



ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет»  
Институт математики и информационных технологий



# «Задача о движении внешней нагрузки по битому льду в канале»

*Завьялова К.Н., студентка II курса  
магистратуры Института математики и  
информационных технологий АлтГУ*

Научные руководители:

*Ст. преп, Шишмарев К.А.,*

*д. ф.-м. н., профессор Папин А.А.*

10 апреля 2020

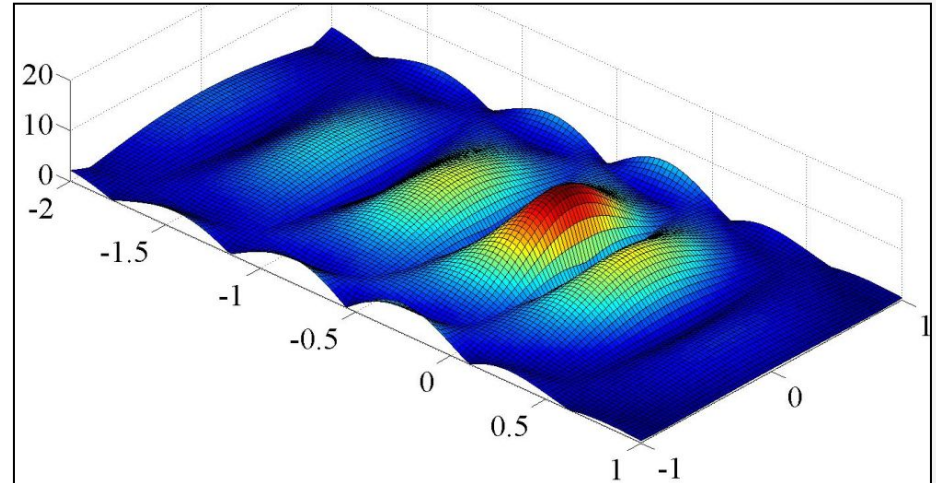
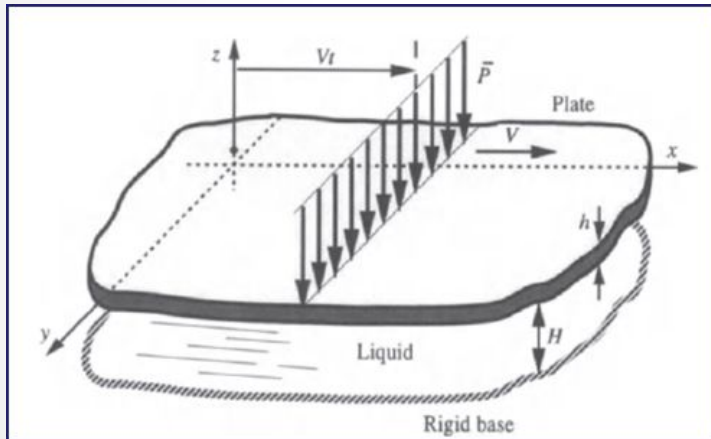
Международная научная студенческая конференция, Новосибирск

# План

1. Мотивация.
2. Постановка задачи.
3. Единственность классического решения.
4. Поведение прогибов битого льда при больших временах.
5. Заключение.

# Мотивация

- Безопасное движение вдоль канала с битым льдом. Могут ли создаваться волны большой амплитуды возле стенок канала?
- Волновое сопротивление. Будут ли трудности в управлении СВП?
- Разрушение льда. Движение в канале, частично покрытом льдом. Движение в полынье. Можно ли создать такие волны, которые, дойдя до ледового покрова, разрушат его.



