

# Моделирование в сейсморазведке, подходы и математический аппарат

Подготовила  
Осташ Александра  
410

# Моделирование

- ***Задачи моделирования:***

- планирование съемки;
- подавление кратных волн;
- привязка скважинных данных к наземной сейсморазведке;
- оценка качества применения обрабатывающих процедур.

- ***Виды моделирования в сейсморазведке:***

- конечно-разностное;
- лучевое
- конечно-объемное

# Лучевое трассирование

## Постановка задачи

Дано:

$S (s_x , s_y , s_z)$  – координаты источника

$\vec{S}$  - радиус-вектор

$P (p_x , p_y , p_z)$  – точка на след. границе

Найти:

$P (p_x , p_y , p_z)$

Длину и время пробега от  $S$  до  $P$

# Шаг №1. Уравнение поверхности отражателя

1)  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$  – уравнение 2 порядка отражающей поверхности

2)  $A \quad X \quad B$

$$\phi(x, y, z) = (x \ y \ z) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (b_1 \ b_2 \ b_3) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0.$$

3)  $\phi(x, y, z) = X^T A X + B^T X + c = 0$

# Шаг №2. Длина пути пробега от S до P

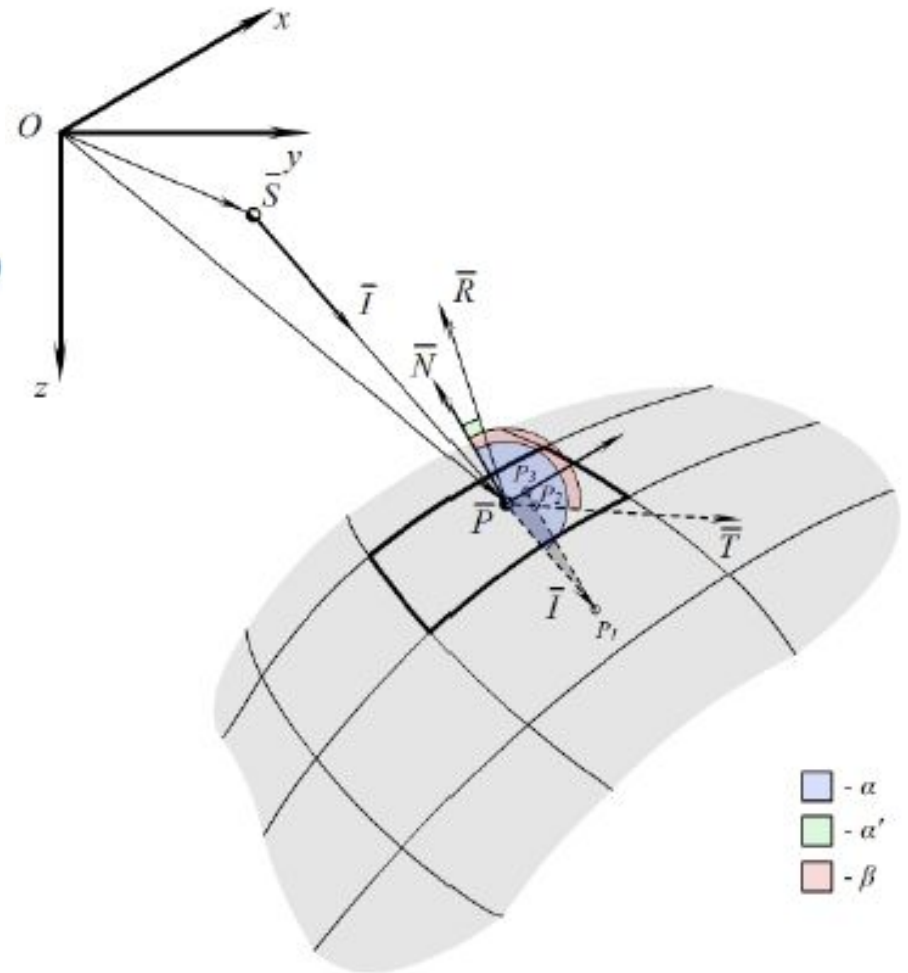
1)  $P = S + L \times I$

2) 
$$\begin{cases} P = S + L \times I \\ \phi(p_x, p_y, p_z) = P^T A P + B^T P + C \end{cases}$$

3) 
$$L^2(I^T A I) + 2L\left(\frac{B^T I}{2}\right) + (S^T A S + B^T S + c) = 0$$

4) 
$$C_1 L^2 + 2C_2 L + C_3 = 0$$

5) 
$$L = -\frac{C_2}{C_1} \pm \frac{C_2}{C_1} \sqrt{1 - \frac{C_1 C_3}{C_2^2}}$$

