Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 7

Агаев Рафиг Пашаевич

(доктор физ.-мат. наук)

Евклидово пространство

- Определение
- Свойства скалярного произведения
- Расстояние от вектора до подпространства
- Матрица Грама
- Метод наименьших квадратов
- и еще …

Вспомним определение линейного пространства

Определение 1. Множество L элементов $x, y, z, \ldots$ называется линейным пространством, если:

a) имеется правило, посредством которого любым двум элементам x и y множества R ставится в соответствие третий элемент z этого множества, называемый <u>суммой</u> элементов x и y и обозначаемый через $x + y$;

b) Каждому элементу x и каждому числу λ из некоторого поля поставлен в соответствие элемент λx, называемый <u>произведением числа</u> λ на элемент x;

Эти две операции должны удовлетворять следующим требованиям (аксиомам):

A. 1) $x + y = y + x$ (коммутативность);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность);

3) Существует нулевой элемент $\mathbf{0}$ такой, что $x + \mathbf{0} = x$;

4) Для каждого элемента существует противоположный элемент, обозначаемый через $-x$, такой, что $x + (-x) = \mathbf{0}$.

B. 5) $1 \cdot x = x$;

6) $\alpha(\beta x) = \alpha\beta(x)$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Евклидово пространство

Определение 1. Будем говорить, что в вещественном пространстве R определено **скалярное произведение**, если каждой паре $x, y \in R$ поставлено в соответствие действительное число, которое обозначим через (x, y), причем это соответствие обладает следующими свойствами:

1) $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);
2) $(\lambda x, y) = \lambda(y, x)$, где λ – дейст. число;
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (дистрибутивность скалярного произведения);
4) $(x, x) \geq 0$ и равно нулю только тогда, когда $x = \mathbf{0}$.

Вещественное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, удовлетворяющее условиям 1)-4) называют евклидовым пространством.

Определение 2. Длиной вектора x в евклидовом пространстве называется число $\sqrt{(x, x)}$, обозначаемое через $|x|$.

Пример 1. Для «обычных» векторов x и y из элем. геометрии определим скалярное произведение как $(x, y) = |x||y| \cos \alpha$ (α − угол между ними). Можно доказать, что условия 1)-4) выполнятся для такого произведения.

Примеры ск. произведения

Зададимся некоторой матрицей $\|a_{ik}\|$. Скалярное произведение векторов x и y определим формулой

$$
\begin{aligned}
(x, y) = a_{11}\xi_1\eta_1 + a_{12}\xi_1\eta_2 + \ldots + a_{1n}\xi_1\eta_n + \\
+ a_{21}\xi_2\eta_1 + a_{22}\xi_2\eta_2 + \ldots + a_{2n}\xi_2\eta_n + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ a_{n1}\xi_n\eta_1 + a_{n2}\xi_n\eta_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n\eta_n.
\end{aligned} \quad (1)
$$

Посмотрим, какие условия нужно наложить на матрицу $\|a_{ik}\|$, чтобы выражение, определяемое формулой (1), действительно удовлетворяло всем аксиомам скалярного произведения.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что аксиомы 2° и 3° выполнены для всякой матрицы $\|a_{ik}\|$. Для того чтобы была выполнена аксиома 1°, т. е. чтобы выражение (x, y) было симметричным относительно x и y, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad (2)$$

т. е. чтобы матрица $\|a_{ik}\|$ была симметричной.

Аксиома 4° требует, чтобы выражение

$$(x,\ x)=\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \tag{3}$$

было неотрицательно для любых $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ и обращалось в нуль, лишь если $\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_n=0$.

Однородный многочлен («квадратичная форма»), определяемый формулой (3), называется *положительно определенным*, если он принимает лишь неотрицательные значения и обращается в нуль, лишь когда все ξ_i равны нулю. Аксиома 4° требует, следовательно, чтобы квадратичная форма (3) была положительно определенной.

Итак, всякая матрица $\|a_{ik}\|$ задает скалярное произведение, определяемое формулой (1), если только эта матрица симметрична [условие (2)] и соответствующая ей квадратичная форма — положительно определенная.

Евклидово пространство

Пример 2. Для двух векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ сложение и умножение на число определим след. образом:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \text{ и}$$

$$ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

Скалярное произведение определим формулой

$$(x, y) = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n).$$

Можно доказать, что такое произведение есть скалярное.

Пример 3. Пусть $R = l^2$- лин. пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$.