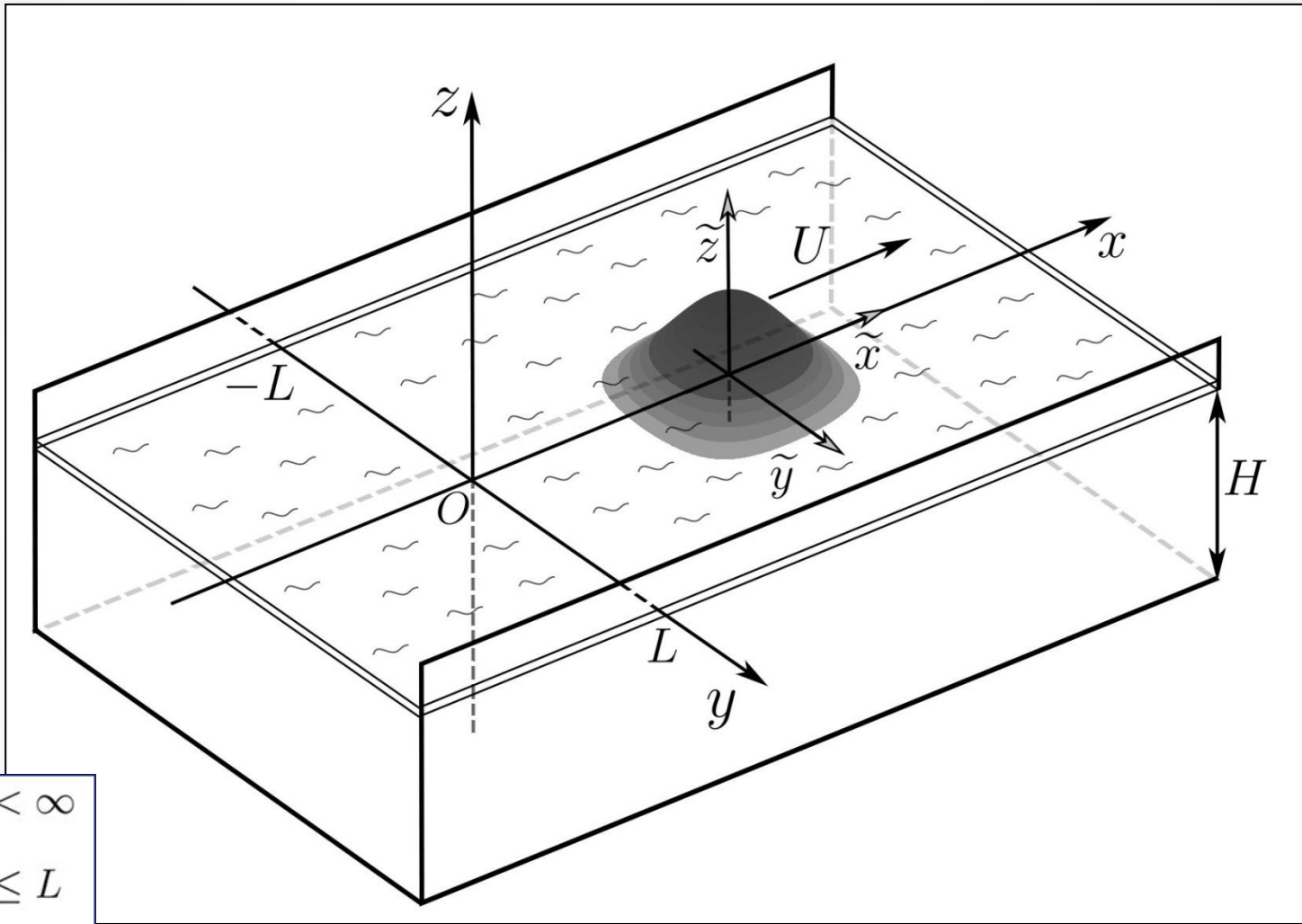
*V. Squire. Moving Loads on Ice Plates. 1996. 236 p.*

*И.В. Стурова, Л.А. Ткачева. Колебания ограниченного ледяного покрова при локальном динамическом воздействии. Полярная механика. 2016. № 3. С. 997-1007.*

*K. A. Shishmarev, A. A. Papin. Uniqueness of a solution of an ice plate oscillation problem in a channel // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2018, 11(4), P. 449-458.*

*Khabakhpasheva T. Shishmarev K., Korobkin A. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. 2019. 86. P. 154-165.*

# Схема задачи



$$-\infty < x < \infty$$

$$-L \leq y \leq L$$

$$-H \leq z \leq 0$$

# Постановка задачи

Неограниченные области  $\Pi \subset R^2$  и  $\Omega \subset R^3$

$$\Pi = \{-\infty < x < \infty, -L < y < L\}$$

$$\Omega = \{-\infty < x < \infty, -L < y < L, -H < z < 0\}$$

Обозначим  $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$ ,  $\Pi_T = \Pi \times [0, T]$ , где  $t \in [0, T]$  – время.

I. Часть задачи, связанная с определением колебаний битого льда

$$Mw_{tt} = -P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \quad (x, y, t) \in \Pi_T$$

$$w(x, y, 0) = w^1(x, y), \quad w_t(x, y, 0) = w^2(x, y) \quad (x, y) \in \Pi$$

$$w = 0, \quad w_x = 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l g w(x, y, t) - \rho_l \varphi_t(x, y, 0, t)$$

$$M = \rho_i h_i$$

II. Гидродинамическая часть задачи

$$\Delta \varphi(x, y, z, t) = 0 \quad (x, y, z, t) \in \Omega_T$$

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H)$$

$$\varphi_z(x, y, 0, t) = w_t(x, y, t)$$

$$\varphi(x, y, z, t), \quad \varphi_x(x, y, z, t) \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow \infty)$$

# Постановка задачи

I. Часть задачи, связанная с определением колебаний битого льда

$$M w_{tt} = -P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \quad (x, y, t) \in \Pi_T$$

$$w(x, y, 0) = w^1(x, y), \quad w_t(x, y, 0) = w^2(x, y) \quad (x, y) \in \Pi$$

$$w = 0, \quad w_x = 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_l g w(x, y, t) - \rho_l \varphi_t(x, y, 0, t)$$

$$M = \rho_i h_i$$

$$P(x, y, t) = P_0 P_1 \left( \frac{x - Ut}{L} \right) P_2 \left( \frac{y}{L} \right)$$

$$P_1(\tilde{x}) = \frac{\cos(\pi c_1 \tilde{x}) + 1}{2} \quad (c_1 |\tilde{x}| < 1),$$

