

# «Задача о движении внешней нагрузки по битому льду в канале»

Завьялова К.Н., *студентка II курса* магистратуры Института математики и информационных технологий АлтГУ Научные руководители: *Ст. преп*, Шишмарев К.А., д. ф.-м. н., профессор Папин А.А.

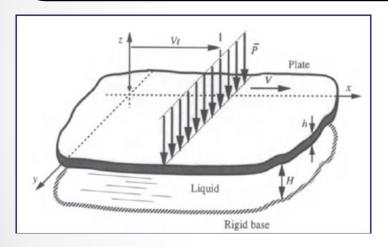
10 апреля 2020 Международная научная студенческая конференция, Новосибирск

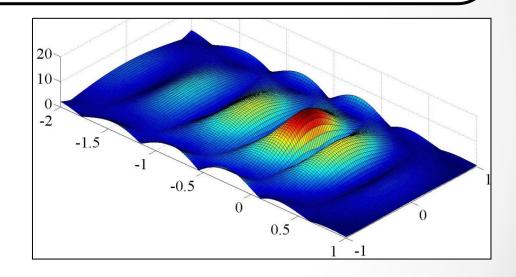
# План

- 1. Мотивация.
- 2. Постановка задачи.
- 3. Единственность классического решения.
- 4. Поведение прогибов битого льда при больших временах.
- 5. Заключение.

# Мотивация

- Безопасное движение вдоль канала с битым льдом. Могут ли создаваться волны большой амплитуды возле стенок канала?
- Волновое сопротивление. Будут ли трудности в управлении СВП?
- Разрушение льда. Движение в канале, частично покрытом льдом. Движение в полынье. Можно ли создать такие волны, которые, дойдя до ледового покрова, разрушат его.





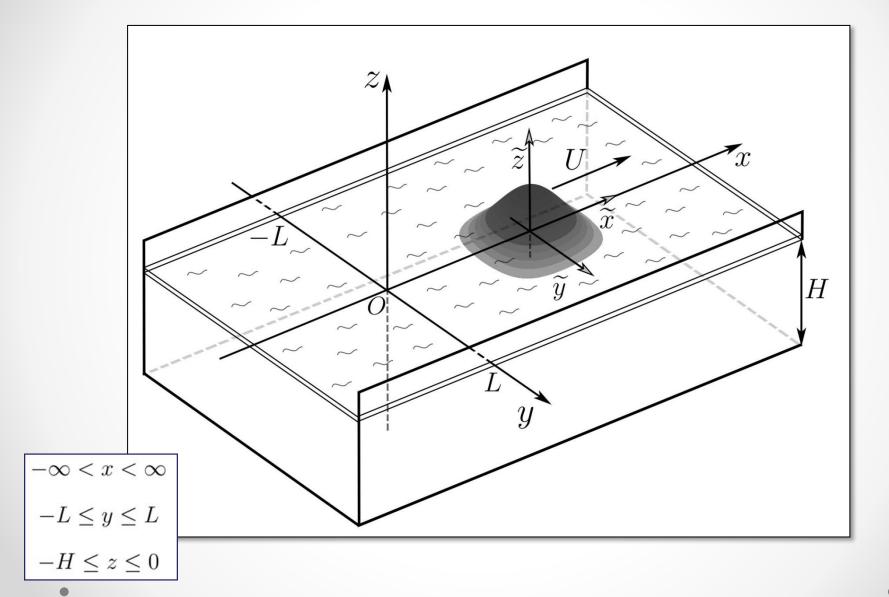
V. Squire. Moving Loads on Ice Plates. 1996. 236 p.

*И.В. Стурова, Л.А. Ткачева. Колебания ограниченного ледяного покрова при локальном динамическом воздействии. Полярная механика. 2016. № 3. С. 997-1007.* 

K. A. Shishmarev, A. A. Papin. Uniqueness of a solution of an ice plate oscillation problem in a channel // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2018, 11(4), P. 449-458.

Khabakhpasheva T. Shishmarev K., Korobkin A. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Applied Ocean Research. 2019. 86. P. 154–165.

