Моделирование в сейсморазведке, подходы и математический аппарат

Подготовила
Осташ Александра
410

Моделирование

- ***Задачи моделирования:***
- планирование съемки;
- подавление кратных волн;
- привязка скважинных данных к наземной сейсморазведке;
- оценка качества применения обрабатывающих процедур.
- ***Виды моделирования в сейсморазведке:***
- конечно-разностное;
- лучевое
- конечно-объемное

Лучевое трассирование

Постановка задачи

Дано:

S (sx , sy , sz) – координаты источника

$\vec{S}$ - радиус-вектор

P (px , py , pz) – точка на след. границе

Найти:

P (px , py , pz)

Длину и время пробега от S до P

$a_{11}x^2 + a_{11}x^2$

Шаг №1. Уравнение поверхности отражателя

1) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$ – уравнение 2 порядка отражающей поверхности

2) A X B

$$\phi(x,y,z) = (x\ y\ z) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (b_1 \quad b_2 \quad b_3) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0$$

3) $$\phi(x,y,z) = X^T A X + B^T X + c = 0$$

Шаг №2. Длина пути пробега от S до P

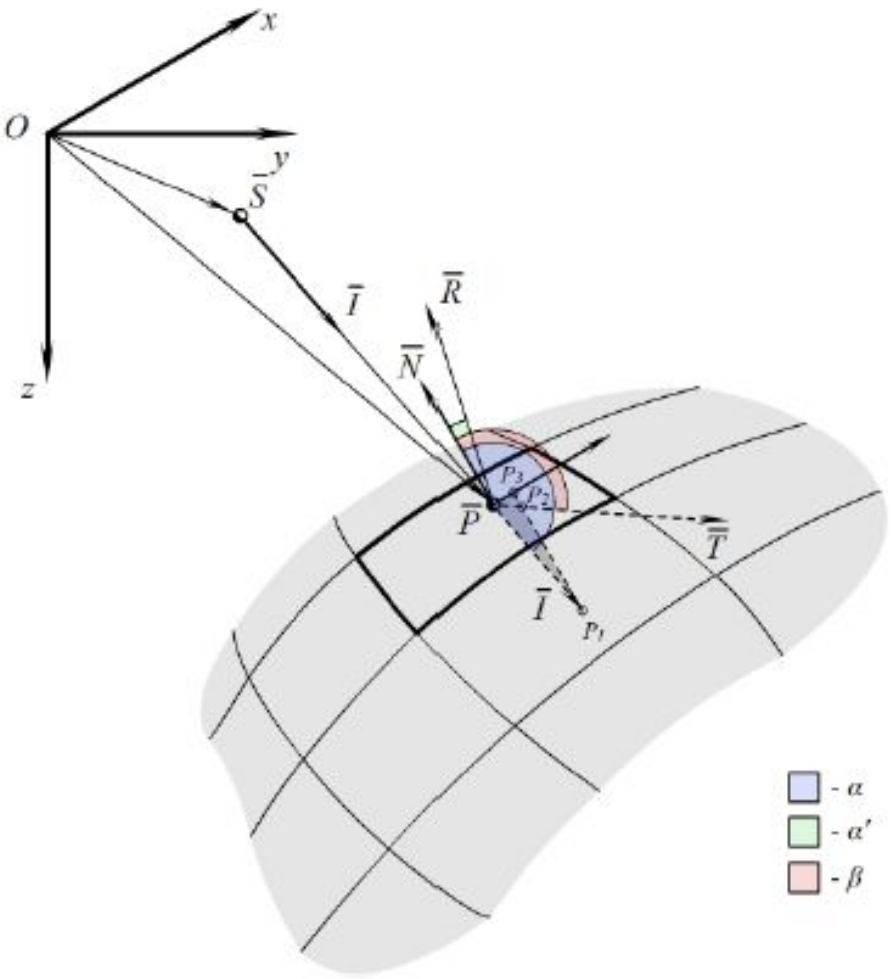
1) $P = S + L \times I$

2) $\begin{cases} P = S + L \times I \\ \phi(p_x, p_y, p_z) = P^T A P + B^T P + C \end{cases}$

