Возникновение комбинаторной теории

Комбинаторика – это область математики, изучающая вопрос, сколько разных комбинаций (наборов) можно составить из элементов заданного множества. При этом нужные комбинации подчиняются определенным требованиям, что приводит к различным методам решения задач по комбинаторике.

Истоки этой науки были положены знаменитым математиком и философом Готфридом Лейбницем.

Два основных правила комбинаторной теории

Теория комбинаторики зиждется на двух основных принципах – это правило сложения и правило умножения. Рассмотрим их подробнее.

Правило сложения: Пусть объект А мы можем выбрать из множества m способами, а объект В можно выбрать n способами, то объект «А+В» можно выбрать $m+n$ способами.

Возможно, это правило покажется непосвященному человеку абракадаброй, но ничего сложного нет. Рассмотрим пример – *пусть в одном ящике есть m шариков, а во втором ящике – n шариков. Сколькими способами можно вытащить шарик из одного этих ящиков*. Очевидно, что ОДИН шарик можно достать $m+n$ способами.

Правило умножения: Пусть объект А выбирается m способами, объект В выбирается n способами, то оба объекта можно выбрать mn способами.
Все очень просто – каждый из m способов выбора объекта А комбинируется с каждым из n способов выбора объекта В, то есть количество способов просто умножается друг на друга.

Рассмотрим простой пример: *сколько чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, если число должно быть двузначным?*
Можно составить 90 чисел – первую цифру числа (объект А) можем выбрать 9 способами, так как число не может начинаться с нуля. Вторую цифру числа (объект В) можем выбрать 10 способами, так как у нас есть 10 цифр. Итого получается $9*10=90$ чисел.

Это были главные правила, на которые опираются все методы решения задач по комбинаторике. Еще больше теории о началах комбинаторики вы найдете в онлайн учебнике: <u>Элементы комбинаторики онлайн</u>.

Примеры решения задач по комбинаторике

Перейдем к более продвинутым случаям и рассмотрим другие понятия комбинаторики.

Есть 5 книг. Сколькими способами их можно расположить на книжной полке?
Ответ – 120 способов. Первую книгу можем выбрать 5 способами, вторую книгу 4 способами и т.д. Перемножая числа с 5 до 1, получим 120.

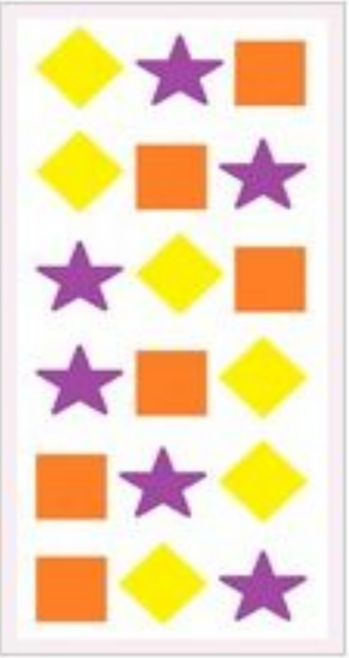
С этой задачи начинается понятие **факториала**. N-факториал или N! – это количество перестановок из N объектов, вычисляемое по формуле $P_N = N! = 1 * 2 * 3 * \ldots * (N-1) * N$.

Следующий пример – *в чемпионате мира участвуют 18 команд по футболу. Сколькими способами можно распределить золотые, серебряные и бронзовые комплекты?*
Ясно, что золотые медали может получить любая из команд, значит золотого призера (объект А) можно выбрать 18 способами. Остается два комплекта и 17 команд. Серебряным медалистом может стать одна из 17 команд, а бронзовым – одна из 16 команд. Значит, серебряного и бронзового медалиста можно выбрать 17 и 16 способами.
Итого, три комплекта медалей могут распределиться 18*17*16 = 4896 способами.

Перестановки

Пусть имеется n различных объектов.
Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются **перестановками**, а их число равно

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$



Символ $n!$ называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n. По определению, считают, что $0! = 1, 1! = 1$.

Пример всех перестановок из $n = 3$ объектов (различных фигур) - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, так и получается.

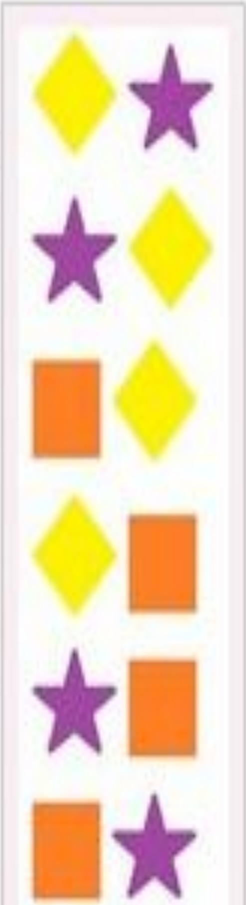
С ростом числа объектов количетство перестановок очень быстро растет и изображать их наглядно становится затруднительно. Например, число перестановок из 10 предметов - уже **3628800** (больше 3 миллионов!).

Размещения

Пусть имеется n различных объектов.
Будем выбирать из них m объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются **размещениями** из n объектов по m, а их число равно

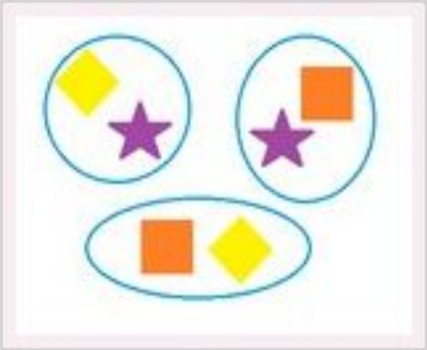
$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

Пример всех размещений из $n = 3$ объектов (различных фигур) по $m = 2$ - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно $A_3^2 = 3 \cdot (3-2+1) = 3 \cdot 2 = 6$.



Сочетания

Пусть имеется n различных объектов.
Будем выбирать из них m объектов все возможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются **сочетаниями** из n объектов по m, а их число равно



$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Пример всех сочетаний из $n = 3$ объектов (различных фигур) по $m = 2$ - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = 3$. Ясно, что сочетаний всегда меньше чем размещений (так как при размещениях порядок важен, а для сочетаний - нет), причем именно в $m!$ раз, то есть верна формула связи:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m.$$