# Схема задачи



# Постановка задачи

Неограниченные области  $\Pi \subset R^2$  и  $\Omega \subset R^3$ 

$$\begin{split} \Pi &= \{-\infty < x < \infty, -L < y < L\} \\ \Omega &= \{-\infty < x < \infty, -L < y < L, -H < z < 0\} \end{split}$$

Обозначим  $\Omega_T = \Omega \times [0,T], \ \Pi_T = \Pi \times [0,T], \ \text{где } t \in [0,T]$  – время.

І. Часть задачи, связанная с определением колебаний битого льда

$$Mw_{tt} = -P(x, y, t) + p(x, y, 0, t)$$
  $(x, y, t) \in \Pi_T$ 

$$w(x, y, 0) = w^{1}(x, y), \quad w_{t}(x, y, 0) = w^{2}(x, y) \qquad (x, y) \in \Pi$$

$$w = 0, \quad w_x = 0 \qquad (x \to \infty)$$

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_{\ell}gw(x, y, t) - \rho_{\ell}\varphi_{t}(x, y, 0, t)$$

$$M = \rho_i h_i$$

II. Гидродинамическая часть задачи

$$\Delta \varphi(x, y, z, t) = 0$$
  $(x, y, z, t) \in \Omega_T$ 

$$\varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \qquad \varphi_z = 0 \quad (z = -H)$$

$$\varphi_z(x, y, 0, t) = w_t(x, y, t)$$

$$\varphi(x, y, z, t), \quad \varphi_x(x, y, z, t) \to 0, \qquad (x \to \infty)$$

#### Постановка залачи

І. Часть задачи, связанная с определением колебаний битого льда

$$Mw_{tt} = -P(x, y, t) + p(x, y, 0, t) \qquad (x, y, t) \in \Pi_T$$

$$w(x, y, 0) = w^1(x, y), \quad w_t(x, y, 0) = w^2(x, y) \qquad (x, y) \in \Pi$$

$$w = 0, \quad w_x = 0 \qquad (x \to \infty)$$

$$p(x, y, 0, t) = -\rho_{\ell}gw(x, y, t) - \rho_{\ell}\varphi_{t}(x, y, 0, t)$$

$$M = \rho_i h_i$$

$$P(x, y, t) = P_0 P_1 \left(\frac{x - Ut}{L}\right) P_2 \left(\frac{y}{L}\right)$$

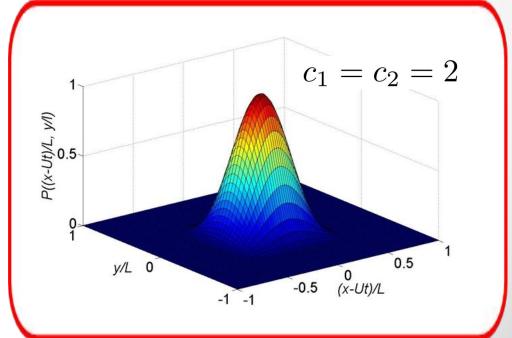
$$P_1(\tilde{x}) = \frac{(\cos(\pi c_1 \tilde{x}) + 1)}{2} \quad (c_1 |\tilde{x}| < 1),$$

$$P_1(\tilde{x}) = 0 \quad (c_1 |\tilde{x}| \ge 1),$$

$$\tilde{x} = \frac{(x - Ut)}{L}$$

$$P_2(\tilde{y}) = \frac{(\cos(\pi c_2 \tilde{y}) + 1)}{2} \quad (c_2|\tilde{y}| < 1), P_2(\tilde{y}) = 0 \quad (c_2|\tilde{y}| \ge 1), \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}$$

 $c_1, c_2$  — параметры, характеризующие область давления



# Единственность классического решения

Теорема. Классическое решение рассматриваемой задачи единственно.

Пара функций  $w=w_1-w_2,\, \varphi=\varphi_1-\varphi_2$  удовлетворяет следующей начально-краевой задаче



$$Mw_{tt} = -\rho_{\ell}gw - \rho_{\ell}\varphi_{t}(x, y, 0, t) \qquad (x, y, t) \in \Pi_{T},$$
$$\Delta\varphi(x, y, z, t) = 0 \qquad (x, y, z, t) \in \Omega_{T},$$

$$\varphi_z = w_t \quad (z = 0), \qquad \varphi_y = 0 \quad (y = \pm L), \qquad \varphi_z = 0 \quad (z = -H),$$
 
