

## Возникновение комбинаторной теории

- Комбинаторика – это область математики, изучающая вопрос, сколько разных комбинаций (наборов) можно составить из элементов заданного множества. При этом нужные комбинации подчиняются определенным требованиям, что приводит к различным методам решения задач по комбинаторике.
- Истоки этой науки были положены знаменитым математиком и философом Готфридом Лейбницем.

## Два основных правила комбинаторной теории

Теория комбинаторики зиждется на двух основных принципах – это правило сложения и правило умножения. Рассмотрим их подробнее.

**Правило сложения:** Пусть объект А мы можем выбрать из множества  $m$  способами, а объект В можно выбрать  $n$  способами, то объект «A+B» можно выбрать  $m + n$  способами.

Возможно, это правило покажется непосвященному человеку абракадаброй, но ничего сложного нет. Рассмотрим пример – пусть в одном ящике есть  $m$  шариков, а во втором ящике –  $n$  шариков. Сколько способами можно вытащить шарик из одного этих ящиков. Очевидно, что ОДИН шарик можно достать  $m + n$  способами.

**Правило умножения:** Пусть объект А выбирается  $m$  способами, объект В выбирается  $n$  способами, то оба объекта можно выбрать  $m \cdot n$  способами.  
Все очень просто – каждый из  $m$  способов выбора объекта А комбинируется с каждым из  $n$  способов выбора объекта В, то есть количество способов просто умножается друг на друга.

Рассмотрим простой пример: сколько чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, если число должно быть двузначным?

Можно составить 90 чисел – первую цифру числа (объект А) можем выбрать 9 способами, так как число не может начинаться с нуля. Вторую цифру числа (объект В) можем выбрать 10 способами, так как у нас есть 10 цифр. Итого получается  $9 * 10 = 90$  чисел.

Это были главные правила, на которые опираются все методы решения задач по комбинаторике. Еще больше теории о началах комбинаторики вы найдете в онлайн учебнике: [Элементы комбинаторики онлайн](#).

## Примеры решения задач по комбинаторике

Перейдем к более продвинутым случаям и рассмотрим другие понятия комбинаторики.

Есть 5 книг. Сколькими способами их можно расположить на книжной полке?

Ответ – 120 способов. Первую книгу можем выбрать 5 способами, вторую книгу 4 способами и т.д. Перемножая числа с 5 до 1, получим 120.

С этой задачи начинается понятие **факториала**. N-факториал или  $N!$  – это количество перестановок из  $N$  объектов, вычисляемое по формуле  $P_N = N! = 1 * 2 * 3 * \dots * (N - 1) * N$ .

Следующий пример – в чемпионате мира участвуют 18 команд по футболу. Сколькими способами можно распределить золотые, серебряные и бронзовые комплекты?

Ясно, что золотые медали может получить любая из команд, значит золотого призера (объект А) можно выбрать 18 способами. Остается два комплекта и 17 команд. Серебряным медалистом может стать одна из 17 команд, а бронзовым – одна из 16 команд. Значит, серебряного и бронзового медалиста можно выбрать 17 и 16 способами.

Итого, три комплекта медалей могут распределиться  $18 * 17 * 16 = 4896$  способами.

## Перестановки

Пусть имеется  $n$  различных объектов.

Будем переставлять их всеми возможными способами (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются **перестановками**, а их число равно

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Символ  $n!$  называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до  $n$ . По определению, считают, что  $0! = 1, 1! = 1$ .

Пример всех перестановок из  $n = 3$  объектов (различных фигур) - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ , так и получается.

С ростом числа объектов количество перестановок очень быстро растет и изображать их наглядно становится затруднительно. Например, число перестановок из 10 предметов - уже **3628800** (больше 3 миллионов!).



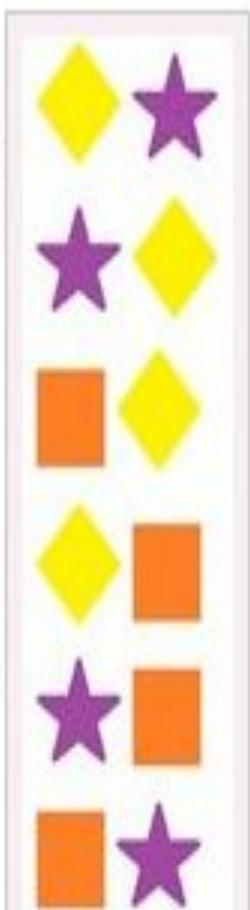
## Размещения

Пусть имеется  $n$  различных объектов.

Будем выбирать из них  $m$  объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются **размещениями** из  $n$  объектов по  $m$ , а их число равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$$

Пример всех размещений из  $n=3$  объектов (различных фигур) по  $m=2$  - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно  $A_3^2 = 3 \cdot (3-2+1) = 3 \cdot 2 = 6$ .

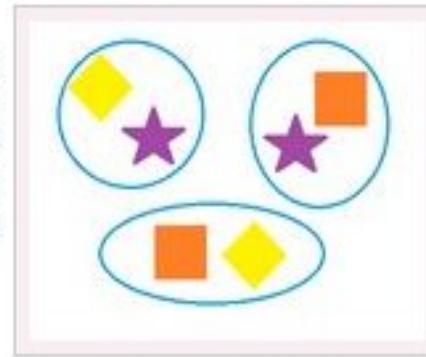


## Сочетания

Пусть имеется  $n$  различных объектов.

Будем выбирать из них  $m$  объектов все возможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются **сочетаниями** из  $n$  объектов по  $m$ , а их число равно

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$



Пример всех сочетаний из  $n = 3$  объектов (различных фигур) по  $m = 2$  - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно  $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = 3$ . Ясно, что сочетаний всегда меньше чем размещений (так как при размещениях порядок важен, а для сочетаний - нет), причем именно в  $m!$  раз, то есть верна формула связи:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m.$$