Следующе произведение есть скалярное произведение:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, y_n.$$

Определение 3. Угол между двумя векторами x и y определяют как

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}.$$

Напомним

1) Два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ параллельны ($\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$), если они линейно зависимы: $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$.

2) Два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$, т.е. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Ортогональность векторов обозначают как $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Теорема 2. Если два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны, то

$$|\mathbf{y} + \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2.$$

Действительно, поскольку для орт. векторов $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$|\mathbf{y} + \mathbf{x}|^2 = (\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + \mathbf{2}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2.$$

Теорема 2'. (Следствие из теоремы 2). Для попарно ортогональных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ верно

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y} + \dots + \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + \dots + |\mathbf{z}|^2.$$

Заметка. Из $-1 \le \cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|x||y|} \le 1$, следует **неравенство Коши-Буняковского**:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \le |\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Напомним

- Вопрос? Почему $-1 \leq \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \leq 1$? Докажем неравенство Коши-Буняковского.

Пусть k – вещественное число. Тогда

$(\mathbf{x} - k\mathbf{y}, \mathbf{x} - k\mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$,

$$k^2(\mathbf{y},\mathbf{y}) - 2k(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0. \quad (1)$$

Дискриминант квадр. уравнения

$$k^2(\mathbf{y},\mathbf{y}) - 2k(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$$

согласно неравенству (1) не может быть положительным (т.е. значение *f(k)* (левой части по *k*) всегда больше или равно нулю):

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 - (\mathbf{x},\mathbf{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \leq 0 \Longrightarrow -1 \leq \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \leq 1$$

Лемма. $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

Доказательство. $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^{\mathbf{2}} = (\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) + \mathbf{2}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.
Согласно нерав. Коши $\mathbf{2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \mathbf{2}|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq \mathbf{2}|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ получим

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^{\mathbf{2}} \leq |\mathbf{x}|^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^{\mathbf{2}} = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^{\mathbf{2}} \Longrightarrow |\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Скалярное произведение и ортогональный базис

- В евклидовом пространстве расстояние между векторами $x, y \in R$ определяют как $d = |x - y|$.

Определение 2. Говорят, что n векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ ни один из которых не равен нулю, образуют **ортогональный базис** в n–мерном евклидовом пространстве R, если они попарно ортогональны. Векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют **ортонормированный базис**, если они попарно ортогональны и имеют каждый длину 1, т.е.

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Процесс ортогонализации

Лемма 1. Для любого n-мерного пространства существует ортогональный базис.

Доказательство. Докажем конструктивно, построив ортогональный базис. Для этого фиксируем произвольную данную систему линейно независимых векторов

$$f_1, f_2, \dots, f_n.$$

Из него построим попарно ортогональные векторы

$$e_1, e_2, \dots, e_n.$$

Положим $e_1 = f_1$. Вектор e_2 ищем в виде $e_2 = f_2 + a e_1$. Число a подберем так, чтобы $(e_2, e_1) = 0$, т. е. $a = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$

Предположим, что попарно ортогональные векторы $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ уже построены. Тогда находим вектор

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1}.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ находим из условия ортогональности вектора e_k к векторам $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$:

$$\lambda_1 = -\frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)}, \quad \ldots, \lambda_{k-1} = -\frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})}.$$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта (Хорн, Джонсон)

Всегда из данного линейно независимых векторов

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

можно построить попарно ортонормированные векторы

$$e_1, e_2, \dots, e_n.$$

Положим $y_1 = f_1$ и $e_1 = \frac{y_1}{|y_1|}$. Далее вычисляем вектор

$y_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1$ и положим $e_2 = \frac{y_2}{|y_2|}$.

Предположим, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ уже построены. Тогда находим вектор

$$y_k = f_k - (f_k, e_{k-1})e_{k-1} - (f_k, e_{k-2})e_{k-2} - \cdots - (f_k, e_1)e_1.$$

Далее, определяем $e_k = \frac{y_k}{|y_k|}$.

Процесс продолжаем до тех пор, пока не получим искомую ортонормированную систему.

Пример ортогонализации Грама-Шмидта (Хорн, Джонсон)

Теорема 1. Для любого n-мерного пространства существует ортонормированный базис.

Доказательство следует из леммы 1. Достаточно нормировать полученные в лемме 1 векторы.

Пример. $f_1 = (-2, 1, 0)$; $f_2 = (-2, 0, 1)$; $f_3 = (-1, -2, 2)$.