$$\varphi(x, y, z, t), \quad \varphi_x(x, y, z, t), \quad w(x, y, t), \quad w_x(x, y, t) \to \infty \qquad (x \to \infty),$$

$$w(x, y, 0) = 0,$$
  $w_t(x, y, 0) = 0$ 

# Единственность классического решения

Умножаем уравнение колебания битого льда на  $w_t$ , интегрируем по  $\Pi$ 

$$\int_{\Pi} \frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} g \rho_{\ell} w^2 \right) d\Pi = -\rho_{\ell} \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \varphi_t d\Pi$$

$$\left| \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Pi} \left( \frac{M}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} g \rho_\ell w^2 \right) d\Pi + \rho_\ell \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 d\Omega \right] = 0 \right|$$

$$\int_{\Pi} \left( \frac{M}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} g \rho_\ell w^2 \right) d\Pi + \rho_\ell \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 d\Omega = 0$$

$$\frac{M}{2}w_t^2 + \frac{1}{2}g\rho_\ell w^2 = 0 \Rightarrow \frac{M}{2}w_t^2 = 0, \quad \frac{1}{2}g\rho_\ell w^2 = 0$$

$$\nabla \varphi = 0, \quad \varphi = 0$$

$$w = w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$$
  
$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

#### Метод решения. Преобразование Фурье вдоль канала

Преобразование Фурье для прогибов битого льда вдоль оси x имеет вид

$$w^{F}(\xi, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, t) e^{-i\xi x} dx \qquad w(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^{F}(\xi, y, t) e^{i\xi x} dx$$

Уравнение прогибов битого льда для образа Фурье  $w^F$ 

$$Mw_{tt}^{F} = -\rho_{\ell}\varphi_{t}^{F} - \rho_{\ell}gw^{F} - P^{F}(\xi, y)e^{-i\xi Ut}$$
$$w^{F}(x, y, 0) = w_{0}^{F}(\xi, y), \qquad w_{t}^{F}(\xi, y, 0) = 0$$

$$\begin{split} \varphi_{yy}^F + \varphi_{zz}^F &= \xi^2 \varphi^F & (-L < y < L, -H < z < 0) \\ \varphi_z^F &= w^F & (z = 0), \quad \varphi_y^F = 0 \quad (y \pm L), \\ \varphi_z^F &= 0 \quad (z = -H), \\ \varphi^F &= 0, \quad \varphi_t^F = 0 \quad (t = 0). \end{split}$$

9 /18

# Метод решения. Метод разделения переменных

 $\psi_n(\xi, y) = \cos(\frac{\pi n y}{L})$ 

Прогиб битого льда,

$$w^{F}(\xi, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi, t) \overline{\psi_n(y)}$$

#### Потенциал скорости

$$\varphi^{F}(\xi, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n,t}(\xi, t)\psi_{n}(y)\cosh(\sqrt{\pi^{2}n^{2} + \xi^{2}}(H+z))}{\sqrt{\pi^{2}n^{2} + \xi^{2}}\sinh(\sqrt{\pi^{2}n^{2} + \xi^{2}}H)}$$

#### Уравнение колебания битого льда

$$M \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,tt} \cos(\frac{\pi n y}{L}) = -\rho_{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n,tt}(\xi,t)\psi_{n}(y) \cosh(\sqrt{\pi^{2}n^{2}+\xi^{2}}(H+z))}{\sqrt{\pi^{2}n^{2}+\xi^{2}} \sinh(\sqrt{\pi^{2}n^{2}+\xi^{2}}H)} - \rho_{\ell} g \sum_{n=1}^{\infty} a_{n}(\xi,t) \cos(\frac{\pi n y}{L}) - P^{F}(\xi,y) e^{-i\xi U t}$$

# Поиск коэффициентов разложения $w^F$ на колебания поперек канала

$$\frac{d^{2}a_{n}}{dt^{2}} + w_{n}^{2}(\xi)a_{n} = H_{n}(\xi)e^{-i\xi Ut}$$

$$H_{n}(\xi) = \frac{P_{n}(\xi)\sqrt{(\frac{\pi n}{L})^{2} + \xi^{2}}}{2L(M\sqrt{(\frac{\pi n}{L})^{2} + \xi^{2}} + \rho_{\ell}\coth(\sqrt{(\frac{\pi n}{L})^{2} + \xi^{2}}H))}$$