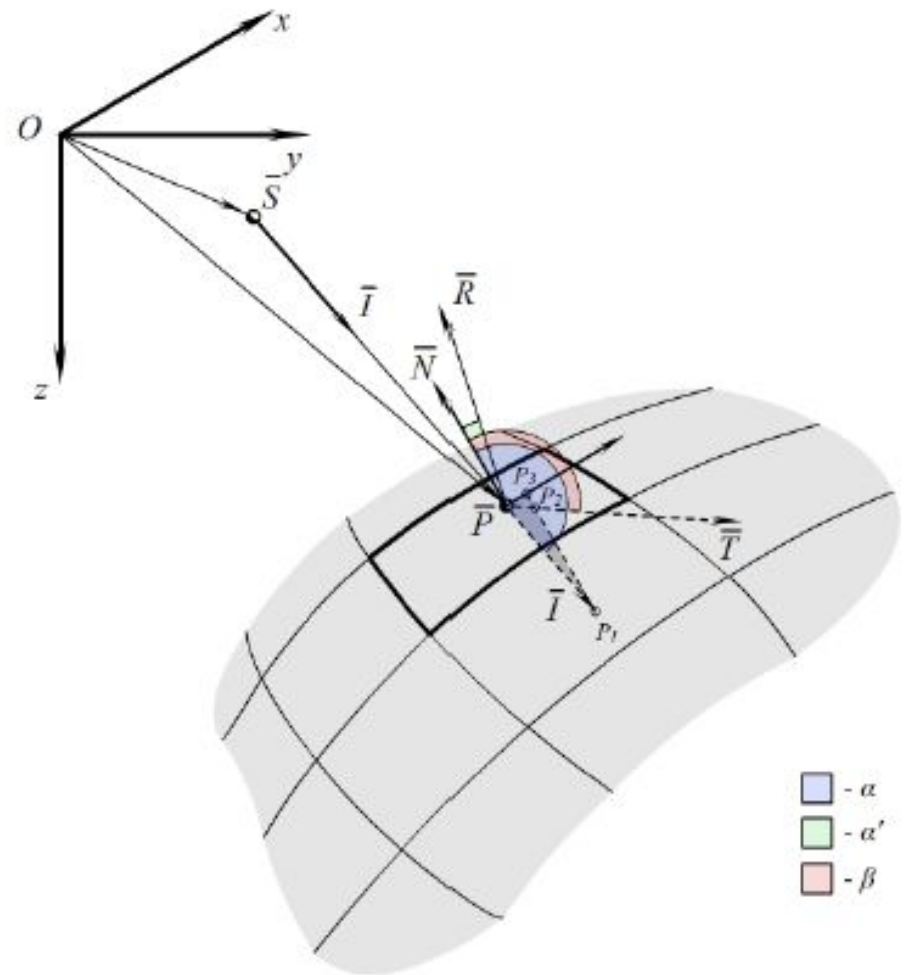


# Шаг №3. Нормаль к отражающей поверхности в точке P. Угол падения

1)  $GRAD(\phi) = 2AP + B$

2) 
$$N = \frac{GRAD(\phi)}{\sqrt{(GRAD(\phi))^T \times (GRAD(\phi))}}$$

3)  $\cos \alpha = I^T N$



# Шаг №4. Уравнение проходящего и отраженного лучей

$$1) \quad T = \frac{(PP_1)I + (P_1P_2)N}{(PP_2)}$$

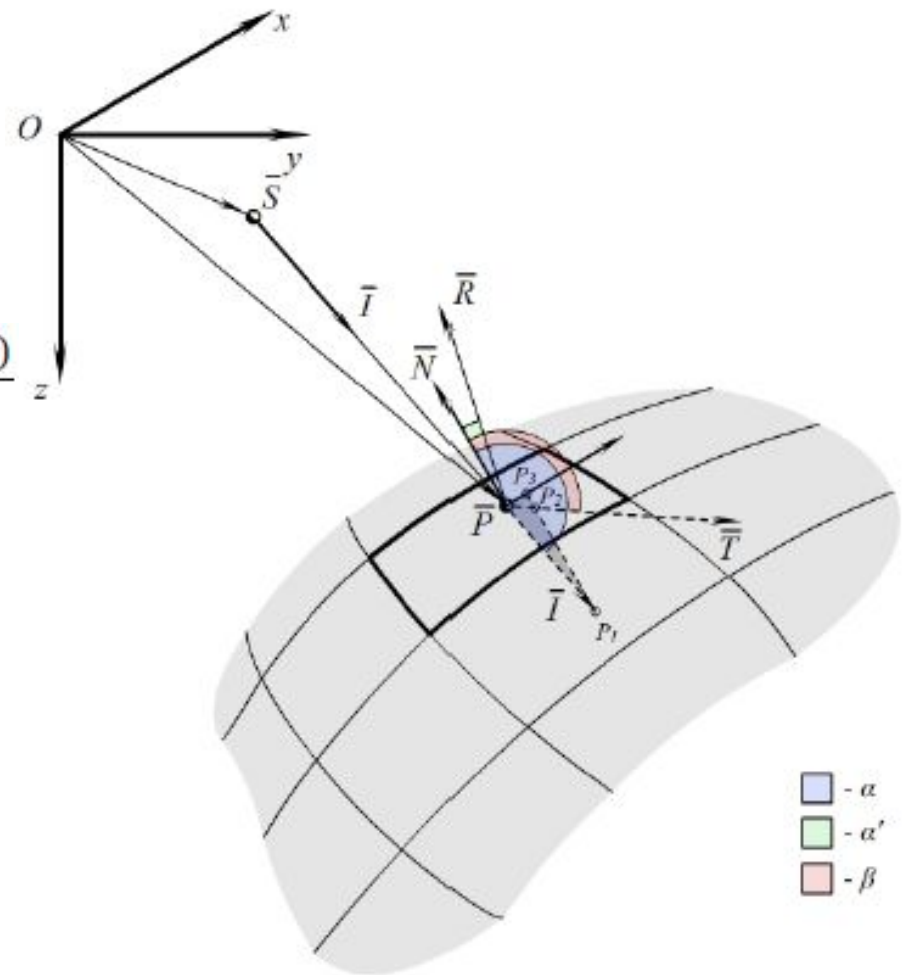
$$2) \quad PP_3 = \sin \alpha, PP_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$3) \quad P_1P_2 = P_1P_3 - P_3P_2 = -\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta = -\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta}$$

