
Применение векторного и смешанного произведений в решении задач С2

Выполнил: Гайдай Дмитрий
ученик 11 «Б» класса
МБОУ лицея №1
Научный руководитель:
Бугаева Вера Михайловна

Актуальность

- Решение задач ЕГЭ, а так же других геометрических задач, в том числе олимпиадных
- Более широкое применение координатно-векторного метода
- Уменьшается количество формул, которые необходимо выучить при подготовке к ЕГЭ

Цели

- Изучить векторное и смешанное произведение векторов, их нахождение, геометрический смысл.
- Показать применение данных методов для решения задач различного уровня в том числе задач C2 (14) ЕГЭ

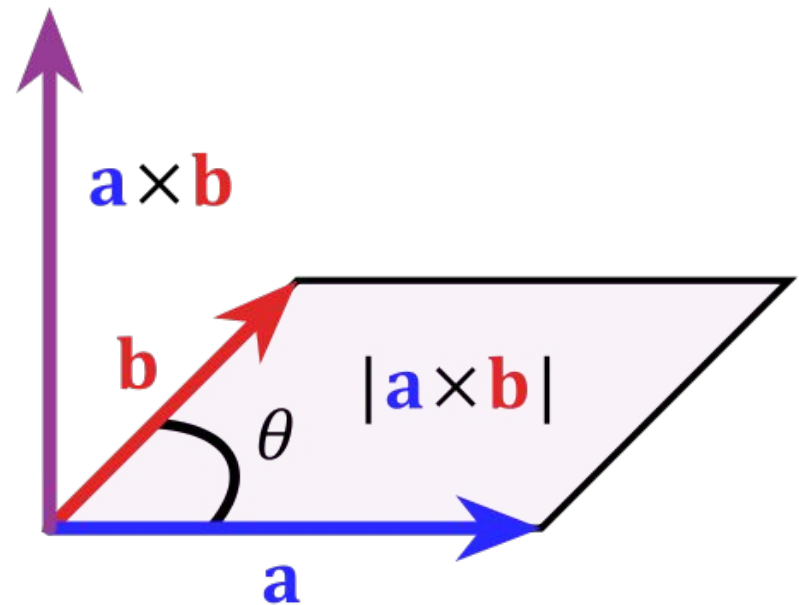
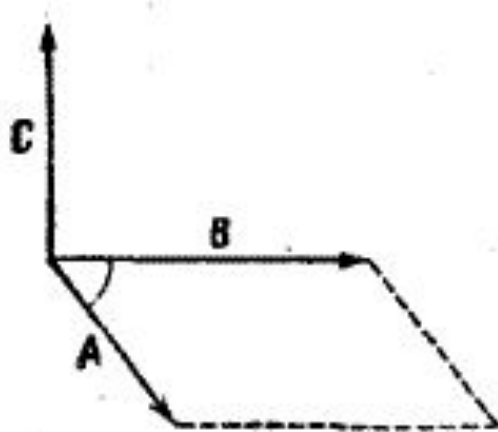
Задачи

- Углубить свои знания по теме «координатно-векторный метод решения геометрических задач»

Векторное произведение

Векторным произведением ненулевых и неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор \vec{c} , что:

- Вектор \vec{c} перпендикулярен обоим векторам \vec{a} и \vec{b} ;
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}; \vec{b})$



Свойства

- При смене векторов местами меняется знак произведения:

$$\vec{a} * \vec{b} = -\vec{b} * \vec{a}$$

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{c}$$

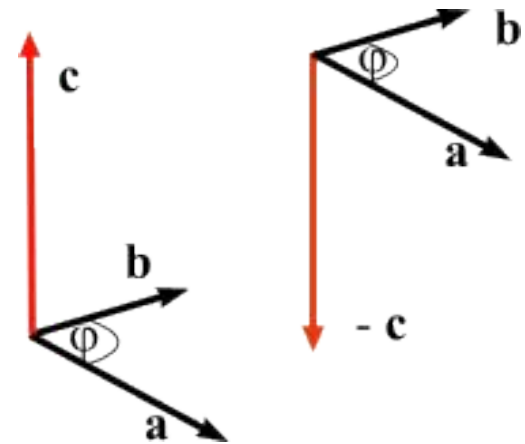
$$\vec{b} * \vec{a} = -\vec{c}$$

- Кроме того:

