Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ или $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Второй замечательный предел

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Полезны следующие варианты второго замечательного предела:

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$ или $\lim\limits_{x \to 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$.

Примеры вычисления пределов

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$.

Р е ш е н и е.Так как при $x\to 0 \sin 7x\to 0$, то имеет место неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для использования первого замечательного предела домножим числитель и знаменатель дроби на 7:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x}=7\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Р е ш е н и е. Числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x\to 0$. Применим тригонометрическое тождество $\operatorname{tg} 3x=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ и вычислим предел с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos 3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x==\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot 1=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x}$.

Р е ш е н и е. Так как основание степени $\frac{x+1}{x-2}\to 1$ при $x\to\infty$, имеет место неопределенность $[1^{\infty}]$ и возможно применение второго замечательного предела. Для этого перепишем основание в другом виде:

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{(x-2)+2+1}{x-2}=\frac{(x-2)+3}{x-2}=1+\frac{3}{x-2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{x\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{(x-2)}{3}\cdot\frac{3x}{x-2}}=e^{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-2}}=e^{3\cdot 1}=e^{3}.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+5}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

Р е ш е н и е. Так как $\frac{3x-1}{3x+5}\to 1$ при $x\to\infty$, имеет место неопределенность $[1^{\infty}]$. Для использования второго замечательного предела сделаем следующие преобразования

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+5}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x+5)-5-1}{3x+5}\right)^{\frac{x-1}{2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x+5)-6}{3x+5}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+5}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{3x+5}{(-6)}\cdot\frac{(-6)}{3x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+5}\right)^{\frac{(3x+5)}{(-6)}\cdot\frac{(-6)(x-2)}{2(3x+5)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6(x-2)}{2(3x+5)}}=e^{-1}.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{5x+3}\right)^{x^2}$.

Р е ш е н и е. Так как $\frac{x-3}{5x+3}\to\frac{1}{5}$ при $x\to\infty$, то неопределенности $[1^{\infty}]$ нет и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{5x+3}\right)^{x^2}=\left[\frac{1}{5}\right]^{\infty}=0$.

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

Р е ш е н и е. Так как $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^{k}$, то $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=[1^{\infty}]=e^{-2\cdot 3}=e^{-6}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 5x}$$

- 5
- 1
- $\frac{1}{5}$
- 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 9x}{x}$$

- ∞
- 0
- 9
- $\frac{1}{9}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$$

- 3
- $\frac{1}{3}$
- 1
- 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}$$

- $\frac{1}{2}$
- ∞
- 1
- $-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$$

- $-\frac{3}{2}$
- $\frac{3}{2}$
- 0
- $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$$

- ∞
- ± 1
- 1
- 0

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{\frac{x}{3}}$$

- ◉ e^{-1}
- ○ 1
- ○ $e^{\frac{1}{3}}$
- ○ e^{-3}

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

- $e^{-\frac{2}{3}}$
- $e^{-\frac{1}{3}}$
- $e^{\frac{1}{3}}$
- $e^{\frac{2}{3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{x^2}$$

- 0
- $e^{\frac{1}{3}}$
- ∞
- $\frac{e}{3}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x-2}{x+1} \right)^{\frac{x}{2}}$$

- $+\infty$
- 0
- $e^{\frac{5}{2}}$
- $e^{-\frac{5}{2}}$

$$\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$$

- e^3
- $e^{\frac{2}{3}}$
- e^6
- 1

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - 4x^2\right)^{\frac{4}{x^2}}$$

- e^{-1}
- e
- 1
- e^{-16}

$$\lim_{x\to 0}\left(1-4x^2\right)^{\frac{4}{x^2}}$$

- e^{-1}
- e
- 1
- e^{-16}

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+3}{x^2+2x-1}\right)^{\frac{x+1}{2}}$$

- e^{-3}
- $e^{-\frac{3}{2}}$
- $e^{\frac{3}{2}}$
- $e^{-\frac{1}{2}}$