Начальные условия

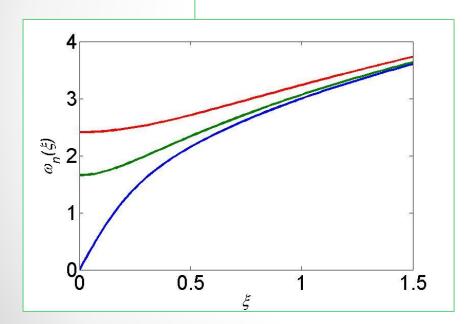
$$a_n(\xi,0) = \frac{H_n(\xi)}{\omega_n^2(\xi)}, \qquad \frac{da_n}{dt}(\xi,0) = 0$$

$$a_n(\xi,t) = \frac{H_n U \xi}{2\omega_n^2} \left( \frac{e^{i\omega_n t}}{\omega_n + \xi U} - \frac{e^{-i\omega_n t}}{\omega_n - \xi U} \right) + \frac{H_n e^{-i\xi U t}}{\omega_n^2 - \xi^2 U^2}$$

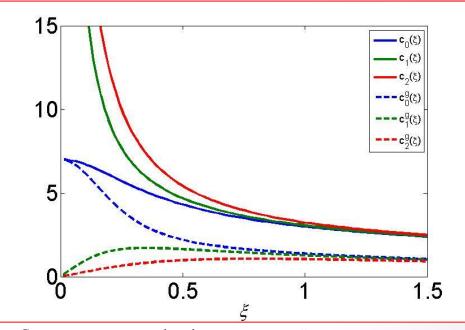
$$\omega_n(\xi) = \sqrt{\frac{\rho_\ell g \sqrt{\mu_n + \xi^2}}{M \sqrt{\mu_n + \xi^2} + \rho_\ell \coth(\sqrt{\mu_n + \xi^2} H)}}$$

# Дисперсионные соотношения периодических волн, распространяющихся вдоль канала

$$\omega_n(\xi) = \sqrt{\frac{\rho_{\ell}g\sqrt{\mu_n + \xi^2}}{M\sqrt{\mu_n + \xi^2} + \rho_{\ell} \coth(\sqrt{\mu_n + \xi^2}H)}}$$



$$\omega_0(\xi) < \omega_1(\xi) < \omega_2(\xi) < \dots$$



Сплошные линии –график фазовых скоростей, прерывистые линии – график групповых скоростей

$$c_n(\xi) = \frac{\omega_n}{\xi}$$

$$c_n^g(\xi) = \frac{d\omega_n}{d\xi}$$

$$M = \rho_i h_i$$
 $ho_\ell = 1024 \ \mathrm{kg/m}^3$ 
 $ho_i = 917 \ \mathrm{kg/m}^3$ 
 $L = 10 \ \mathrm{m}$ 
 $H = 5 \ \mathrm{m}$ 
 $h_i = 0.1 \ \mathrm{m}$ 
 $U = 5 \ \mathrm{m/c}$ 

# Обратное преобразование Фурье. Поведение прогибов битого льда при больших

временах Прогиб битого льда w(X,y,t) в движущейся системе координат

$$w(X, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\xi, t) \psi_n(y) e^{i\xi X} d\xi$$

$$[X = x - Ut]$$

$$w_n(X, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(\xi, t) \psi_n(y) e^{i\xi X} d\xi =$$

$$= \int_{0}^{\infty} H_n(\xi) \psi_n(y) \left(\frac{2\cos(\xi X)}{\omega_n^2 - U^2 \xi^2} + \frac{e^{i\xi X} U \xi}{2\omega_n^2} \left[ \frac{e^{it(\omega_n + U \xi)}}{\omega_n + U \xi} - \frac{e^{-it(\omega_n - U \xi)}}{\omega_n - U \xi} \right] -$$

$$- \frac{e^{-i\xi X} U \xi}{2\omega_n^2} \left[ \frac{e^{it(\omega_n - U \xi)}}{\omega_n - U \xi} - \frac{e^{-it(\omega_n + U \xi)}}{\omega_n + U \xi} \right] d\xi$$