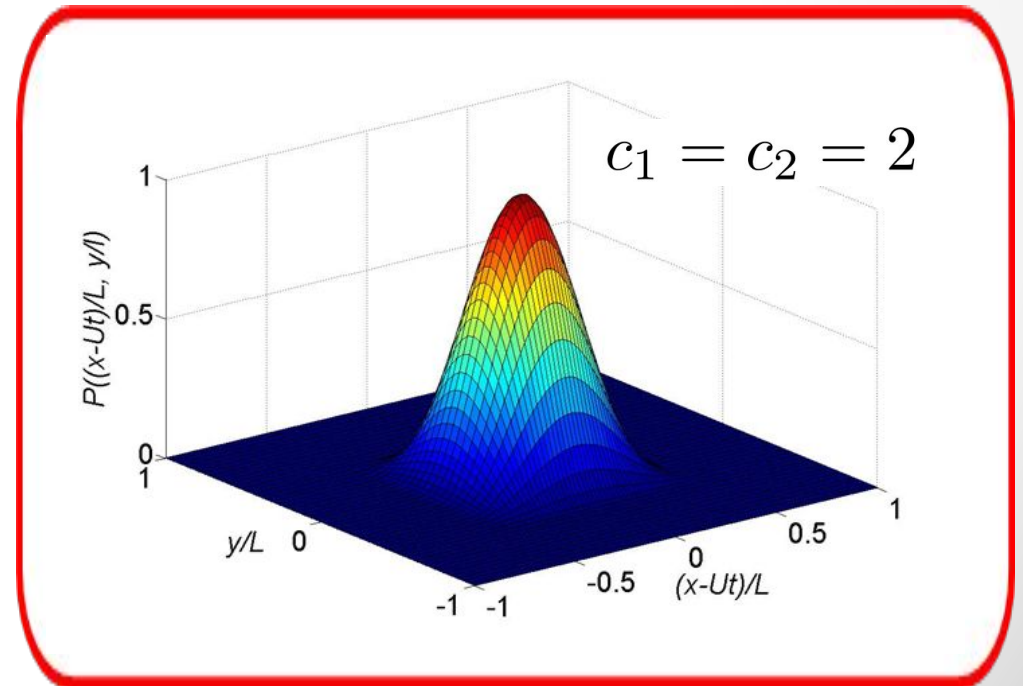
$$P_1(\tilde{x}) = 0 \quad (c_1 |\tilde{x}| \geq 1),$$

$$\tilde{x} = \frac{(x - Ut)}{L}$$

$$P_2(\tilde{y}) = \frac{\cos(\pi c_2 \tilde{y}) + 1}{2} \quad (c_2 |\tilde{y}| < 1),$$

$$P_2(\tilde{y}) = 0 \quad (c_2 |\tilde{y}| \geq 1), \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}$$

$c_1, c_2$  — параметры, характеризующие область давления



# Единственность классического решения

**Теорема.** Классическое решение рассматриваемой задачи единственно.

Пара функций  $w = w_1 - w_2$ ,  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$   
удовлетворяет следующей начально-краевой задаче



$$Mw_{tt} = -\rho_l g w - \rho_l \varphi_t(x, y, 0, t) \quad (x, y, t) \in \Pi_T,$$

$$\Delta \varphi(x, y, z, t) = 0 \quad (x, y, z, t) \in \Omega_T,$$

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \quad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \quad \varphi_z = 0 \quad (z = -H),$$

$$\varphi(x, y, z, t), \quad \varphi_x(x, y, z, t), \quad w(x, y, t), \quad w_x(x, y, t) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$w(x, y, 0) = 0, \quad w_t(x, y, 0) = 0$$

# Единственность классического решения

Умножаем уравнение колебания битого льда на  $w_t$ , интегрируем по  $\Pi$

$$\int_{\Pi} \frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} g \rho_l w^2 \right) d\Pi = -\rho_l \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \varphi_t d\Pi$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Pi} \left( \frac{M}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} g \rho_l w^2 \right) d\Pi + \rho_l \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 d\Omega \right] = 0$$

$$\int_{\Pi} \left( \frac{M}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} g \rho_l w^2 \right) d\Pi + \rho_l \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 d\Omega = 0$$

$$\frac{M}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} g \rho_l w^2 = 0 \Rightarrow \frac{M}{2} w_t^2 = 0, \quad \frac{1}{2} g \rho_l w^2 = 0$$

$$\nabla \varphi = 0, \quad \varphi = 0$$

$$w = w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$



# Метод решения. Преобразование Фурье вдоль канала

Преобразование Фурье для прогибов битого льда вдоль оси  $x$  имеет вид

$$w^F(\xi, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, t) e^{-i\xi x} dx \quad w(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^F(\xi, y, t) e^{i\xi x} dx$$

Уравнение прогибов битого льда для образа Фурье  $w^F$

$$M w_{tt}^F = -\rho_l \varphi_t^F - \rho_l g w^F - P^F(\xi, y) e^{-i\xi U t}$$

$$w^F(x, y, 0) = w_0^F(\xi, y), \quad w_t^F(\xi, y, 0) = 0$$

$$\varphi_{yy}^F + \varphi_{zz}^F = \xi^2 \varphi^F \quad (-L < y < L, -H < z < 0)$$

$$\varphi_z^F = w^F \quad (z = 0), \quad \varphi_y^F = 0 \quad (y \pm L),$$

$$\varphi_z^F = 0 \quad (z = -H),$$
$$\varphi^F = 0, \quad \varphi_t^F = 0 \quad (t = 0).$$