Для данного набора векторов построить ортонормированный базис, если они лин. независимы.

Проверим, являются ли эти векторы лин. независимыми:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 4 = -1, \text{т. е. векторы лин. независимы.}$$

$$e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0);\ y_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1 = (-0.4,\ -0.8,\ 1);$$

$$e_2 = \frac{y_2}{|y_2|} = \frac{2}{3\sqrt{5}}(-1, -2, 2.5);$$

$$y_3 = f_3 - (f_3, e_2)e_2 - (f_3, e_1)e_1 = -\frac{1}{9}(1, 2, 2);$$

$$e_3 = \frac{y_3}{|y_3|} = -\frac{1}{3}(1, 2, 2).$$

Ортогональность подпространству

- **Определение 3**. Пусть R' - подпространство эвклидова пространства. Говорят, что вектор $h \in R$ ортогонален подпространству R', если он ортогонален любому вектору x из R'.

Расстояние от вектора до линейной оболочки (подпространства)

- Определение 3. Пусть R_1 - подпространство евклидова пространства R. Говорят, что вектор $h \in R$, ортогонален подпространству R_1, если он ортогонален любому вектору x из R_1.

Утверждение 1. Для того, чтобы вектор h был ортогонален m-мерному подпространству R', достаточно, чтобы он был ортогонален m линейно независимым векторам из R'.

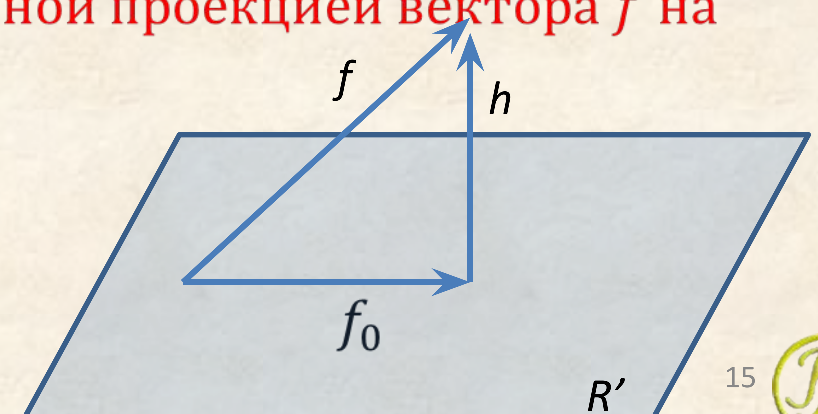
Используя Утверждение 1 решим следующую задачу.

Пусть R_1 - m- мерный подпространство n-мерного пространства R.

Рассмотрим вектор f, не принадлежащий R_1.

Поставим задачу: найти вектор f_0 из R_1, такой чтобы вектор $h = f - f_0$ был ортогонален R_1.

Вектор f_0 из R_1 называется ортогональной проекцией вектора f на подпространство R_1.



Расстояние от вектора до подпространства

- Пусть $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ – базис пространства R_1.

А теперь покажем, как для вектора фактически вычислить ортогональную проекцию f_0 и расстояние $|h|$ от вектора f до подпространства R_1.

Будем искать вектор в виде

$$f_0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_m e_m \qquad (2),$$

где коэффициенты c_i найдем из условия ортогональности $f - f_0$.

Для того, чтобы эта ортогональность имела место, должны выполняться m равенств $(f - f_0, e_i) = 0, \ (i = 1, \dots, m)$.

(2) перепишем:

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_m e_m = f - h \qquad (3).$$

Выражение (3) «по очереди» умножив на e_i $(i = 1, \dots, k)$ и в силу $(h, e_i) = 0$ получим k уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} c_1(e_1, e_1) + c_2(e_2, e_1) + \dots + c_m(e_m, e_1) = (f, e_1) \\ c_1(e_1, e_2) + c_2(e_2, e_2) + \dots + c_m(e_m, e_2) = (f, e_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1(e_1, e_m) + c_2(e_2, e_m) + \dots + c_m(e_m, e_m) = (f, e_m) \end{array}\right\} \qquad (4)$$

- Задача решается просто, если $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ – ортогональный базис. Тогда

$$c_i = (f, e_i).$$

Для произвольного базиса (4) состоит из m уравнений и определитель ее матрицы

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & \dots & (e_m, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & \dots & (e_m, e_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (e_1, e_m) & (e_2, e_m) & \dots & (e_m, e_m) \end{vmatrix}$$

– матрицы **Грама,** не равен нулю. В таком случае (4) также имеет единственное решение $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ и f_0 мы однозначно находим по формуле (2).

