

**Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).**

# **Линейная алгебра**

## **Лекция 7**

**Агаев Рафиг Пашаевич**  
**(доктор физ.-мат. наук)**

# Евклидово пространство

- **Определение**
- **Свойства скалярного произведения**
- **Расстояние от вектора до подпространства**
- **Матрица Грама**
- **Метод наименьших квадратов**
- **и еще ...**

# Вспомним определение линейного пространства

**Определение 1.** Множество  $L$  элементов  $x, y, z, \dots$  называется линейным пространством, если:

- a) имеется правило, посредством которого любым двум элементам  $x$  и  $y$  множества  $R$  ставится в соответствие третий элемент  $z$  этого множества, называемый суммой элементов  $x$  и  $y$  и обозначаемый через  $x + y$ ;
- b) Каждому элементу  $x$  и каждому числу  $\lambda$  из некоторого поля поставлен в соответствие элемент  $\lambda x$ , называемый произведением числа  $\lambda$  на элемент  $x$ ;

Эти две операции должны удовлетворять следующим требованиям (аксиомам):

- A. 1)  $x + y = y + x$  (коммутативность);
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (ассоциативность);
- 3) Существует нулевой элемент  $\mathbf{0}$  такой, что  $x + \mathbf{0} = x$ ;
- 4) Для каждого элемента существует противоположный элемент, обозначаемый через  $-x$ , такой, что  $x + (-x) = \mathbf{0}$ .
- B. 5)  $1 \cdot x = x$ ;
- 6)  $\alpha(\beta x) = \alpha\beta(x)$ ;
- 7)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;
- 8)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .

# Евклидово пространство

**Определение 1.** Будем говорить, что в вещественном пространстве  $R$  определено **скалярное произведение**, если каждой паре  $x, y \in R$  поставлено в соответствие действительное число, которое обозначим через  $(x, y)$ , причем это соответствие обладает следующими свойствами:

- 1)  $(x, y) = (y, x)$  (симметричность);
- 2)  $(\lambda x, y) = \lambda(y, x)$ , где  $\lambda$  – дейст. число;
- 3)  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$  (дистрибутивность скалярного произведения);
- 4)  $(x, x) \geq 0$  и равно нулю только тогда, когда  $x = 0$ .

**Вещественное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, удовлетворяющее условиям 1)-4) называют евклидовым пространством.**

**Определение 2.** **Длиной вектора**  $x$  в евклидовом пространстве называется число  $\sqrt{(x, x)}$ , обозначаемое через  $|x|$ .

**Пример 1.** Для «обычных» векторов  $x$  и  $y$  из элем. геометрии определим скалярное произведение как  $(x, y) = |x||y| \cos \alpha$  ( $\alpha$  – угол между ними). Можно доказать, что условия 1)-4) выполняются для такого произведения.







Аксиома 4° требует, чтобы выражение

$$(x, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \quad (3)$$

было неотрицательно для любых  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  и обращалось в нуль, лишь если  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ .

Однородный многочлен («квадратичная форма»), определяемый формулой (3), называется *положительно определенной*, если он принимает лишь неотрицательные значения и обращается в нуль, лишь когда все  $\xi_i$  равны нулю. Аксиома 4° требует, следовательно, чтобы квадратичная форма (3) была положительно определенной.

Итак, всякая матрица  $\|a_{ik}\|$  задает скалярное произведение, определяемое формулой (1), если только эта матрица симметрична [условие (2)] и соответствующая ей квадратичная форма — положительно определенная.

## Евклидово пространство

**Пример 2.** Для двух векторов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  сложение и умножение на число определим след. образом:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ и}$$

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

Скалярное произведение определим формулой

$$(x, y) = (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n).$$

Можно доказать, что такое произведение есть скалярное.

**Пример 3.** Пусть  $R = l^2$ - лин. пространство последовательностей  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , удовлетворяющих условию  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ .

Следующее произведение есть скалярное произведение:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

**Определение 3.** Угол между двумя векторами  $x$  и  $y$  определяют как

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}.$$





## Напомним

1) Два вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  **параллельны** ( $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$ ), если они линейно зависимы:  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ .

2) Два вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  **ортогональны**, если угол между ними равен  $\frac{\pi}{2}$ , т.е.  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ . Ортогональность векторов обозначают как  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ .

**Теорема 2.** Если два вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  ортогональны, то

$$|\mathbf{y} + \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2.$$

Действительно, поскольку для орт. векторов  $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$

$$|\mathbf{y} + \mathbf{x}|^2 = (\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + 2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = |\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2.$$

**Теорема 2'. (Следствие из теоремы 2).** Для попарно ортогональных векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  верно

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y} + \dots + \mathbf{z}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + \dots + |\mathbf{z}|^2.$$

**Заметка.** Из  $-1 \leq \cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} \leq 1$ , следует **неравенство**

**Коши-Буняковского:**

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq |\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$



## Напомним

**Вопрос?** Почему  $-1 \leq \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \leq 1$ ? Докажем неравенство Коши-Буняковского.