- $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$

- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$



Нахождение векторного

произведения

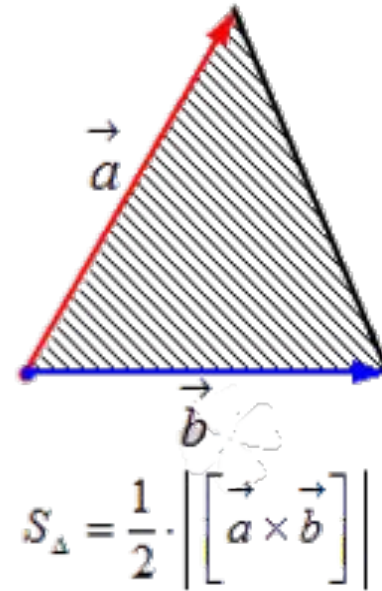
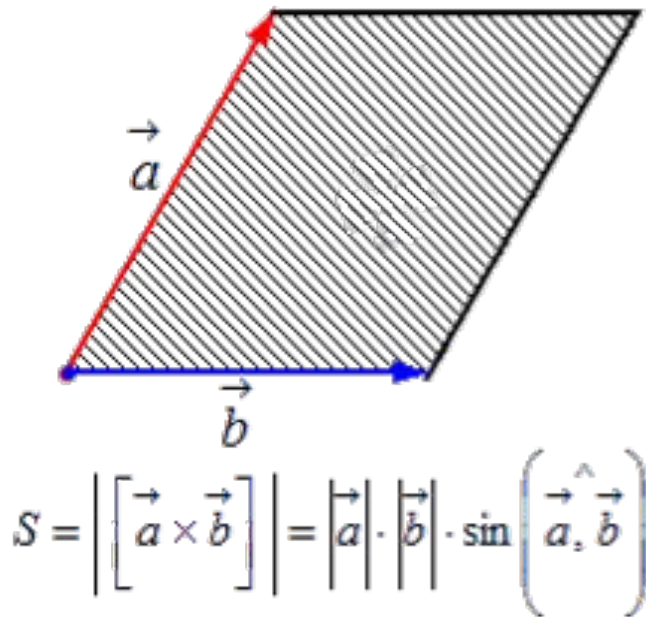
- Пусть даны векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, тогда их векторное произведение может быть найдено по формуле

$$- \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

- Где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - координатные векторы (орты)
- Коэффициенты при векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - координаты вектора \vec{c} , $\vec{c} = \vec{a} * \vec{b}$

Геометрический смысл

- Длина векторного произведения – это площадь параллелограмма или удвоенная площадь треугольника.



- $\vec{n} = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}$, \vec{n} - вектор нормали к плоскости ABC.

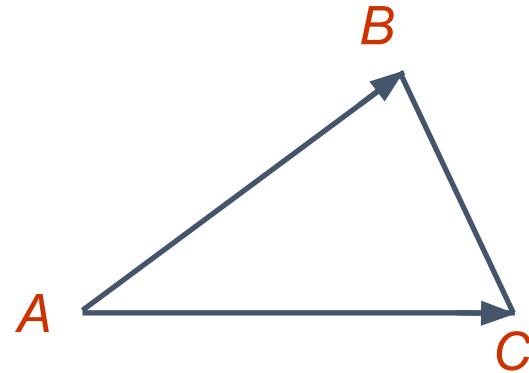
Пример использования

– Найти площадь треугольника с вершинами $A(-2; 0; 2)$, $B(1; 1; 1)$, $C(2; -1; 3)$

– $\vec{AB}\{3; 1; -1\}$; $\vec{BC}\{1; -2; 2\}$;

– $AB = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

$BC = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$



– $\cos(\angle ABC) = \frac{3-2-2}{3\sqrt{11}} = \frac{-1}{3\sqrt{11}}$; $\sin(\angle ABC) = \sqrt{1 - \frac{(-1)^2}{9 \cdot 11}} = \sqrt{\frac{98}{99}} = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}$

– $S_{ABC} = \frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{11}} * \sqrt{11} * 3 * \frac{1}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Пример использования

- Найти площадь треугольника с вершинами $A(-2; 0; 2)$,
 $B(1; 1; 1)$, $C(2; -1; 3)$

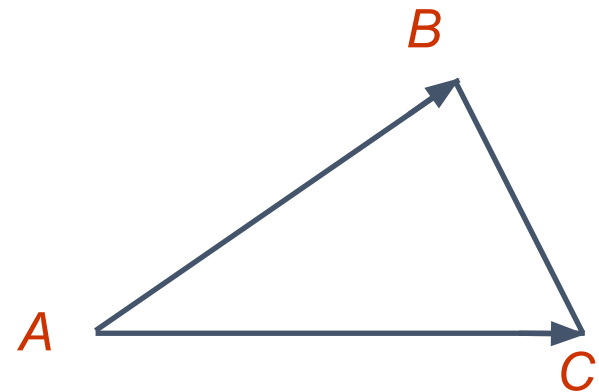
- $\overrightarrow{AB}\{3; 1; -1\}$; $\overrightarrow{BC}\{1; -2; 2\}$;

- $$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

- $2\vec{i} - 2\vec{i} - \vec{j} - 6\vec{j} - 6\vec{k} - \vec{k} = 0\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}$;

- $\vec{p}\{0; -7; -7\}$;

- $S_{ABC} = \frac{\sqrt{0^2 + (-7)^2 + (-7)^2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$



Пример использования

– Найдите уравнение плоскости A (−4; 0; 2), B (1; 1; 1), C (2; 5; 3)