0.4

0.6

8.0

0.2

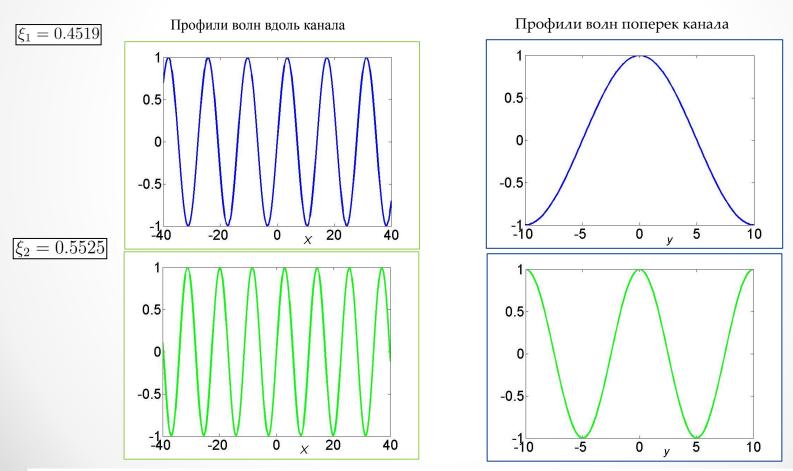
#### Профили волн вдоль и поперек канала

$$\left| w_n(X, y, t) \right|_{t \to \infty} = w_n^{loc}(X, y) - A_n \psi_n(y) \sin(\xi_n X) G_n(X)$$

$$A_n = \frac{2\pi H_n(\xi_n)}{\langle x \rangle \langle x$$

$$A_n = \frac{2\pi H_n(\xi_n)}{(\omega'_n(\xi_n) - U)\xi_n U}$$

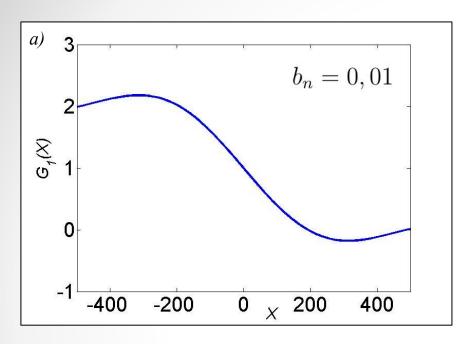
$$G_n(X) = -sign(C_g^n - U) - \frac{2}{\pi}sign(X) \int_0^{|X|b_n} \frac{\sin(z)}{z} dz$$

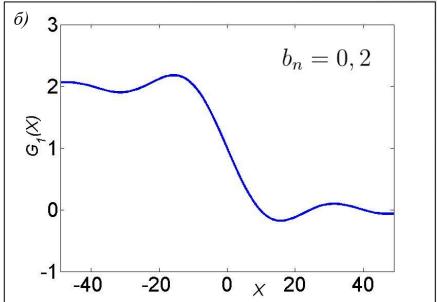


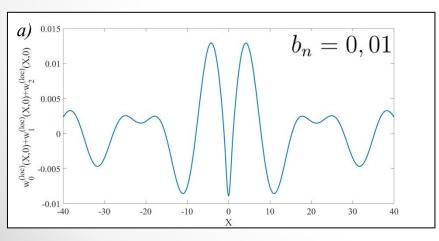
• Erdelyi, A. Asymptotic expansions / A. Erdelyi. – New York: Dover Publications, Inc. – 1956.