Пусть  $k$  – вещественное число. Тогда

$$(\mathbf{x} - k\mathbf{y}, \mathbf{x} - k\mathbf{y}) \geq 0,$$

$$k^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - 2k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0. \quad (1)$$

Дискриминант квадр. уравнения

$$k^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - 2k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$$

согласно неравенству (1) не может быть положительным (т.е. значение  $f(k)$  (левой части по  $k$ ) всегда больше или равно нулю):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \leq 1$$

**Лемма.**  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ .

**Доказательство.**  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Согласно нерав. Коши  $2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$  получим

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 \leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2 \Rightarrow |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

## Скалярное произведение и ортогональный базис

- В евклидовом пространстве расстояние между векторами  $x, y \in R$  определяют как  $d = |x - y|$ .

**Определение 2.** Говорят, что  $n$  векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ни один из которых не равен нулю, образуют **ортогональный базис** в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R$ , если они попарно ортогональны. Векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют **ортонормированный базис**, если они попарно ортогональны и имеют каждый длину 1, т.е.

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$



# Процесс ортогонализации

**Лемма 1.** Для любого  $n$ -мерного пространства существует ортогональный базис.

**Доказательство.** Докажем конструктивно, построив ортогональный базис. Для этого фиксируем произвольную данную систему линейно независимых векторов

$$f_1, f_2, \dots, f_n.$$

Из него построим попарно ортогональные векторы

$$e_1, e_2, \dots, e_n.$$

Положим  $e_1 = f_1$ . Вектор  $e_2$  ищем в виде  $e_2 = f_2 + ae_1$ . Число  $a$  подберем так, чтобы  $(e_2, e_1) = 0$ , т. е.  $a = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$

Предположим, что попарно ортогональные векторы  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  уже построены. Тогда находим вектор

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1}.$$

Числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$  находим из условия ортогональности вектора  $e_k$  к векторам  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ :

$$\lambda_1 = -\frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)}, \quad \dots, \quad \lambda_{k-1} = -\frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})}.$$





## Процесс ортогонализации Грама-Шмидта (Хорн, Джонсон)

Всегда из данного линейно независимых векторов

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

можно построить попарно ортонормированные векторы

$$e_1, e_2, \dots, e_n.$$

Положим  $y_1 = f_1$  и  $e_1 = \frac{y_1}{|y_1|}$ . Далее вычисляем вектор

$$y_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1 \text{ и положим } e_2 = \frac{y_2}{|y_2|}.$$

Предположим, что векторы  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  уже построены. Тогда находим вектор

$$y_k = f_k - (f_k, e_{k-1})e_{k-1} - (f_k, e_{k-2})e_{k-2} - \dots - (f_k, e_1)e_1.$$

Далее, определяем  $e_k = \frac{y_k}{|y_k|}$ .

Процесс продолжаем до тех пор, пока не получим искомую ортонормированную систему.



## Пример ортогонализации Грама-Шмидта (Хорн, Джонсон)

**Теорема 1.** Для любого  $n$ -мерного пространства существует ортонормированный базис.

Доказательство следует из леммы 1. Достаточно нормировать полученные в лемме 1 векторы.

**Пример.**  $f_1 = (-2, 1, 0)$ ;  $f_2 = (-2, 0, 1)$ ;  $f_3 = (-1, -2, 2)$ .

Для данного набора векторов построить ортонормированный базис, если они лин. независимы.

Проверим, являются ли эти векторы лин. независимыми:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 4 = -1, \text{ т. е. векторы лин. независимы.}$$

$$e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0); \quad y_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1 = (-0.4, -0.8, 1);$$

$$e_2 = \frac{y_2}{|y_2|} = \frac{2}{3\sqrt{5}}(-1, -2, 2.5);$$

$$y_3 = f_3 - (f_3, e_2)e_2 - (f_3, e_1)e_1 = -\frac{1}{9}(1, 2, 2);$$

$$e_3 = \frac{y_3}{|y_3|} = -\frac{1}{3}(1, 2, 2).$$

## Ортогональность подпространству

**Определение 3.** Пусть  $R'$  - подпространство эвклидова пространства. Говорят, что вектор  $h \in R$  ортогонален подпространству  $R'$ , если он ортогонален любому вектору  $x$  из  $R'$ .



## Расстояние от вектора до линейной оболочки (подпространства)

**Определение 3.** Пусть  $R_1$  - подпространство евклидова пространства  $R$ . Говорят, что вектор  $h \in R$ , ортогонален подпространству  $R_1$ , если он ортогонален любому вектору  $x$  из  $R_1$ .