# Метод решения. Метод разделения переменных

$$\psi_n(\xi, y) = \cos\left(\frac{\pi n y}{L}\right)$$

Прогиб битого льда

$$w^F(\xi, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi, t) \psi_n(y)$$

Потенциал скорости

$$\varphi^F(\xi, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n,t}(\xi, t) \psi_n(y) \cosh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} (H + z))}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} \sinh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} H)}$$

Уравнение колебания битого льда

$$M \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,tt} \cos\left(\frac{\pi n y}{L}\right) = -\rho \ell \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n,tt}(\xi, t) \psi_n(y) \cosh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} (H + z))}{\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} \sinh(\sqrt{\pi^2 n^2 + \xi^2} H)} - \rho \ell g \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi, t) \cos\left(\frac{\pi n y}{L}\right) - P^F(\xi, y) e^{-i\xi U t}$$

# Поиск коэффициентов разложения $w^F$ на колебания поперек канала

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \omega_n^2(\xi) a_n = H_n(\xi) e^{-i\xi Ut}$$

$$H_n(\xi) = \frac{P_n(\xi) \sqrt{(\frac{\pi n}{L})^2 + \xi^2}}{2L(M \sqrt{(\frac{\pi n}{L})^2 + \xi^2} + \rho_l \coth(\sqrt{(\frac{\pi n}{L})^2 + \xi^2} H))}$$

Начальные условия

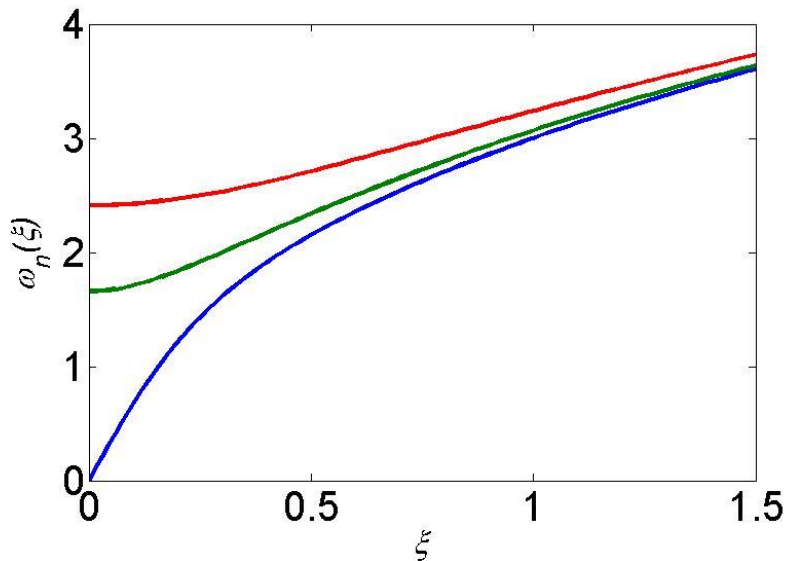
$$a_n(\xi, 0) = \frac{H_n(\xi)}{\omega_n^2(\xi)}, \quad \frac{da_n}{dt}(\xi, 0) = 0$$

$$a_n(\xi, t) = \frac{H_n U \xi}{2\omega_n^2} \left( \frac{e^{i\omega_n t}}{\omega_n + \xi U} - \frac{e^{-i\omega_n t}}{\omega_n - \xi U} \right) + \frac{H_n e^{-i\xi Ut}}{\omega_n^2 - \xi^2 U^2}$$

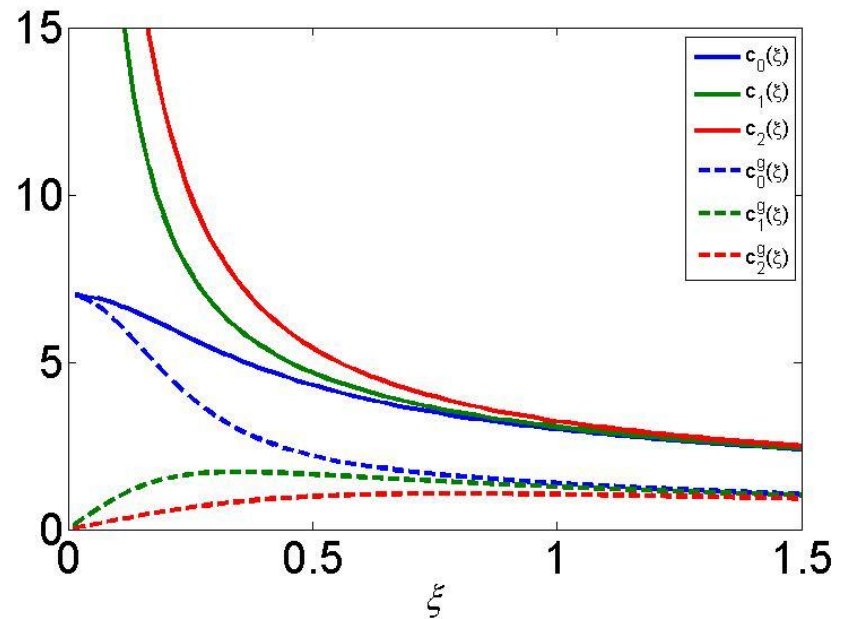
$$\omega_n(\xi) = \sqrt{\frac{\rho_l g \sqrt{\mu_n + \xi^2}}{M \sqrt{\mu_n + \xi^2} + \rho_l \coth(\sqrt{\mu_n + \xi^2} H)}}$$

