 3x}{\cos^2 3x} + \frac{3 \cos^2 3x}{\cos^2 3x} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 3x + 3 = 0$$

Пусть  $\operatorname{tg} 3x = t$ , тогда

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 = 0$$

$$t^2 - 2\sqrt{3}t + (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(t - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$t - \sqrt{3} = 0$$

$$t = \sqrt{3}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$$

$$3x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, k \in Z$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$$

# Пример

$$\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x - 3 \cos^3 x = 0 \quad | : \cos^3 x$$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos^3 x} - \frac{3 \sin x \cos^2 x}{\cos^3 x} - \frac{3 \cos^3 x}{\cos^3 x} = 0$$

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x + 1) - 3(\operatorname{tg} x + 1) = 0$$

$$(\operatorname{tg}^2 x - 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0, \\ \operatorname{tg} x + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 3, \\ \operatorname{tg} x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} + \pi k, \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

# С помощью формул тригонометрии

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

*Ответ:  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$*

# С помощью формул тригонометрии

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \quad | : 2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{Заметим, что } \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}, \text{ тогда}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{6} + x \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

# С помощью формул тригонометрии

$$\sin 4x - \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 2 \sin 2x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ 2x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$