Как «побочный» результат мы также определяем вектор

$$h = f - f_0$$

и **расстояние** $|h|$ от f до R_1.

Расстояние от вектора до подпространства

- Рассмотрим, примеры вычисления расстояния от некоторого вектора до подпространства.

Пример 1.

Найти расстояние между вектором f и подпространством $\mathrm{Span}(y_1, y_2, y_3)$: $f = (14, -3, -6, -7)$, $y_1 = (-3, 0, 7, 6)$, $y_2 = (1, 4, 3, 2)$, $y_3 = (2, 2, -2, -2)$.

Сперва определяем размерность $\mathrm{Span}(y_1, y_2, y_3)$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 12 & 16 & 12 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 12 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, размерность $\mathrm{Span}(y_1, y_2, y_3)$ равна 2.

Расстояние от вектора до подпространства

- Пусть $f = h + f_0$, где h вектор, ортогональный оболочке $\mathrm{Span}(y_1, y_2, y_3)$. А вектор f_0 – проекция вектора f на $\mathrm{Span}(y_1, y_2, y_3)$.

Поскольку размерность $\mathrm{Span}(y_1, y_2, y_3)$ равна 2, находим f_0 по (2):

$$f_0 = f - h = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Далее применяем системы (4):

$$\left.\begin{aligned} c_1(y_1, y_1) + c_2(y_2, y_1) = (f, y_1) \\ c_1(y_1, y_2) + c_2(y_2, y_2) = (f, y_2) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 94c_1 + 30c_2 = -126 \\ 30c_1 + 30c_2 = -30 \end{aligned}\right\}.$$

Находим: $c_1 = -1.5$; $c_2 = 0.5$;

$f_0 = -1.5(-3, 0, 7, 6) + 0.5(1, 4, 3, 2) = (5, 2, -9, -8)$;

$h = f - f_0 = (9, -5, 3, 1)$. Значит, расстояние между вектором f и подпространством равно $\sqrt{81 + 25 + 9 + 1} = \sqrt{126}$.

- Если же базис произволен, то коэффициенты определяются как решение системы (4).

Пример 2. Способ наименьших квадратов.

Пусть величина y есть линейная функция величин $x_1, \dots, x_m$:

$$y = c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m,$$

где c_i - постоянные, неизвестные нам коэффициенты (нашли экспериментально). Коэффициенты можно было бы найти из системы

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}c_1 + x_{21}c_2 + \dots + x_{m1}c_m = y_1, \\ x_{12}c_1 + x_{22}c_2 + \dots + x_{m2}c_m = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n}c_1 + x_{2n}c_2 + \dots + x_{mn}c_m = y_n. \end{array}\right\}$$

где число уравнений n больше числа неизвестных m.

Система может быть несовместной, поскольку величины связаны с погрешностью.

Находится приближенное решение, минимизирующее выражение

$$\sum_{k=1}^{n} (x_{1k}c_1 + x_{2k}c_2 + \dots + x_{mk}c_m - y_k)^2. \qquad (1)$$

Этот метод называется методом наименьших квадратов

- Для этого предполагается, что векторы-наблюдения

$$e_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}),$$
$$e_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n}),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$e_m = (x_{m1}, \dots, x_{mn}),$$

линейно независимые.

В этом, случае выражение (1) можно рассмотреть как квадрат расстояния вектора $f_0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_m e_m$ от вектора f.

Тогда исходная система заменяется системой нормальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l}
(e_1, e_1) c_1 + (e_2, e_1) c_2 + \dots + (e_m, e_1) c_m = (f, e_1), \\
(e_1, e_2) c_1 + (e_2, e_2) c_2 + \dots + (e_m, e_2) c_m = (f, e_2), \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
(e_1, e_m) c_1 + (e_2, e_m) c_2 + \dots + (e_m, e_m) c_m = (f, e_m),
\end{array}\right\}$$

Данный метод называется **методом наименьших квадратов.**

Пример метода наименьших квадратов

- Пример 3. Дана система n уравнений одним неизвестным:

$$\begin{cases} x_1 c = y_1 \\ x_2 c = y_2 \\ \quad \dots \dots \\ x_n c = y_n. \end{cases}$$

Пусть $e_1 = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (y_1, \dots, y_n)$.

Тогда $c = \frac{(x,y)}{(x,x)}$.