3) $$L^2(I^T A I) + 2L\left(\frac{B^T I}{2}\right) + (S^T A S + B^T S + c) = 0$$

4) $$C_1 L^2 + 2C_2 L + C_3 = 0$$

5) $$L = -\frac{C_2}{C_1} \pm \frac{C_2}{C_1}\sqrt{1 - \frac{C_1 C_3}{C_2^2}}$$

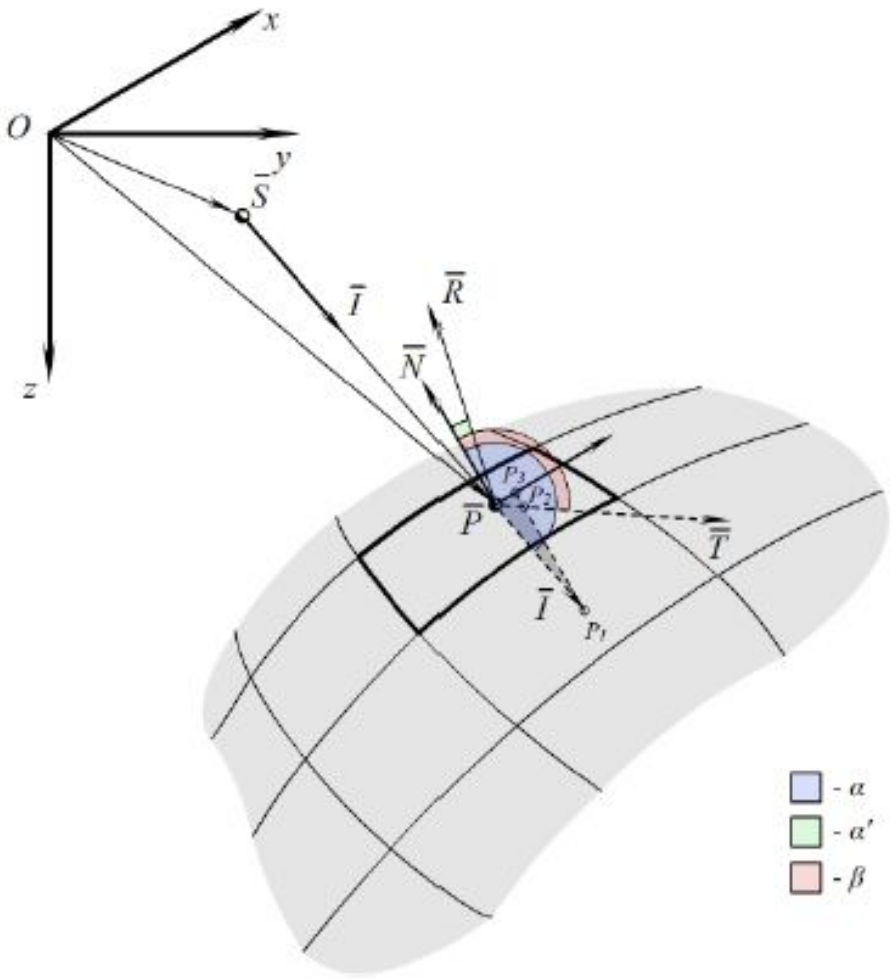


Шаг №3. Нормаль к отражающей поверхности в точке P. Угол падения

1) $GRAD\,(\phi) = 2AP + B$

2) $$N = \frac{GRAD\,(\phi)}{\sqrt{(GRAD\,(\phi))^T \times (GRAD\,(\phi))}}$$

3) $\cos\alpha = I^T N$



Шаг №4. Уравнение проходящего и отраженного лучей

1) $$T = \frac{(PP_1)I + (P_1P_2)N}{(PP_2)}.$$

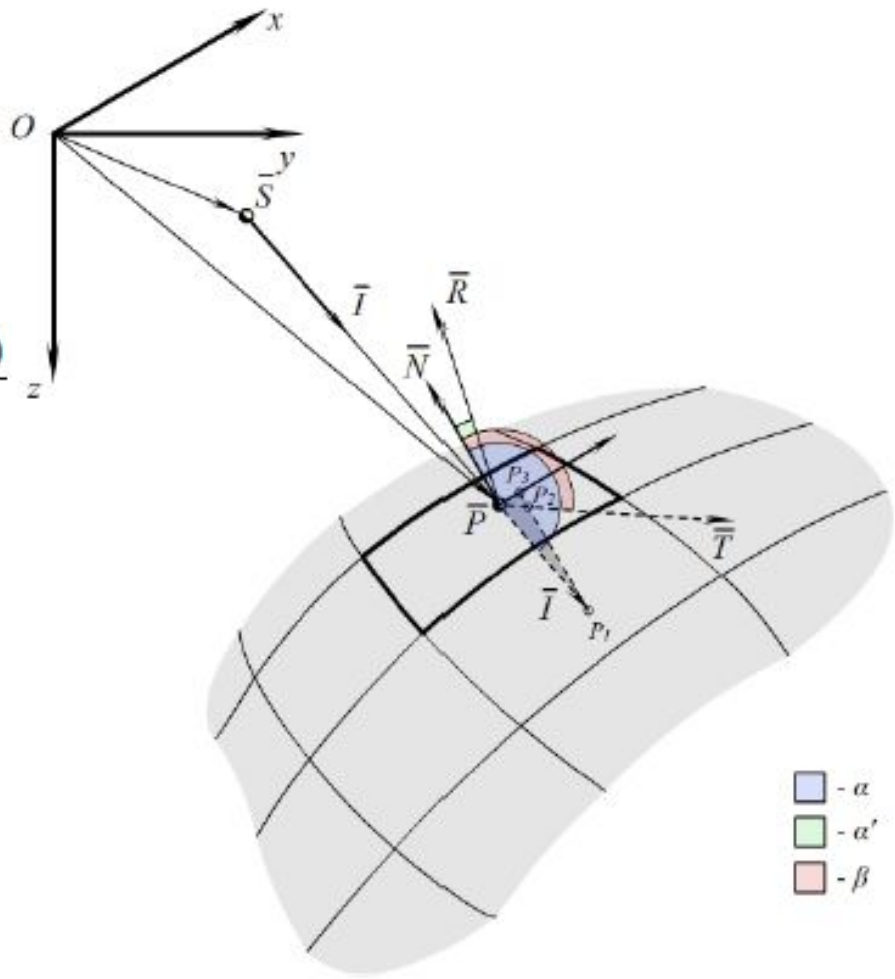
2) $$PP_3 = \sin\alpha \ , PP_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

3) $$P_1P_2 = P_1P_3 - P_3P_2 = -\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta = -\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}$$