# Дисперсионные соотношения периодических волн, распространяющихся вдоль канала

$$\omega_n(\xi) = \sqrt{\frac{\rho_l g \sqrt{\mu_n + \xi^2}}{M \sqrt{\mu_n + \xi^2} + \rho_l \coth(\sqrt{\mu_n + \xi^2} H)}}$$



$$\omega_0(\xi) < \omega_1(\xi) < \omega_2(\xi) < \dots$$



Сплошные линии – график фазовых скоростей, прерывистые линии – график групповых скоростей

$$c_n(\xi) = \frac{\omega_n}{\xi}$$

$$c_n^g(\xi) = \frac{d\omega_n}{d\xi}$$

$$\begin{aligned} M &= \rho_i h_i \\ \rho_l &= 1024 \text{ кг/м}^3 \\ \rho_i &= 917 \text{ кг/м}^3 \\ L &= 10 \text{ м} \\ H &= 5 \text{ м} \\ h_i &= 0.1 \text{ м} \\ U &= 5 \text{ м/с} \end{aligned}$$

# Обратное преобразование Фурье. Поведение прогибов битого льда при больших временах

Прогиб битого льда  $w(X, y, t)$  в движущейся системе координат

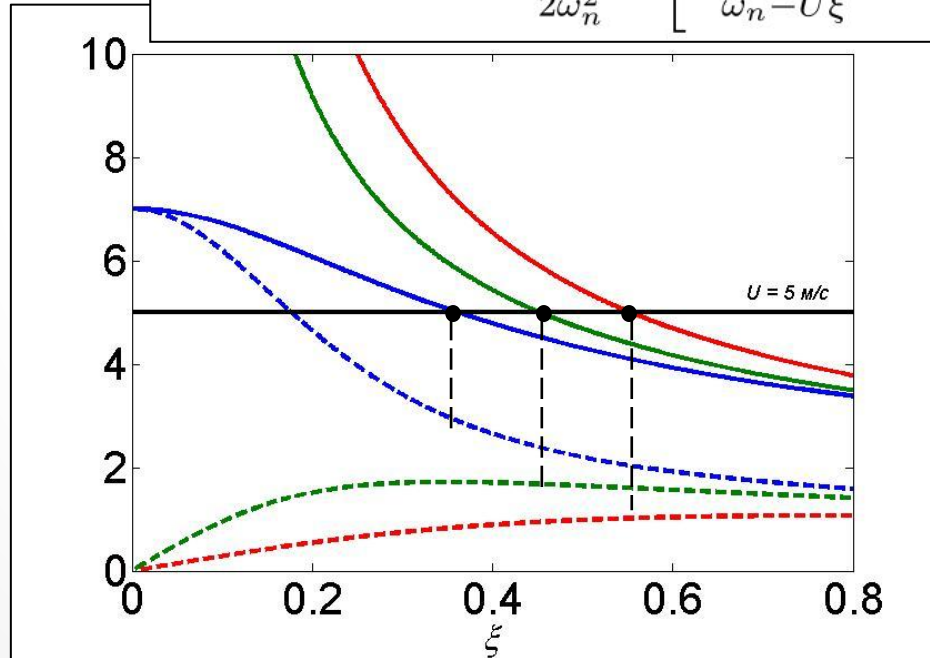
$$w(X, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\xi, t) \psi_n(y) e^{i\xi X} d\xi$$

$$X = x - Ut$$

$$w_n(X, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(\xi, t) \psi_n(y) e^{i\xi X} d\xi =$$

$$= \int_0^{\infty} H_n(\xi) \psi_n(y) \left( \frac{2 \cos(\xi X)}{\omega_n^2 - U^2 \xi^2} + \frac{e^{i\xi X} U \xi}{2\omega_n^2} \left[ \frac{e^{it(\omega_n + U\xi)}}{\omega_n + U\xi} - \frac{e^{-it(\omega_n - U\xi)}}{\omega_n - U\xi} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{-i\xi X} U \xi}{2\omega_n^2} \left[ \frac{e^{it(\omega_n - U\xi)}}{\omega_n - U\xi} - \frac{e^{-it(\omega_n + U\xi)}}{\omega_n + U\xi} \right] \right) d\xi$$



Фазовые скорости для первых трех периодических волн в канале

# Профили волн вдоль и поперек канала

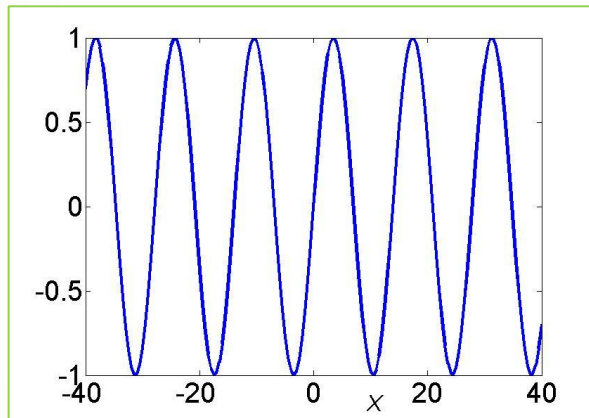
$$w_n(X, y, t)|_{t \rightarrow \infty} = w_n^{loc}(X, y) - A_n \psi_n(y) \sin(\xi_n X) G_n(X)$$