$$4) \quad T = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} I - \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta} N$$

$$5) \quad T = \frac{V_l}{V_i} I - \left( \frac{V_l}{V_i} \cos \alpha - \cos \beta \right) N$$

$$6) \quad R = \frac{V_r}{V_i} I - \left( \frac{V_r}{V_i} \cos \alpha - \cos \alpha' \right) N$$



## Шаг №3. Случай слоя с непрерывным изменением скорости

$$1) \quad N = \pm \frac{GRAD(V)}{\|GRAD(V)\|}$$

$$2) \quad I + \Delta I = \left(\frac{V + \Delta V}{V}\right) I - \left(\frac{\sin \Delta \alpha}{\sin \alpha}\right) N$$

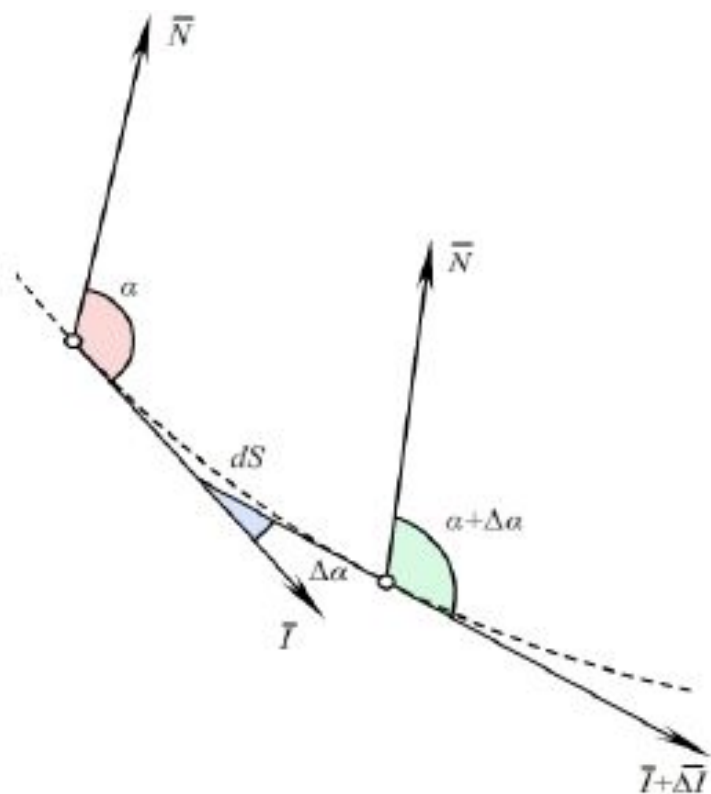
$$3) \quad \frac{dI}{dS} = \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{dS}\right) I - \left(\frac{d\alpha}{dS} \frac{1}{\sin \alpha}\right) N$$