4) $$T = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}I - \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}N$$

5) $$T = \frac{V_l}{V_i}I - \left(\frac{V_l}{V_i}\cos\alpha - \cos\beta\right)N$$

6) $$R = \frac{V_r}{V_i}I - \left(\frac{V_r}{V_i}\cos\alpha - \cos\alpha'\right)N$$



Шаг №3.Случай слоя с непрерывным изменением скорости

1) $$N = \pm \frac{GRAD\,(V)}{\|GRAD\,(V)\|}$$

2) $$I + \Delta I = \left(\frac{V + \Delta V}{V}\right) I - \left(\frac{\sin \Delta\alpha}{\sin \alpha}\right) N$$

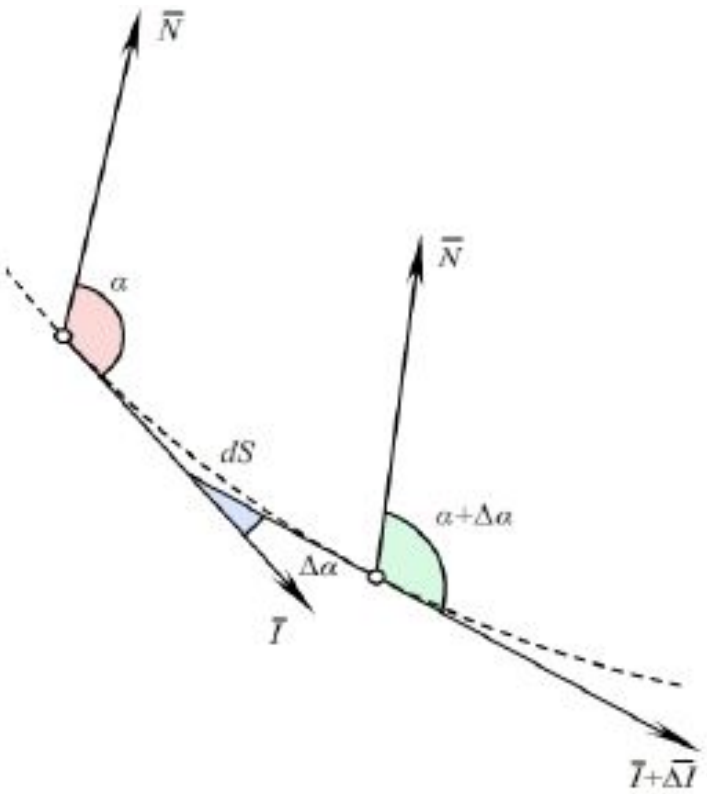
3) $$\frac{dI}{dS} = \left(\frac{1}{V}\frac{dV}{dS}\right) I - \left(\frac{d\alpha}{dS}\frac{1}{\sin \alpha}\right) N$$