$$A_n = \frac{2\pi H_n(\xi_n)}{(\omega'_n(\xi_n) - U)\xi_n U}$$

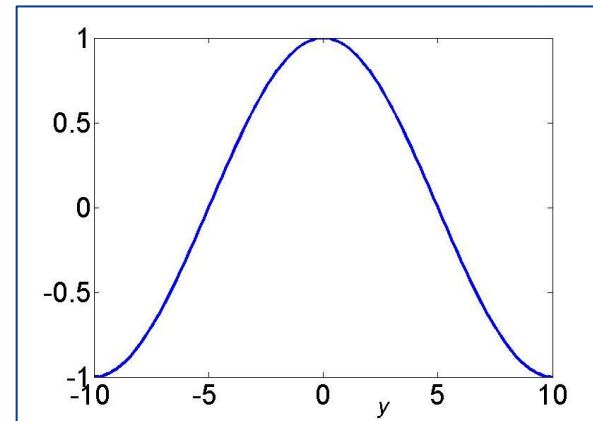
$$G_n(X) = -\text{sign}(C_g^n - U) - \frac{2}{\pi} \text{sign}(X) \int_0^{|X|b_n} \frac{\sin(z)}{z} dz$$

$$\xi_1 = 0.4519$$

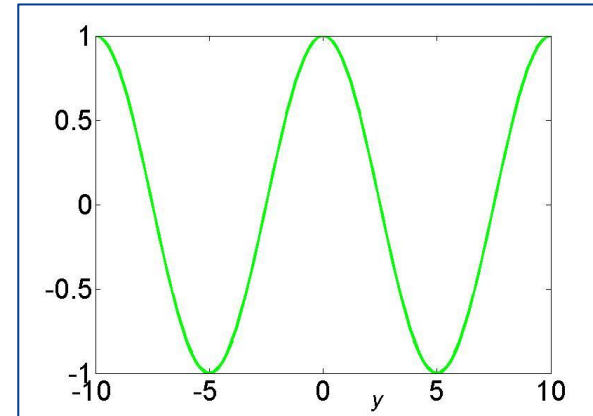
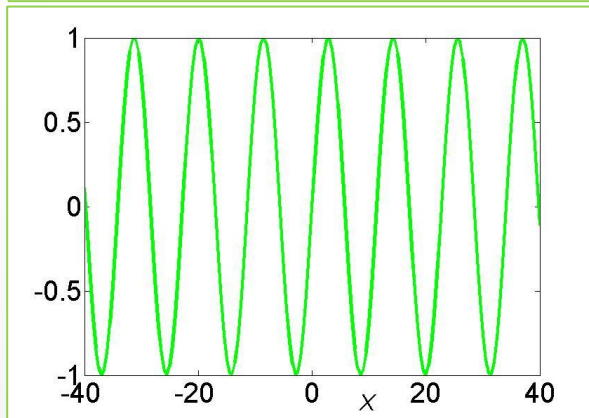
Профили волн вдоль канала