$$4) \quad I \frac{dI}{dS} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dS} I - \left(\frac{d\alpha}{dS} \frac{1}{\sin \alpha}\right) IN = 0$$

$$5) \quad \frac{dI}{dS} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dS} \left(I - \frac{N}{\cos \alpha}\right)$$

$$6) \quad \frac{dX_j}{dt} = V_{ij}$$

$$7) \quad \frac{di_x}{dt} = \left(\frac{dV}{dS}\right) i_x - \frac{\partial V}{\partial X_x}$$





# Лучевое трассирование

- Итог: сейсмотрасса
- - с увеличением сложности среды возникает проблема нелинейности решения обратной задачи
- - ветвление решений прямой кинематической задачи
- + идейно прост

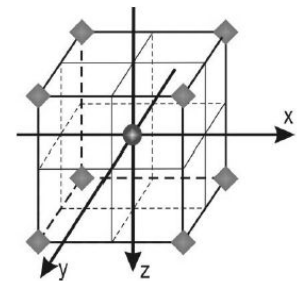
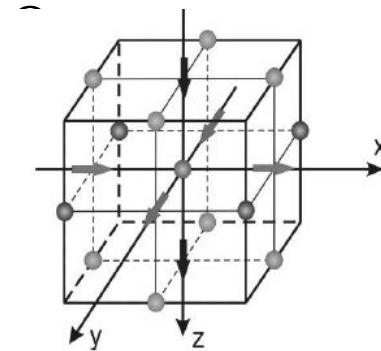
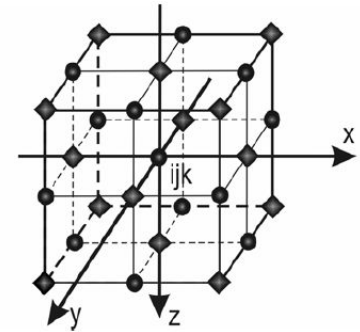
# Конечно-разностный метод: схема Лебедева, Вирье, RSGS

- Введем некую равномерную сетку с целыми и полуцелыми узлами, как по пространству, так и по времени и рассмотрим два множества индексов:

$$\sigma = \{(IJK) \mid I + J + K \in \mathbf{Z}\}$$

$$u = \{(IJK) \mid I + J + K + 1/2 \in \mathbf{Z}\}$$

- Введем эффективные параметры среды. Значения плотности и тензора упругих модулей предполагается известным в целых узлах сетки по пространству. В дробных узлах по пространству необходимо проводить пересчет параметров по определенным правилам



# Конечно-разностное моделирование

- + позволяет использовать модель-решетку любой сложности и дает качественный результат
- - требует значительных вычислительных ресурсов
  - + время обращения к памяти мало
- - время расчета модели дольше, чем лучевым методом
- + методы конечных разностей с явной схемой во временной области наиболее эффективны для решения 3D задач реального объёма

# Конечно-объемный метод WENO/Рунге-Кутта

- Разбиваем плоскость на ячейки  $\Pi_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}}{\Delta y}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \\ -u_1 \\ 0 \\ -u_2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\sigma_{12} \\ -\sigma_{22} \\ 0 \\ -u_2 \\ -u_1/2 \end{pmatrix}$$

Для нахождения  $\mathbf{U}$  применяется WENO-реконструкция из средних значений по ячейкам слева и справа на гранях между ячейками, подбираются весовые коэффициенты

Интегрируем по объему ячейки

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y)) dy,$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2})) dx$$

Аппроксимация N-точечной квадратурной формулой

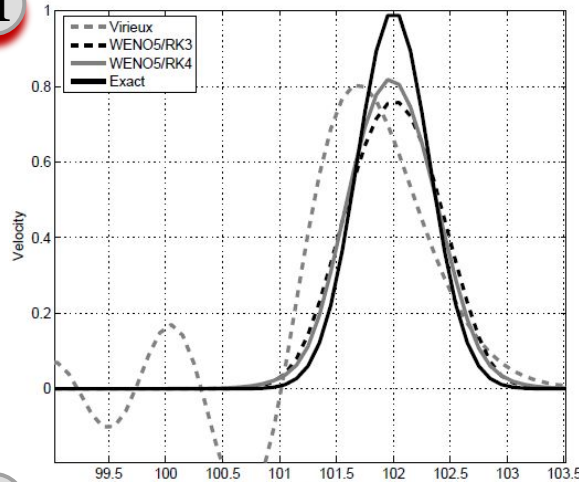
$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{\Delta y} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y_{\alpha})) K_{\alpha}$$