**Утверждение 1.** Для того, чтобы вектор  $h$  был ортогонален  $m$ -мерному подпространству  $R'$ , достаточно, чтобы он был ортогонален  $m$  линейно независимым векторам из  $R'$ .

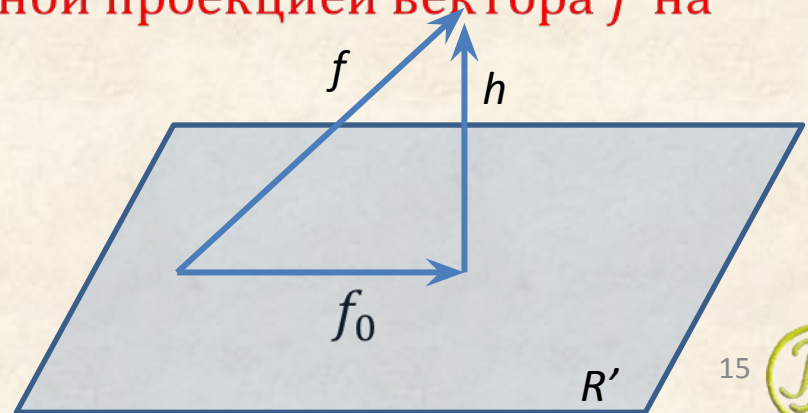
Используя Утверждение 1 решим следующую задачу.

Пусть  $R_1$  -  $m$ -мерный подпространство  $n$ -мерного пространства  $R$ .

Рассмотрим вектор  $f$ , не принадлежащий  $R_1$ .

**Поставим задачу:** найти вектор  $f_0$  из  $R_1$ , такой чтобы вектор  $h = f - f_0$  был ортогонален  $R_1$ .

Вектор  $f_0$  из  $R_1$  называется ортогональной проекцией вектора  $f$  на подпространство  $R_1$ .





Задача решается просто, если  $(e_1, e_2, \dots, e_m)$  – ортогональный базис. Тогда

$$c_i = (f, e_i).$$

Для произвольного базиса (4) состоит из  $m$  уравнений и определитель ее матрицы

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & \dots & (e_m, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & \dots & (e_m, e_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (e_1, e_m) & (e_2, e_m) & \dots & (e_m, e_m) \end{vmatrix}$$

– матрицы **Грама**, не равен нулю. В таком случае (4) также имеет единственное решение  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  и  $f_0$  мы однозначно находим по формуле (2).

Как «побочный» результат мы также определяем вектор

$$h = f - f_0$$

и **расстояние**  $|h|$  от  $f$  до  $R_1$ .



## Расстояние от вектора до подпространства

Рассмотрим, примеры вычисления расстояния от некоторого вектора до подпространства.

### Пример 1.

Найти расстояние между вектором  $f$  и подпространством

$\text{Span}(y_1, y_2, y_3)$ :  $f = (14, -3, -6, -7)$ ,  $y_1 = (-3, 0, 7, 6)$ ,  
 $y_2 = (1, 4, 3, 2)$ ,  $y_3 = (2, 2, -2, -2)$ .

Сперва определяем размерность  $\text{Span}(y_1, y_2, y_3)$ :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 12 & 16 & 12 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 12 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, размерность  $\text{Span}(y_1, y_2, y_3)$  равна 2.



## Расстояние от вектора до подпространства

Пусть  $f = h + f_0$ , где  $h$  вектор, ортогональный оболочке  $\text{Span}(y_1, y_2, y_3)$ . А вектор  $f_0$  – проекция вектора  $f$  на  $\text{Span}(y_1, y_2, y_3)$ .

Поскольку размерность  $\text{Span}(y_1, y_2, y_3)$  равна 2, находим  $f_0$  по (2):

$$f_0 = f - h = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Далее применяем систему (4):

$$\left. \begin{array}{l} c_1(y_1, y_1) + c_2(y_2, y_1) = (f, y_1) \\ c_1(y_1, y_2) + c_2(y_2, y_2) = (f, y_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 94c_1 + 30c_2 = -126 \\ 30c_1 + 30c_2 = -30 \end{array} \right\}.$$

Находим:  $c_1 = -1.5$ ;  $c_2 = 0.5$ ;

$$f_0 = -1.5(-3, 0, 7, 6) + 0.5(1, 4, 3, 2) = (5, 2, -9, -8);$$

$h = f - f_0 = (9, -5, 3, 1)$ . Значит, расстояние между вектором  $f$  и подпространством равно  $\sqrt{81 + 25 + 9 + 1} = \sqrt{126}$ .









## Пример метода наименьших квадратов

● **Пример 3.** Дана система  $n$  уравнений одним неизвестным:

$$\begin{cases} x_1 c = y_1 \\ x_2 c = y_2 \\ \dots \dots \\ x_n c = y_n. \end{cases}$$

Пусть  $e_1 = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f = (y_1, \dots, y_n)$ .