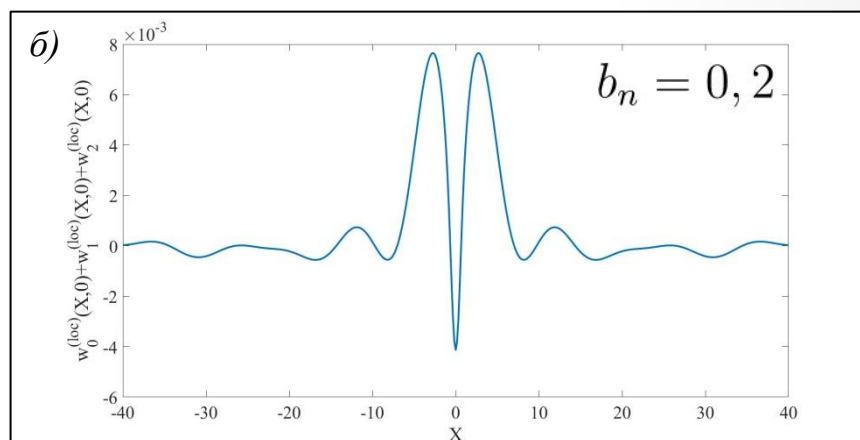
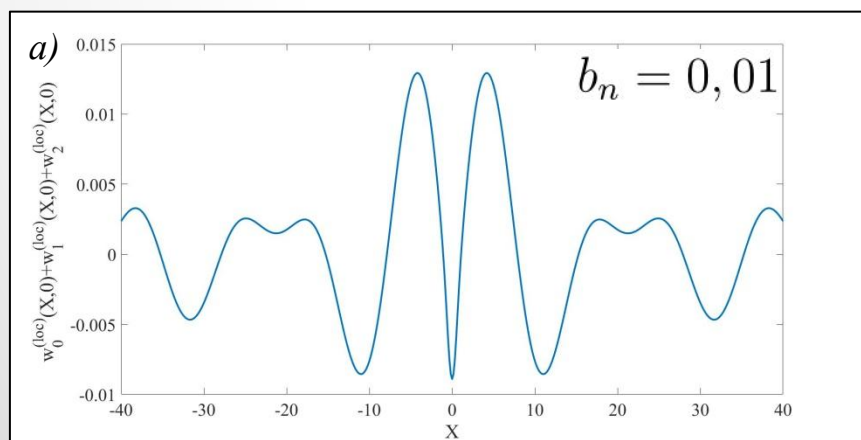
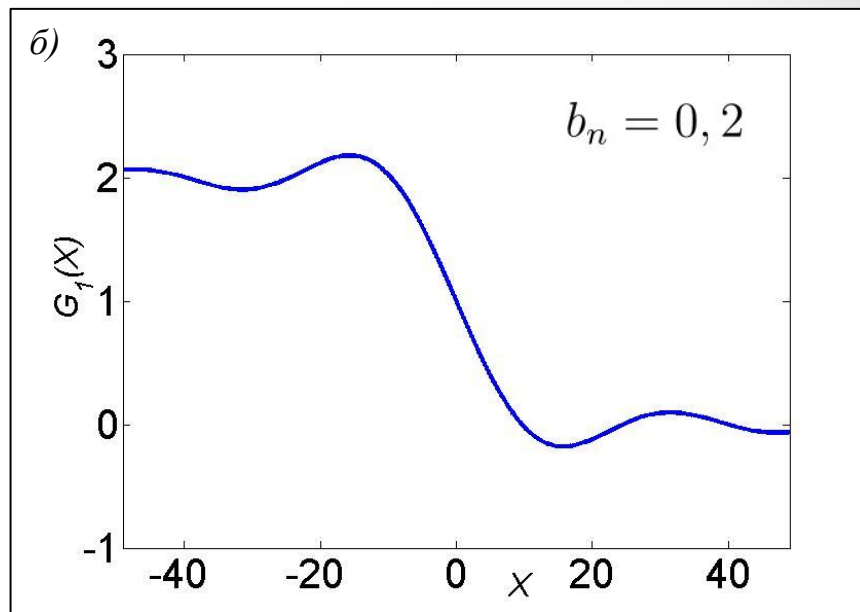
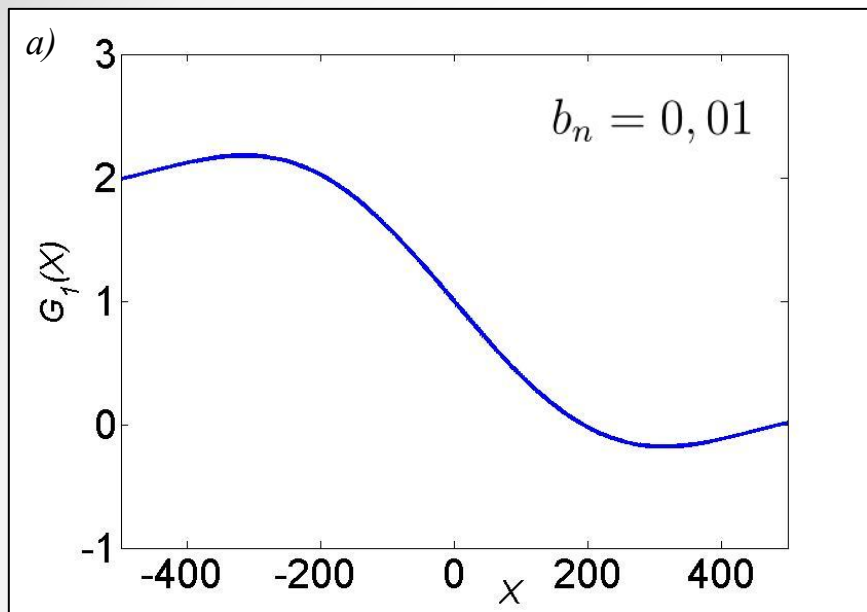
Профили волн поперек канала



