Применение векторного и смешанного произведений в решении задач С2

Выполнил: Гайдай Дмитрий
ученик 11 «Б» класса
МБОУ лицея №1
Научный руководитель:
Бугаева Вера Михайловна

Комсомольск-на-Амуре
2018

Актуальность

– Решение задач ЕГЭ, а так же других геометрических задач, в том числе олимпиадных
– Более широкое применение координатно-векторного метода
– Уменьшается количество формул, которые необходимо выучить при подготовке к ЕГЭ

Цели

– Изучить векторное и смешанное произведение векторов, их нахождение, геометрический смысл.

– Показать применение данных методов для решения задач различного уровня в том числе задач С2 (14) ЕГЭ

Задачи

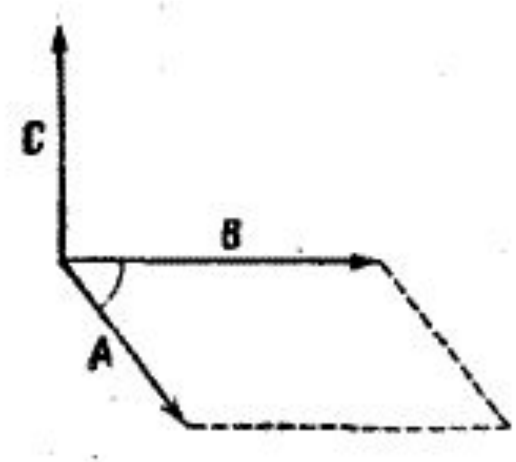
– Углубить свои знания по теме «координатно-векторный метод решения геометрических задач»

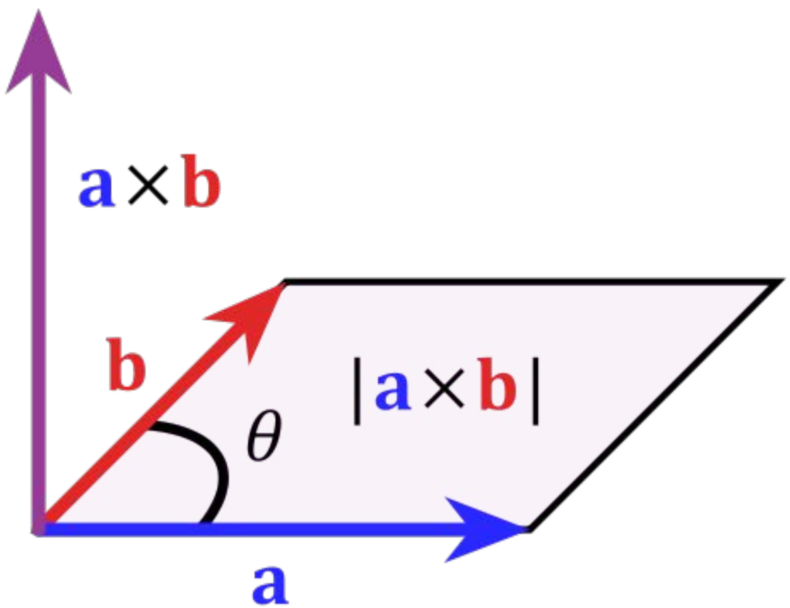
Векторное произведение

Векторным произведением ненулевых и неколлениарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что:

– Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен обоим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

– $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a};\ \vec{b})$





Свойства

– При смене векторов местами меняется знак произведения:

$$\vec{a} * \vec{b} = -\vec{b} * \vec{a}$$

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{c}$$

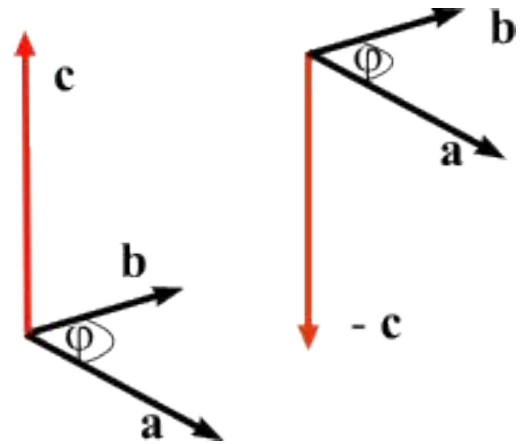
$$\vec{b} * \vec{a} = -\vec{c}$$

– Кроме того:

– $(k\overline{a})\times\overline{b} = k(\overline{a}\times\overline{b}) = \overline{a}\times(k\overline{b})$

– $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c} = \overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$