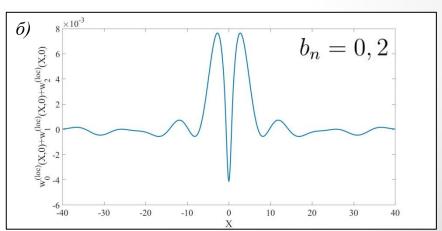
14/18

#### Вычисление функции срезки и локальных прогибов

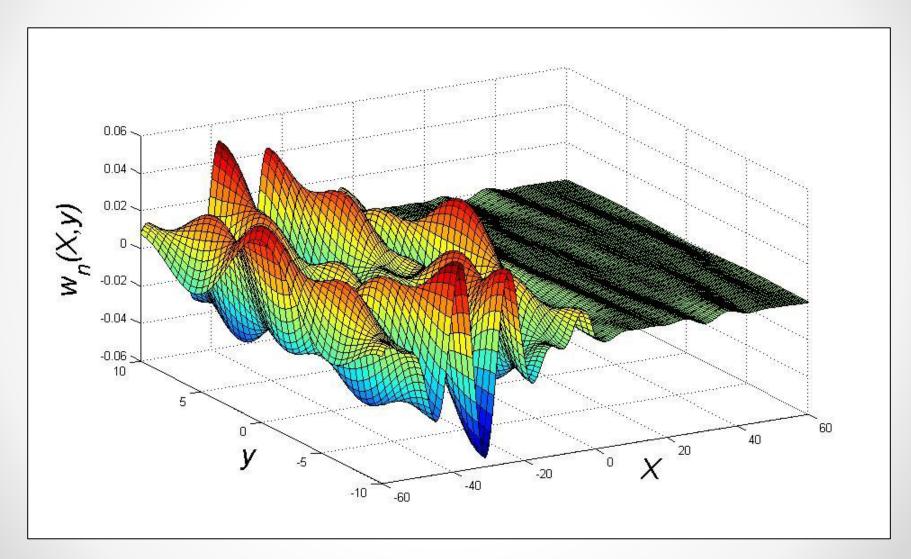








# Прогибы битого льда для суммы первых трех интегралов



#### Заключение

Рассмотрена нестационарная задача для определения прогибов битого льда в канале под действием внешней нагрузки, движущейся с постоянной скоростью вдоль центральной линии канала. Доказана теорема единственности классического решения рассматриваемой задачи. Исследовано поведение колебаний битого льда в канале под действием внешней нагрузки при больших временах. Решение получено в виде формулы, дающей простую интерпретацию для анализа формы колебаний битого льда. Получено, что при больших временах колебания битого льда состоят из волн, распространяющихся сзади нагрузки, таких волн в канале будет счетное число, и из локальных прогибов в области нагрузки, которые затухают при отдалении от нагрузки.

Автор принимал активное участие в получении результатов: постановке задачи, численном и аналитическом исследовании, анализе и обсуждении полученных результатов, а также в оформлении результатов в виде публикаций и научных докладов.

### Основные публикации

1. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А. Об одной задаче движения внешней нагрузки по вязкому битому льду в канале. Известия АлтГУ, Барнаул, 2019, 4(108), с. 76-81.

https://doi.org/10.14258/izvasu(2019)4-11.

- 2. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А. Модели колебаний тонкого битого льда в канале. Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. Барнаул, 2019, (5), с. 60-66. <a href="http://journal.asu.ru/psgmm/article/view/7240">http://journal.asu.ru/psgmm/article/view/7240</a>.
- 3. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А. Математическая модель нестационарных колебаний битого льда в канале. Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2019. Издательство АГУ, Барнаул, 2019, с. 45-49.
- 4. Завьялова К.Н., Шишмерев К. А., Хабахпашева Т. И. Колебания битого льда в канале. Сборник научных статей международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники" 2018, Барнаул, 13-16 ноября, 2018. с. 474-482. <a href="https://www.sites.google.com/site/lomchten/">https://www.sites.google.com/site/lomchten/</a>.
- 5. Завьялова К.Н., Шишмерев К. А. Единственность решения задачи о колебаниях битого льда в канале. Сборник научных статей международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники" 2018, Барнаул, 13-16 ноября, 2018. с. 469-473. <a href="https://www.sites.google.com/site/lomchten/">https://www.sites.google.com/site/lomchten/</a>.
- 6. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А., Хабахпашева Т. И. Движение внешней нагрузки по битому льду в канале. Известия АлтГУ, Барнаул, 2018, 4 (102), с.73-78.

http://izvestiya.asu.ru/index.php/iz/article/view/%282018%294-13.

DOI: 10.14258/izvasu(2018)4-13.

- 7. Завьялова К. Н., Шишмарев К. А. Исследование формирования вынужденных гравитационных волн в канале, покрытом битым льдом. Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2018. Издательство АГУ, Барнаул, 2018, с. 65-68.
- 8. Шишмарев К. А., Завьялова К. Н. Свободные и вынужденные волны в канале, покрытом битым льдом. Сборник трудов всероссийской конференции по математике МАК 2017. Издательство АГУ, Барнаул, 2017, с. 96-99

#### Контакты

Завьялова К.Н. kristina-zavyalova-1996@mail.ru