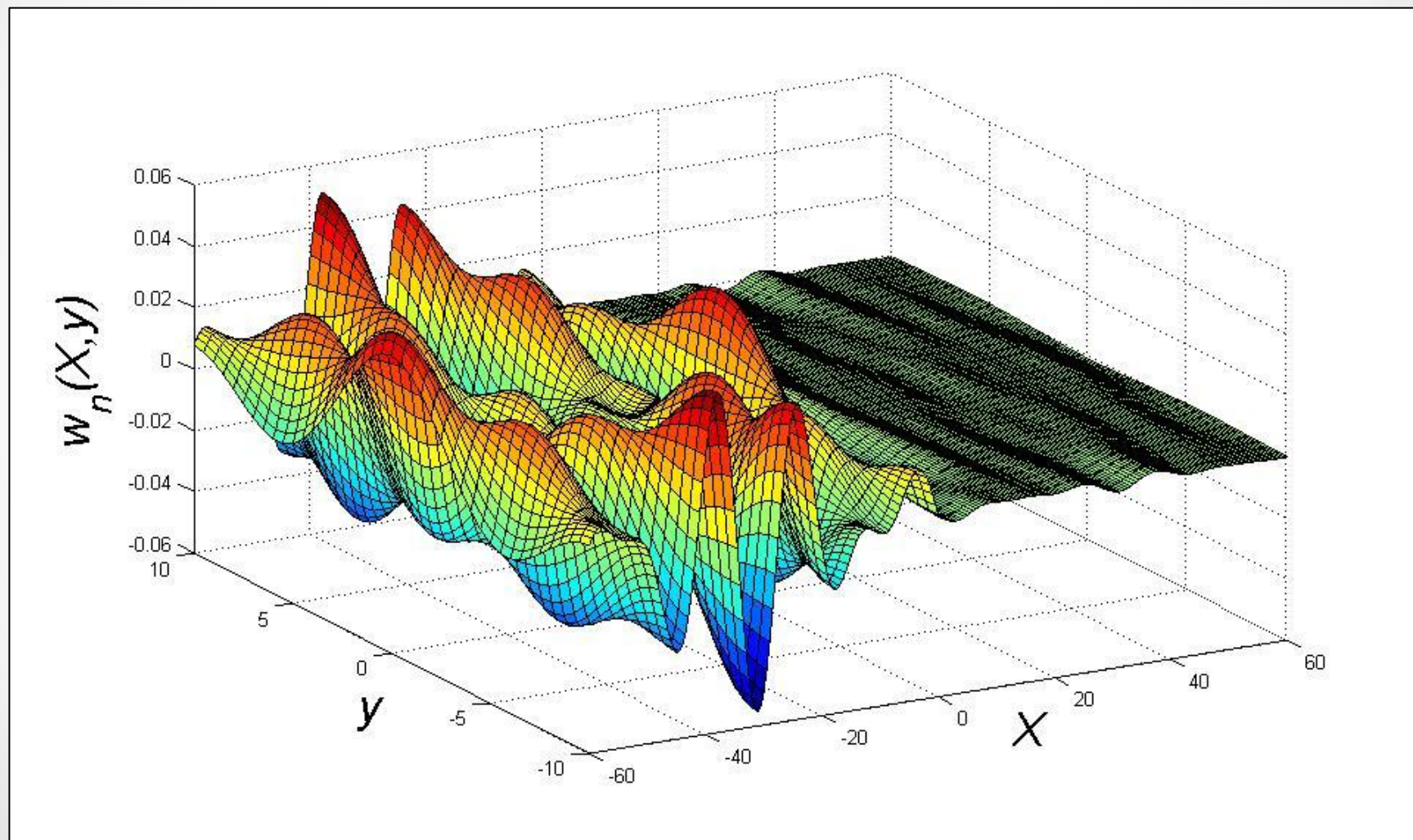
$$\xi_2 = 0.5525$$



# Вычисление функции срезки и локальных прогибов



# Прогибы битого льда для суммы первых трех интегралов





# Заключение

Рассмотрена нестационарная задача для определения прогибов битого льда в канале под действием внешней нагрузки, движущейся с постоянной скоростью вдоль центральной линии канала. Доказана теорема единственности классического решения рассматриваемой задачи. Исследовано поведение колебаний битого льда в канале под действием внешней нагрузки при больших временах. Решение получено в виде формулы, дающей простую интерпретацию для анализа формы колебаний битого льда. Получено, что при больших временах колебания битого льда состоят из волн, распространяющихся сзади нагрузки, таких волн в канале будет счетное число, и из локальных прогибов в области нагрузки, которые затухают при отдалении от нагрузки.

Автор принимал активное участие в получении результатов: постановке задачи, численном и аналитическом исследовании, анализе и обсуждении полученных результатов, а также в оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов.

# Основные публикации

1. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А. Об одной задаче движения внешней нагрузки по вязкому битому льду в канале. Известия АлтГУ, Барнаул, 2019, 4(108), с. 76-81.  
[https://doi.org/10.14258/izvasu\(2019\)4-11](https://doi.org/10.14258/izvasu(2019)4-11).
2. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А. Модели колебаний тонкого битого льда в канале. Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. Барнаул, 2019, (5), с. 60-66. <http://journal.asu.ru/psgmm/article/view/7240>.
3. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А. Математическая модель нестационарных колебаний битого льда в канале. Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2019. Издательство АГУ, Барнаул, 2019, с. 45-49.
4. Завьялова К.Н., Шишмарев К. А., Хабахпашева Т. И. Колебания битого льда в канале. Сборник научных статей международной конференции “Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники” – 2018, Барнаул, 13-16 ноября, 2018. с. 474-482.  
<https://www.sites.google.com/site/lomchten/>.
5. Завьялова К.Н., Шишмарев К. А. Единственность решения задачи о колебаниях битого льда в канале. Сборник научных статей международной конференции “Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники” – 2018, Барнаул, 13-16 ноября, 2018. с. 469-473.  
<https://www.sites.google.com/site/lomchten/>.
6. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А., Хабахпашева Т. И. Движение внешней нагрузки по битому льду в канале. Известия АлтГУ, Барнаул, 2018, 4 (102), с.73-78.  
<http://izvestiya.asu.ru/index.php/iz/article/view/%282018%294-13>.  
DOI: 10.14258/izvasu(2018)4-13.
7. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А. Исследование формирования вынужденных гравитационных волн в канале, покрытом битым льдом. Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2018. Издательство АГУ, Барнаул, 2018, с. 65-68.
8. Шишмарев К. А., Завьялова К. Н. Свободные и вынужденные волны в канале, покрытом битым льдом. Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2017. Издательство АГУ, Барнаул, 2017, с. 96-99

## Контакты

Завьялова К.Н. [kristina-zavyalova-1996@mail.ru](mailto:kristina-zavyalova-1996@mail.ru)

Благодарю за внимание!