4) $$I\frac{dI}{dS} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dS} - \left(\frac{d\alpha}{dS}\frac{1}{\sin \alpha}\right) IN = 0$$

5) $$\frac{dI}{dS} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dS}\left(I - \frac{N}{\cos \alpha}\right)$$

6) $$\frac{dX_j}{dt} = V_{ij}$$

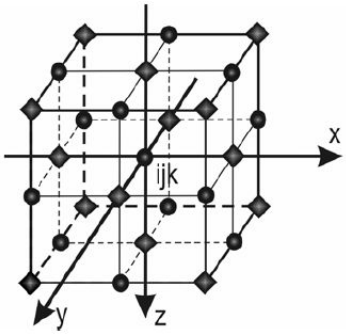
7) $$\frac{di_x}{dt} = \left(\frac{dV}{dS}\right) i_x - \frac{\partial V}{\partial X_x}$$



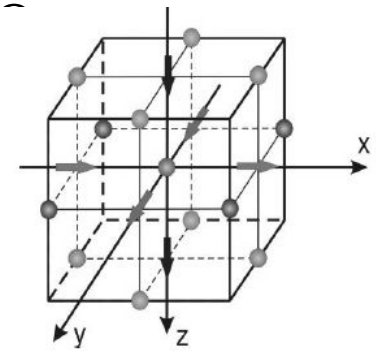
Лучевое трассирование

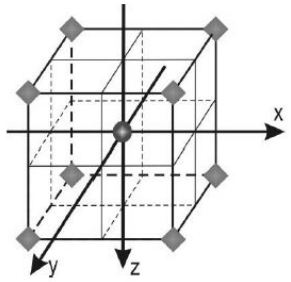
- Итог: сейсмотрасса
- - с увеличением сложности среды возникает проблема нелинейности решения обратной задачи
- - ветвление решений прямой кинематической задачи
- + идейно прост

Конечно-разностный метод: схема Лебедева, Вирье, RSGS



- Введем некую равномерную сетку с целыми и полуцелыми узлами, как по пространству, так и по времени и рассмотрим два множества индексов:
  $\sigma = \{(IJK) |\ I + J + K \in \boldsymbol{Z}\}$
  $u = \{(IJK) |\ I + J + K + 1/2 \in \boldsymbol{Z}\}$
- Введем эффективные параметры среды. Значения плотности и тензора упругих модулей предполагается известным в целых узлах сетки по пространству. В дробных узлах по пространству необходимо проводить пересчет параметров по определенным правилам правилам





Конечно-разностное моделирование

- + позволяет использовать модель-решетку любой сложности и дает качественный результат
- - требует значительных вычислительных ресурсов
  + время обращения к памяти мало
- - время расчета модели дольше, чем лучевым методом
- +методы конечных разностей с явной схемой во временной области наиболее эффективны для решения 3D задач реального объёма

Конечно-объемный метод WENO/Рунге-Кутта

- Разбиваем плоскость на ячейки $\Pi_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$
-

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = 0$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \\ -u_1 \\ 0 \\ -u_2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\sigma_{12} \\ -\sigma_{22} \\ 0 \\ -u_2 \\ -u_1/2 \end{pmatrix}$$

потоки

$$\frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}}{\Delta y}$$

Интегрируем по объему ячейки

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y))dy,$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{G}(\mathbf{U}(t, x, y_{j+1/2}))dx$$

Аппроксимация N-точечной квадратурной формулой

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{\Delta y} \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{U}(t, x_{i+1/2}, y_\alpha))K_\alpha$$

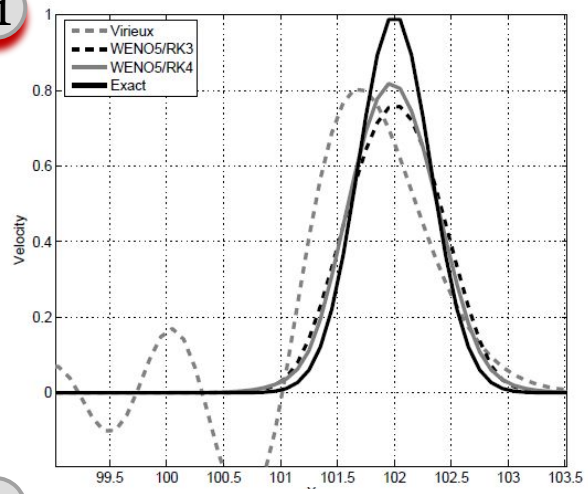
веса

Для нахождения U применяется WENO-реконструкция из средних значений по ячейкам слева и справа на гранях между ячейками, подбираются весовые коэффициенты