– $\overline{a}\times\overline{a} = \overline{0}$

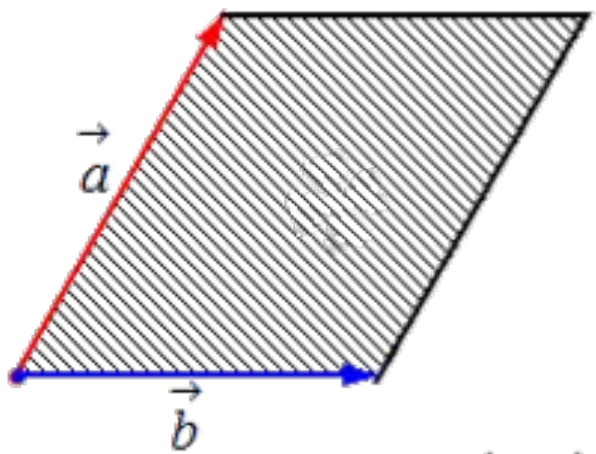


Нахождение векторного произведения

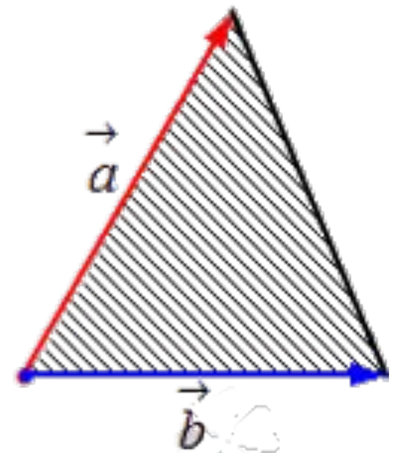
- – Пусть даны векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, тогда их векторное произведение может быть найдено по формуле
  – $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$
  – Где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - координатные векторы (орты)
  – Коэффициенты при векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - координаты вектора $\vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} * \vec{b}$

Геометрический смысл

– Длина векторного произведения – это площадь параллелограмма или удвоенная площадь треугольника.



$$S = \left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

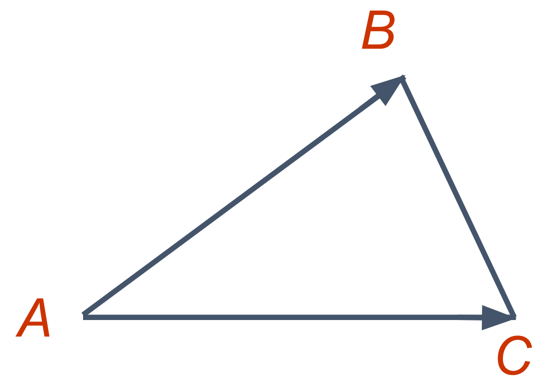


$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right|$$

– $\vec{n} = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}$, $\vec{n}$ - вектор нормали к плоскости ABC.

Пример использования

- Найти площадь треугольника с вершинами A $(-2; 0; 2)$, B $(1; 1; 1)$, C $(2; -1; 3)$
- $\overrightarrow{AB}\{3; 1; -1\}; \overrightarrow{BC}\{1; -2; 2\};$



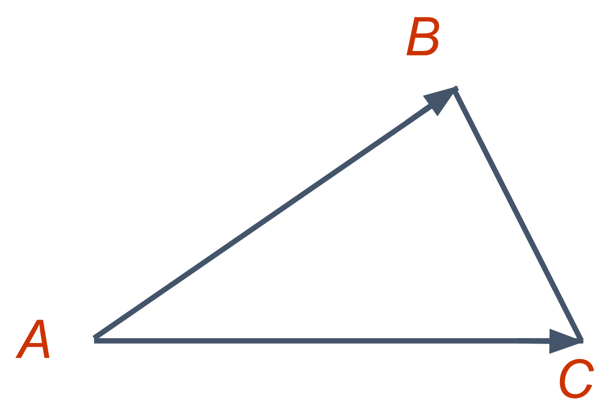
- AB=$\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

  BC=$\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$

- cos(ABC) = $\frac{3-2-2}{3\sqrt{11}} = \frac{-1}{3\sqrt{11}}$; sin(ABC)=$\sqrt{1 - \frac{(-1)^2}{9*11}} = \sqrt{\frac{98}{99}} = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}$
- $S_{ABC} = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{11}} * \sqrt{11} * 3 * \frac{1}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Пример использования

- Найти площадь треугольника с вершинами А $(-2; 0; 2)$, В $(1; 1; 1)$, С $(2; -1; 3)$
- $\overrightarrow{AB}\{3; 1; -1\}; \overrightarrow{BC}\{1; -2; 2\};$
- $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$
- $2\vec{i}$ - $2\vec{i}$ - $\vec{j}$ - $6\vec{j}$ - $6\vec{k}$ - $\vec{k}$ = $0\vec{i}$ -$7\vec{j}$ - $7\vec{k}$;
- $\vec{p}\{0; -7; -7\};$
- $S_{ABC} = \frac{\sqrt{0^2+(-7)^2+(-7)^2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$



Пример использования

- Найдите уравнение плоскости A $(-4; 0; 2)$, B $(1; 1; 1)$, C $(2; 5; 3)$
- $\overrightarrow{AB}\{5; 1; -1\}$; $\overrightarrow{AC}\{6; 5; 1\}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{j} + 25\vec{k} - 6\vec{k} = 6\vec{i} - 11\vec{j} + 19\vec{k}$$

- $\vec{n}\{6; -11; 19\}$
- 6x-11y+19z + D = 0
- D = -(6*1 – 11*1 + 19*1) = - 14
- 6x -11y+19z - 14 = 0

