$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+12}{n+11}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{12}{n}}{1+\frac{11}{n}}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{5-3n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\frac{5}{n}-3}=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-3n^2+1}{n^5-100n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^5}}{1-\frac{100}{n^4}-\frac{1}{n^5}}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n^4-100n^2-100)=\lim_{n\to+\infty}n^4*\left(1-\frac{100}{n^2}-\frac{100}{n^4}\right)=\lim_{n\to+\infty}n^4*\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{100}{n^2}-\frac{100}{n^4}\right)=+\infty*1=+\infty$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}, \dots \ (a \neq 0, q \neq 0)$$

$$\text{если } q \neq 1$$

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} q^n$$

$$\text{если } |q| < 1, \text{при } n \to +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} q^n \right) = \frac{a}{1 - q}$$

4.38

$$S = \frac{a}{1-q}$$

$$q = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$q = \frac{1}{9} : \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$q = -\frac{1}{2} : 1 = -\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

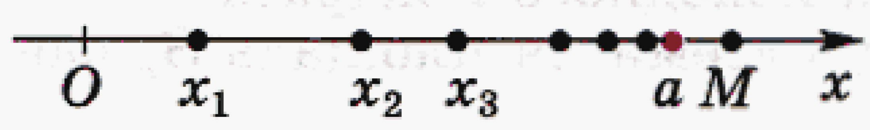
$$q = 0.1$$

$$S = \frac{0.1}{1-0.1} = \frac{1}{9}$$

Число
е

x_n ограничена сверху числом М, если нер − во $x_n \le M$ выполняется для любых $n = 1, 2, 3, \ldots$; переменная x_n не убывает если $x_n \le x_{n+1}$

ТЕОРЕМА 1. Если переменная x_n не убывает и ограничена сверху числом M, то она имеет предел, равный некоторому числу a, не превышающему M: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \leqslant M$.



ПРИМЕР 1. Переменная $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ не убывает, потому что $x_n = \dfrac{n}{n+1} \leqslant x_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$; она ограничена сверху числом 1.

Переменная x_n имеет предел, равный 1:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

x_n ограничена снизу числом m, если нер − во $m \leq x_n$ выполняется для любых $n = 1, 2, 3, \dots$; переменная x_n невозрастает, если $x_n \geq x_{n+1}$

ТЕОРЕМА 2. **Если переменная x_n не возрастает и ограничена снизу числом m, то она имеет предел, равный некоторому числу A, не меньшему m:** $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = A \geqslant m$.

ПРИМЕР 2. Если $0 < q < 1$, то переменная q^n убывает ($q^{n+1} < q^n$) и ограничена снизу числом 0 ($0 < q^n$). Поэтому на основании теоремы 2 существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = A \geqslant 0.$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим переменную $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Она имеет предел.

e=2.718281828

…

4.47

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n-2}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4-\frac{2}{n}}{1}=4$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{n}}=\frac{2}{1}=2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n-2}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1}=\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n-2}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{5}{1}=5$$

Домашнее задание

1. а) Представьте переменную $x_n = \frac{5n+2}{n}$ в виде суммы числа и бесконечно малой.

б) Чему равен $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$?

2. Пользуясь свойствами пределов, вычислите предел:

а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n+2}{n}$;

б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2+5n-7}{2n^2-n+4}$;

в) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n^2-n+7}{n^3+3n+2}$;

г) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^3-n+13}{n^2+7n-1}$;

Пусть дана геометрическая прогрессия (b_n). Обозначим сумму первых n ее членов через S_n:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \tag{1}$$

Умножим обе части этого равенства на q:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q.$$

Учитывая, что

$$b_1 q = b_2,\ b_2 q = b_3,\ b_3 q = b_4,\ \ldots,\ b_{n-1} q = b_n,$$

получим

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q. \tag{2}$$

Вычтем почленно из равенства (2) равенство (1) и приведем подобные члены:

$$S_n q - S_n = (b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_n q) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n) = b_n q - b_1,$$

$$S_n(q - 1) = b_n q - b_1.$$

Отсюда следует, что при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}. \tag{I}$$