Тогда  $c = \frac{(x,y)}{(x,x)}$ .

Если

$$\begin{aligned} 2c &= 3, \\ 3c &= 4, \\ 4c &= 5. \end{aligned}$$

то предполагаем, что  $e_1 = (2, 3, 4)$ ,  $f = (3, 4, 5)$ . Тогда

$$c = \frac{2*3+3*4+4*5}{2^2+3^2+4^2} = \frac{38}{29}.$$

# Скалярное произведение

**Утверждение 1.** В нормированном ортогональном базисе скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.

**У п р а ж н е н и я.** 1. Показать, что в произвольном базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$  скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k,$$

где  $a_{ik} = a_{ki}$ , а  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  и  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  — координаты векторов  $x$  и соответственно  $y$ .

2. Показать, что если в некотором базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$  скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n,$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  и  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  — координаты векторов  $x$  и  $y$ , то этот базис является ортогональным и нормированным.



# Пример

**Пример 4.** Пусть в результате эксперимента получена следующая функция от двух неизвестных  $c_1$  и  $c_2$ .

$$y = x_1 c_1 + x_2 c_2.$$

Но,  $x_1$  и  $x_2$  определяются экспериментально и после трех измерений вместо  $x_1$  и  $x_2$  получаем два вектора и систему

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 1, \\ 3c_1 + 2c_2 = 4, \\ c_1 + 2c_2 = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что система 1 несовместная. Т.е. не имеет решения.

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Положим: } e_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно переписать как

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = y. \quad (2)$$

Мы должны найти такие  $c_1$  и  $c_2$ , что следующее выражение достигла минимального значения:

$$(2c_1 + c_2 - 1)^2 + (3c_1 + 2c_2 - 4)^2 + (c_1 + 2c_2 - 2)^2.$$

Иначе говоря, найти приближенное решение системы (1).

## Пример

● скалярно умножим (2) сперва на  $e_1$ , а потом на  $e_2$ :

$$\begin{cases} (e_1, e_1)c_1 + (e_2, e_1)c_2 = (y, e_1) \\ (e_2, e_1)c_1 + (e_2, e_2)c_2 = (y, e_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14c_1 + 10c_2 = 16 \\ 10c_1 + 9c_2 = 13. \end{cases} \quad (3)$$

Решив последнюю систему, получим

$$c_1 = \frac{7}{13}; \quad c_2 = \frac{11}{13}.$$

Еще один подход для решения этого вопроса.

Если систему (1) представим в матричной форме, то мы получим:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда систему (3) также можно представить в следующей матричной форме

$$A^T A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

# Домашняя работа

## inner product – скалярное произведение

1. Check whether the function defined by equation (7.1) is an inner product for the matrices:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Consider any two vectors

$$\mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n),$$
$$\mathbf{y} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$$

in  $\mathbb{R}^n$ . Check whether any of the following functions is an inner-product:

$$(a) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n |\xi_j| |\eta_j|; \quad (b) (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \eta_j^2.$$

3. Consider the basis given by the vectors

$$\mathbf{f}_1 = (1, 1, \dots, 1, 1),$$
$$\mathbf{f}_2 = (0, 1, \dots, 1, 1),$$
$$\dots \cdot \quad \cdot$$
$$\dots \cdot \quad \cdot$$
$$\dots \cdot \quad \cdot$$
$$\mathbf{f}_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Is this basis orthogonal? If not, construct an orthogonal basis using Gram-Schmidt process. For this basis, find the associated orthonormal basis.



## Домашняя работа

6. Check whether the following vectors are orthogonal and complete them up to a basis for  $\mathbb{R}^4$ .
- (a)  $f_1 = (1, -2, 2, -3)$  and  $f_2 = (2, -3, 2, 4)$ .
- (b)  $f_1 = (1, 1, 1, 2)$  and  $f_1 = (1, 2, 3, -3)$ .
7. Consider the Euclidean space  $\mathbb{R}^4$ . Find the angles between the line  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4$  and the vectors  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$  and  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ .
11. Find the distance between the vector  $x = (4, -1, -3, 4)$  and a linear subspace defined by the vectors

$$e_1 = (1, 1, 1, 1),$$

$$e_2 = (1, 2, 2, -1),$$

$$e_3 = (1, 0, 0, 3).$$

15. The market price ( $p$ ) of some good in several dates are given in the following table:

Date	12 January	14 January	15 January	20 January
$p$	\$13.2	\$10.2	\$9.8	\$12.9

Using the least square approximation  $p(x) = a + bx$  for the function  $p$  of the day  $x$  of the year, give your prognosis for the price  $p$  in January 27.

# Домашняя работа