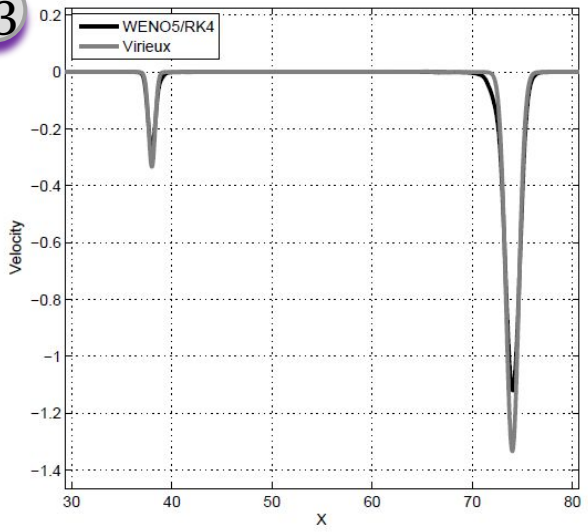
$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} \approx \frac{1}{2}\mathbf{F}\left(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j - \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t)\right) + \frac{1}{2}\mathbf{F}\left(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, y_j + \frac{\Delta y}{2\sqrt{3}}, t)\right)$$

Сравнение WENO и схемы Вирье: графики искажения импульса

1



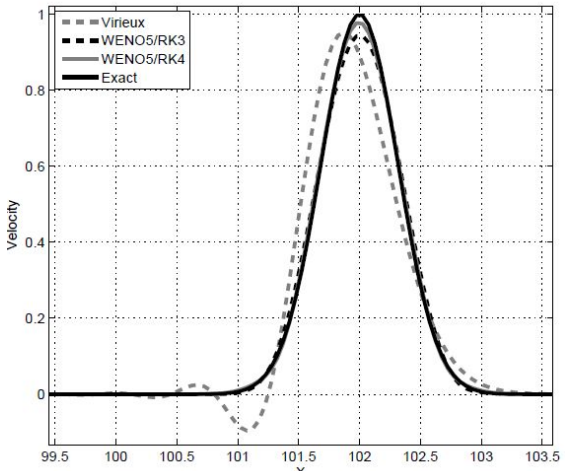
3



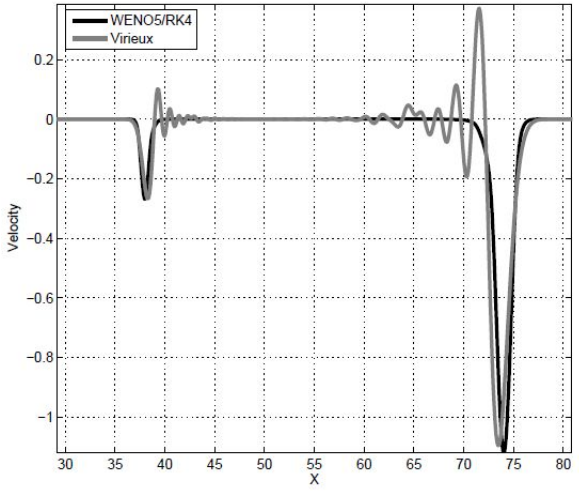
1-2: сравнение с точным решением. На длину волны приходится 20 точек в первом случае. Во втором случае – 40 точек. Вывод: метод WENO дает более точные численные значения

3-4: пример решения задачи для двухслойной среды. Только при увеличении количества точек метод Вирье близок к истинным значениям

2



4



Вопросы

- Способы моделирования
- Какие схемы используются при конечно-разностном моделировании?
- Какой метод самый быстрый? Какой наиболее точный?

Список литературы

- Балтийская школа-семинар «Петрофизическое моделирование осадочных пород»* г. Петергоф * 17-21 сентября, 2012
- WENO/Рунге-Кутта метод высокой точности для моделирования упругих волн. М. Н. Дмитриев, Е. И. Роменский. Уфимский математический журнал. Том 2. № 1 , 2010. с. 50-70.
- Отчет : Проектирование системы мобильного сейсмического мониторинга в условия парогравитационного воздействия на пласт с высоковязкой нефтью. Р.Н. Ситдиков, 2016
- Конечно-разностное моделирование процессов распределения волновых полей в анизотропных упругих средах. Д. М. Вишневский, В. В. Лисица.
- Применение схемы Лебедева для моделирования волновых процессов анизотропных упругих средах. В. В. Лисица, Е. В. Лысью