

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+12}{n+11} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{12}{n}}{1 + \frac{11}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{5-3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{5}{n} - 3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^5 - 100n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^5}}{1 - \frac{100}{n^4} - \frac{1}{n^5}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^4 - 100n^2 - 100) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 * \left(1 - \frac{100}{n^2} - \frac{100}{n^4}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 * \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{100}{n^2} - \frac{100}{n^4}\right) = +\infty * 1 = +\infty$$

## Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

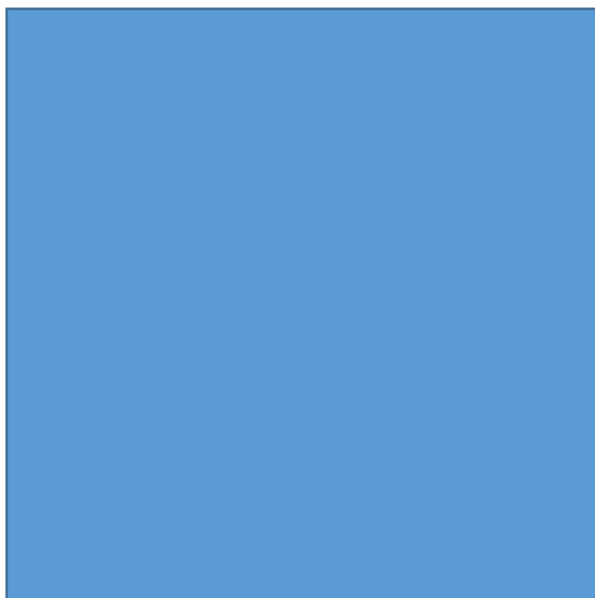
$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}, \dots$  ( $a \neq 0, q \neq 0$ )

если  $q \neq 1$

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} q^n$$

если  $|q| < 1$ , при  $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} q^n \right) = \frac{a}{1 - q}$$



4.38

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

$$q = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$q = \frac{1}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$q = -\frac{1}{2} \div 1 = -\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$q = 0.1$$

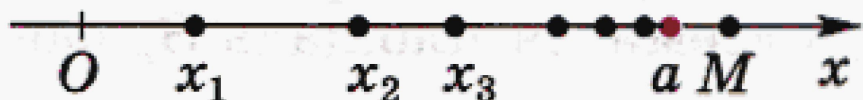
$$S = \frac{0.1}{1 - 0.1} = \frac{1}{9}$$

Число

$\epsilon$

$x_n$  ограничена сверху числом  $M$ , если неравенство  $x_n \leq M$  выполняется для любых  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; переменная  $x_n$  не убывает если  $x_n \leq x_{n+1}$

**ТЕОРЕМА 1.** Если переменная  $x_n$  не убывает и ограничена сверху числом  $M$ , то она имеет предел, равный некоторому числу  $a$ , не превышающему  $M$ :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \leq M$ .



**ПРИМЕР 1.** Переменная  $x_n = \frac{n}{n+1}$  не убывает, потому что  $x_n = \frac{n}{n+1} \leq x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ ; она ограничена сверху числом 1.

Переменная  $x_n$  имеет предел, равный 1:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

$x_n$  ограничена снизу числом  $m$ , если нер – во  $m \leq x_n$  выполняется для любых  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; переменная  $x_n$  не возрастает, если  $x_n \geq x_{n+1}$

**ТЕОРЕМА 2.** Если переменная  $x_n$  не возрастает и ограничена снизу числом  $m$ , то она имеет предел, равный некоторому числу  $A$ , не меньшему  $m$ :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A \geq m$ .

**ПРИМЕР 2.** Если  $0 < q < 1$ , то переменная  $q^n$  убывает ( $q^{n+1} < q^n$ ) и ограничена снизу числом  $0$  ( $0 < q^n$ ). Поэтому на основании теоремы 2 существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = A \geq 0.$$

**ПРИМЕР 3.** Рассмотрим переменную  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).  
Она имеет предел.

$e = 2.718281828$

...

4.47

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n-2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{2}{n}}{1} = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n-2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{5}{1} = 5$$

Домашнее  
задание

---

1. а) Представьте переменную  $x_n = \frac{5n + 2}{n}$  в виде суммы числа и бесконечно малой.

б) Чему равен  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ?

2. Пользуясь свойствами пределов, вычислите предел:

а)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n + 2}{n}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 5n - 7}{2n^2 - n + 4}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - n + 7}{n^3 + 3n + 2}$ ;

г)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 - n + 13}{n^2 + 7n - 1}$ ;



Пусть дана геометрическая прогрессия  $(b_n)$ . Обозначим сумму первых  $n$  ее членов через  $S_n$ :

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n. \quad (1)$$

Умножим обе части этого равенства на  $q$ :

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \dots + b_{n-1} q + b_n q.$$

Учитывая, что

$$b_1 q = b_2, \quad b_2 q = b_3, \quad b_3 q = b_4, \quad \dots, \quad b_{n-1} q = b_n,$$

получим

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + b_n q. \quad (2)$$

Вычтем почленно из равенства (2) равенство (1) и приведем подобные члены:

$$S_n q - S_n = (b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_n q) - (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n) = b_n q - b_1,$$

$$S_n (q - 1) = b_n q - b_1.$$

Отсюда следует, что при  $q \neq 1$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}. \quad (I)$$