Смешанное произведение

– Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}(\overline{b} \times \overline{c})$$

– Если заданы координаты векторов, то их смешанное произведение равно определителю третьего порядка, каждая строка которого состоит из координат соответствующего вектора, т.е.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства

1) $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b} = -\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c} = -\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b} = -\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}$

2) $\overline{a}(\overline{b}\times\overline{c}) = (\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}$

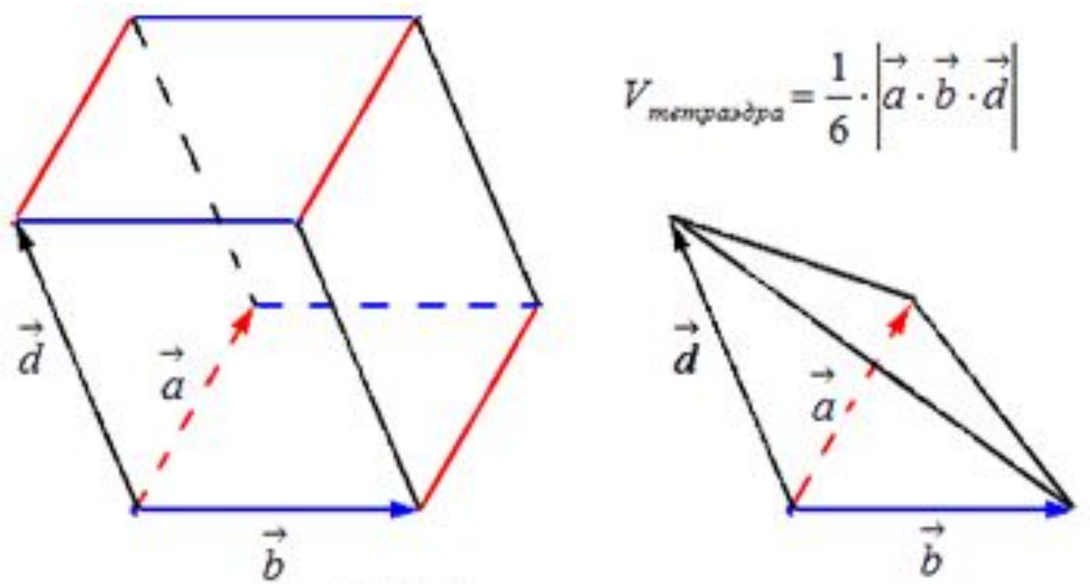
3) три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю

Геометрический смысл

- Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах равен модулю их смешанного произведения

- Объем тетраэдра, построенного на трех некомпланарных векторах равен $^1/_6$ модуля их смешанного произведения

$$V_{тетраэдра} = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} \right|$$



$$V_{параллелепипеда} = \left| \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} \right|$$

Пример использования

- Найти объём тетраэдра $SABC$, если его вершины имеют координаты A $(2; 1; 1)$, B $(3; 0; 2)$, C $(1; 2; 4)$, $S(-1; -1; -1)$
- Найдем координаты векторов $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ и $\overrightarrow{AS}$:
  $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\{1; -1; 1\}$; $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\{-1; 1; 3\}$; $\overrightarrow{AS}\{-3; -2; -2\}$
- Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$
- $V_{ABCS} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-2+3+2+3+2+6}{6} = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$
- $V_{ABCS} = 2\frac{1}{3}$

Решение задачи С2

- В основании четырехугольной пирамиды SABC лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB=4 и BC=3. Длины боковых ребер пирамиды SA = $\sqrt{11}$, SB = $3\sqrt{3}$, SD = $2\sqrt{5}$.
  а) Докажите, что SA – высота пирамиды.
  б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB
- Заметим, что $SA^2 + AD^2 = SD^2$, и $SA^2 + AB^2 = SB^2$, из чего следует что SA перпендикулярно плоскости ABC.
- Введем систему координат с началом отсчета в точке A:
  A(0;0;0); S(0;0;$\sqrt{11}$); B(0;4;0); C(3;4;0); D(3;0;0)
  $\overrightarrow{AS}\{0;\,0;\,\sqrt{11}\}$; $\overrightarrow{AB}\{0;\,4;\,0\}$
- Найдем координаты вектора $\vec{n}$ нормали к плоскости ASB

- $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \sqrt{11} \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ = - $4\sqrt{11}\vec{i}$ - $0\vec{j}$ $-$ $0\vec{k}$;
- $\vec{n}\left\{-4\sqrt{11}; 0; 0\right\}$ <=> $\vec{n}\{1; 0; 0\}$
- $\overrightarrow{SC}\left\{3; 4; -\sqrt{11}\right\}$;
- $\sin(SC\ \widehat{(ABC)}) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{SC}; \vec{n}}\right) = \left|\frac{3}{\sqrt{9+6+11}*\sqrt{1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1}{2}$
- $SC\ \widehat{(ABC)}$ = arcsin$\frac{1}{2}$ = 30°
- Ответ: 30°

Список литературы

- _http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_4_12.php
- http://mathprofi.ru/vektornoe_proizvedenie_vektorov_smeshannoe_proizvedenie.html
- https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5
- https://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/multiply1/