Если

$$2c = 3,$$
$$3c = 4,$$
$$4c = 5.$$

то предполагаем, что $e_1 = (2, 3, 4)$, $f = (3, 4, 5)$. Тогда

$$c = \frac{2*3+3*4+4*5}{2^2+3^2+4^2} = \frac{38}{29}.$$

Скалярное произведение

Утверждение 1. В нормированном ортогональном базисе скалярное произведение двух векторов равное сумме произведений их соответствующих координат.

Упражнения. 1. Показать, что в произвольном базисе f_1, f_2, ..., f_n скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k,$$

где $a_{ik} = a_{ki}$, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — координаты векторов x и соответственно y.

2. Показать, что если в некотором базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n,$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — координаты векторов x и y, то этот базис является ортогональным и нормированным.

Пример

Пример 4. Пусть в результате эксперимента получена следующая функция от двух неизвестных c_1 и c_2.

$$y = x_1 c_1 + x_2 c_2.$$

Но, x_1 и x_2 определяются экспериментально и после трех измерений вместо x_1 и x_2 получаем два вектора и систему

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 1, \\ 3c_1 + 2c_2 = 4, \\ c_1 + 2c_2 = 2. \end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что система 1 несовместная. Т.е. не имеет решения.

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Положим: $e_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Тогда систему (1) можно переписать как

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = y. \tag{2}$$

Мы должны найти такие c_1 и c_2, что следующее выражение достигла минимального значения:

$$(2c_1 + c_2 - 1)^2 + (3c_1 + 2c_2 - 4)^2 + (c_1 + 2c_2 - 1)^2 .$$

Иначе говоря, найти приближенное решение системы (1).

Пример

- Скалярно умножим (2) сперва на e_1 , а потом на e_2:

$$\begin{cases}(e_1, e_1)c_1 + (e_2. e_1)c_2 = (y, e_1) \\ (e_2, e_1)c_1 + (e_2. e_2)c_2 = (y, e_2)\end{cases} \to \begin{cases}14c_1 + 10c_2 = 16 \\ 10c_1 + 9c_2 = 13.\end{cases} \qquad (3)$$

Решив последнюю систему, получим

$$c_1 = \frac{7}{13};\ c_1 = \frac{11}{13}.$$

Еще один подход для решения этого вопроса.

Если систему (1) представим в матричной форме, то мы получим:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}.$$

Тогда систему (3) также можно представить в следующей матричной форме

$$A^T A\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = A^T\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = (A^T A)^{-1}A^T\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix} \to A^+\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix}.$$

Домашняя работа

inner product – скалярное произведение

1. Check whether the function defined by equation (7.1) is an inner product for the matrices:
   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. Consider any two vectors

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\xi_1, \ldots, \xi_n), \\ \mathbf{y} &= (\eta_1, \ldots, \eta_n) \end{aligned}$$

   in $\mathbb{R}^n$. Check whether any of the following functions is an inner-product:

   (a) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} |\xi_i|\,|\eta_i|$; (b) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \xi_i^2 \eta_i^2$.
3. Consider the basis given by the vectors

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (1, 1, \ldots, 1, 1), \\ \mathbf{f}_2 &= (0, 1, \ldots, 1, 1), \\ &\vdots \\ \mathbf{f}_n &= (0, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

   Is this basis orthogonal? If not, construct an orthogonal basis using Gram-Schmidt process. For this basis, find the associated orthonormal basis.

Домашняя работа

6. Check whether the following vectors are orthogonal and complete them up to a basis for $\mathbb{R}^4$.
   (a) $\mathbf{f}_1 = (1, -2, 2, -3)$ and $\mathbf{f}_2 = (2, -3, 2, 4)$.
   (b) $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1, 2)$ and $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 3, -3)$.
7. Consider the Euclidean space $\mathbb{R}^4$. Find the angles between the line $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4$ and the vectors $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ and $e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

11. Find the distance between the vector $\mathbf{x} = (4, -1, -3, 4)$ and a linear subspace defined by the vectors

$$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1),$$
$$\mathbf{e}_2 = (1, 2, 2, -1),$$
$$\mathbf{e}_3 = (1, 0, 0, 3).$$

15. The market price (p) of some good in several dates are given in the following table:

Date	12 January	14 January	15 January	20 January
p	\$13.2	\$10.2	\$9.8	\$12.9

Using the least square approximation $p(x) = a + bx$ for the function p of the day x of the year, give your prognosis for the price p in January 27.

Домашняя работа