– $\overrightarrow{AB}\{5; 1; -1\}$; $\overrightarrow{AC}\{6; 5; 1\}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{j} + 25\vec{k} - 6\vec{k} = 6\vec{i} - 11\vec{j} + 19\vec{k}$$

– $\vec{n}\{6; -11; 19\}$

– $6x - 11y + 19z + D = 0$

– $D = -(6*1 - 11*1 + 19*1) = -14$

– $6x - 11y + 19z - 14 = 0$

Смешанное произведение

- Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора \vec{a} на векторное произведение векторов \vec{b} и \vec{c} :

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$$

- Если заданы координаты векторов, то их смешанное произведение равно определителю третьего порядка, каждая строка которого состоит из координат соответствующего вектора, т.е.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства

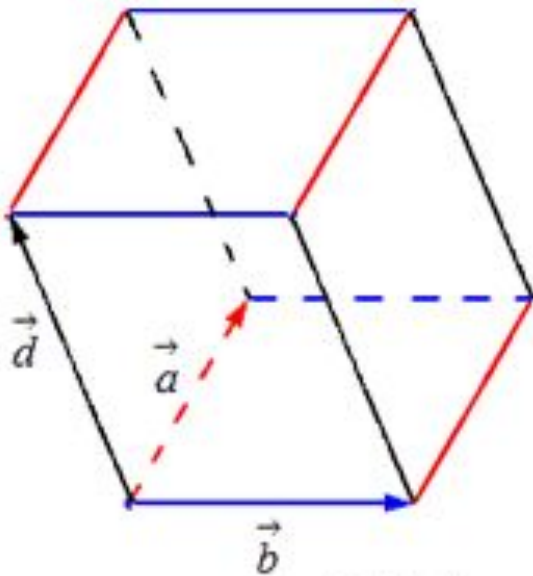
$$1) \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$$

$$2) \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$$

3) три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю

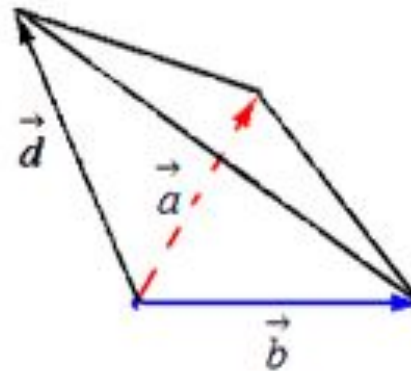
Геометрический смысл

- Объем параллелепипеда, построенного на трех некопланарных векторах равен модулю их смешанного произведения
- Объем тетраэдра, построенного на трех некопланарных векторах равен $1/6$ модуля их смешанного произведения



$$V_{\text{параллелепипеда}} = \left| \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} \right|$$

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d} \right|$$



Пример использования

- Найти объём тетраэдра $SABC$, если его вершины имеют координаты $A(2; 1; 1)$, $B(3; 0; 2)$, $C(1; 2; 4)$, $S(-1; -1; -1)$
- Найдем координаты векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AS} :
 $\overrightarrow{AB}\{1; -1; 1\}$; $\overrightarrow{AC}\{-1; 1; 3\}$; $\overrightarrow{AS}\{-3; -2; -2\}$
- Вычислим смешанное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AS}

$$- V_{ABCS} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-2+3+2+3+2+6}{6} = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$$

$$- V_{ABCS} = 2\frac{1}{3}$$

Решение задачи С2

- В основании четырехугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=3$. Длины боковых ребер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.
 - Докажите, что SA – высота пирамиды.
 - Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB
- Заметим, что $SA^2 + AD^2 = SD^2$, и $SA^2 + AB^2 = SB^2$, из чего следует что SA перпендикулярно плоскости ABC .
- Введем систему координат с началом отсчета в точке A :
 $A(0;0;0)$; $S(0;0;\sqrt{11})$; $B(0;4;0)$; $C(3;4;0)$; $D(3;0;0)$
 $\vec{AS}\{0; 0; \sqrt{11}\}$; $\vec{AB}\{0; 4; 0\}$
- Найдем координаты вектора \vec{n} нормали к плоскости ASB

$$- \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \sqrt{11} \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\sqrt{11}\vec{i} - 0\vec{j} - 0\vec{k};$$

$$- \vec{n}\{-4\sqrt{11}; 0; 0\} \Leftrightarrow \vec{n}\{1; 0; 0\}$$

$$- \overrightarrow{SC}\{3; 4; -\sqrt{11}\};$$

$$- \sin(SC \widehat{ABC}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{SC}; \vec{n}}) = \left| \frac{3}{\sqrt{9+6+11*\sqrt{1}}} \right| = \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1}{2}$$

$$- SC \widehat{ABC} = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ$$

- Ответ: 30°

Список литературы

- http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_4_12.php
- http://mathprofi.ru/vektornoe_proizvedenie_vektorov_smeshannoe_proizvedenie.html
- https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5
- <https://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/multiply1/>