веса

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{2} \mathbf{F} \left( \mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j - \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t) \right) + \frac{1}{2} \mathbf{F} \left( \mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j + \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t) \right)$$

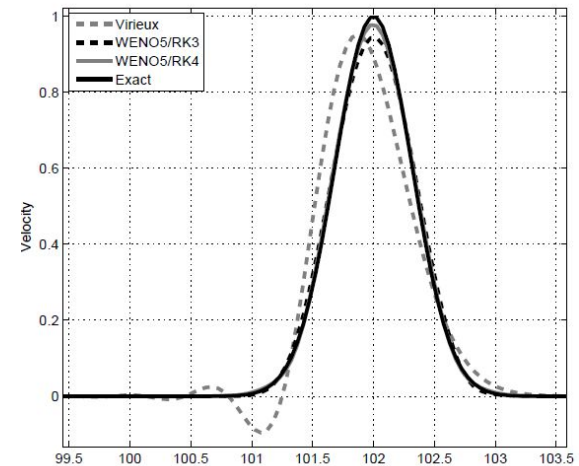
# Сравнение WENO и схемы Вирие: графики искажения импульса

1

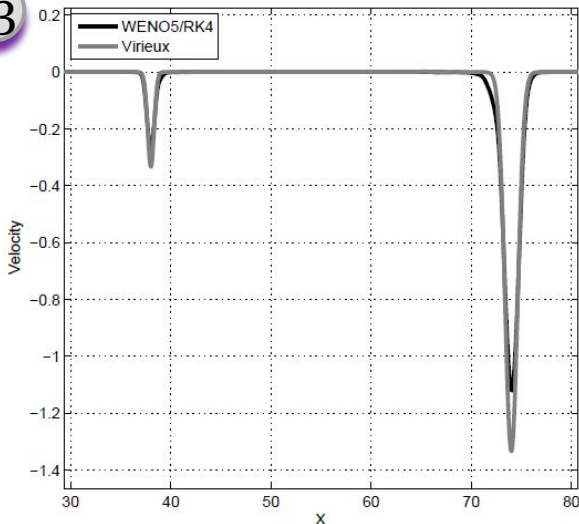


1-2: сравнение с точным решением. На длину волны приходится 20 точек в первом случае. Во втором случае - 40 точек. Вывод: метод WENO дает более точные численные значения

2

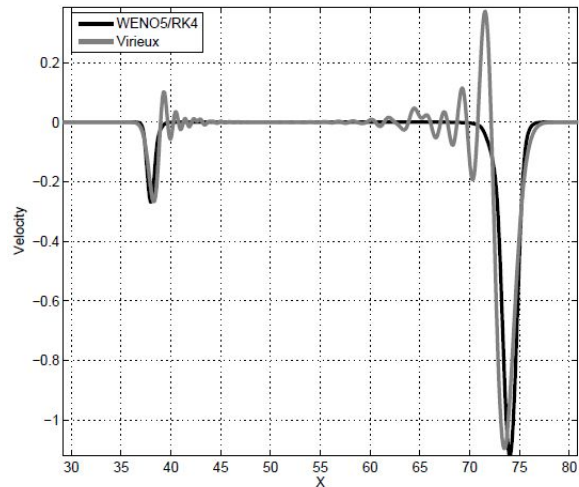


3



3-4: пример решения задачи для двухслойной среды. Только при увеличении количества точек метод Вирие близок к истинным значениям

4



# Вопросы

- Способы моделирования
- Какие схемы используются при конечно-разностном моделировании?
- Какой метод самый быстрый? Какой наиболее точный?

# Список литературы

- Балтийская школа-семинар «Петрофизическое моделирование осадочных пород»\* г. Петергоф \* 17-21 сентября, 2012
- WENO/Рунге-Кутта метод высокой точности для моделирования упругих волн. М. Н. Дмитриев, Е. И. Роменский. Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 , 2010. с. 50-70.
- Отчет : Проектирование системы мобильного сейсмического мониторинга в условия парогравитационного воздействия на пласт с высоковязкой нефтью. Р.Н. Ситдиков, 2016
- Конечно-разностное моделирование процессов распределения волновых полей в анизотропных упругих средах. Д. М. Вишнеvский, В. В. Лисица.
- Применение схемы Лебедева для моделирования волновых процессов анизотропных упругих средах. В. В. Лисица, Е. В. Лысю