

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Полезны следующие варианты второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

Примеры вычисления пределов

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$.

Решение. Так как при $x \rightarrow 0$ $\sin 7x \rightarrow 0$, то имеет место неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для использования первого замечательного предела домножим числитель и знаменатель дроби на 7:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin 7x}{7x} = 7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 7 \cdot 1 = 7.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$. Применим тригонометрическое тождество $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ и вычислим предел с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{3 \sin 3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^x$.

Р е ш е н и е. Так как основание степени $\frac{x+1}{x-2} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, имеет место неопределенность $[1^\infty]$ и возможно применение второго замечательного предела. Для этого перепишем основание в другом виде:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)+2+1}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{x \cdot \frac{x-2}{3} \cdot \frac{3}{x-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{\frac{(x-2)}{3} \cdot \frac{3x}{x-2}} = e^3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-2} = e^{3 \cdot 1} = e^3. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+5} \right)^{\frac{x-1}{2}}$.

Решение. Так как $\frac{3x-1}{3x+5} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, имеет место неопределенность $[1^\infty]$. Для использования второго замечательного предела сделаем следующие преобразования

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+5} \right)^{\frac{x-1}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(3x+5)-5-1}{3x+5} \right)^{\frac{x-1}{2}} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(3x+5)-6}{3x+5} \right)^{\frac{x-1}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{3x+5} \right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{3x+5}{(-6)} \cdot \frac{(-6)}{3x+5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{3x+5} \right)^{\frac{(3x+5)}{(-6)} \cdot \frac{(-6)(x-2)}{2(3x+5)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6(x-2)}{2(3x+5)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{5x+3} \right)^{x^2}$.

Решение. Так как $\frac{x-3}{5x+3} \rightarrow \frac{1}{5}$ при $x \rightarrow \infty$, то неопределенности $[1^\infty]$ нет и $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{5x+3} \right)^{x^2} = \left[\frac{1}{5} \right]^\infty = 0$.

Пример 6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$, то $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}} = [1^\infty] = e^{-2 \cdot 3} = e^{-6}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x}$$

5

1

$\frac{1}{5}$

0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 9x}{x}$$

- ∞
- 0
- 9
- $\frac{1}{9}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$$

3

$\frac{1}{3}$

1

0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}$$

- $\frac{1}{2}$
 - ∞
 - 1
 - $-\frac{1}{2}$
-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$-\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$

0

$\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

∞

± 1

1

0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{\frac{x}{3}}$$

- e^{-1}
- 1
- $e^{\frac{1}{3}}$
- e^{-3}

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$e^{-\frac{2}{3}}$

$e^{-\frac{1}{3}}$

$e^{\frac{1}{3}}$

$e^{\frac{2}{3}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{3x-1} \right)^{x^2}$$

- 0
- $e^{\frac{1}{3}}$
- ∞
- $\frac{e}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x-2}{x+1} \right)^{\frac{x}{2}}$$

$+\infty$

0

$e^{\frac{5}{2}}$

$e^{-\frac{5}{2}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$$

- e^3
- $e^{\frac{2}{3}}$
- e^6
- 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x^2)^{\frac{4}{x^2}}$$

e^{-1}

e

1

e^{-16}

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x^2)^{\frac{4}{x^2}}$$

e^{-1}

e

1

e^{-16}

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 3}{x^2 + 2x - 1} \right)^{\frac{x+1}{2}}$$

e^{-3}

$e^{-\frac{3}{2}}$

$e^{\frac{3}{2}}$

$e^{-\frac{1}{2}}$

