Определение логарифмического уравнения

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим

$$\log_a x = b$$

Где $a > 0$, $a \neq 1$ Оно имеет единственное решение

$x = a^b$ при любом b.

Определение логарифма.

Логарифмом положительного числа x по положительному и не равному 1 основанию a: $log_a x$ называется показатель степени, при возведении в который числа a получается x.

$$a^{log_a x} = x, a > 0, a \neq 1$$

или

$$a^b = x, a > 0,$$

$$a \neq 1,$$

тогда

$$b = log_a x$$

Основные сведения о логарифмах.

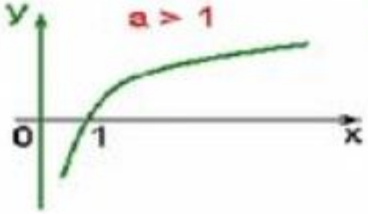
Логарифм

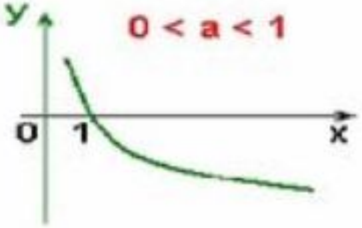
$\log_a x = b$, если $a^b = x$

$\log_a a^b = b$	$a^{\log_a x} = x$

Логарифмическая функция

$y = \log_a x$ $\quad a > 0,\ a \neq 1$





$\lg x = \log_{10} x$	$e^{\ln x} = x$
$\ln x = \log_e x$	$e^{x \ln a} = a^x$
$e = 2{,}71828...$	$\ln e^x = x$

Свойства

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$

4) $\log_a 1 = 0$ $\quad$ 5) $\log_a a = 1$

6) $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

7) $\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$

8) $\log_{\left(\frac{1}{a}\right)^n} a^m = -\frac{m}{n}$

9) $\log_{a^n} \left(\frac{1}{a}\right)^m = -\frac{m}{n}$

10) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Что надо знать и уметь,
для того, чтобы решить логарифмическое уравнение

1. Знать определение логарифма.
2. Уметь решать линейное и квадратное уравнение.

Методы решения логарифмических уравнений

1. ***Решение уравнений по свойствам логарифма.***
2. ***Решение уравнений по определению логарифма***
3. ***Решение уравнений заменой переменной.***

Пути решения уравнений

1. **Выбрать метод решения.**
2. **Решить уравнение.**
3. **Проверить найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение.**

Решите сами

$1.\ 3^{\log_3(x+20)}=15$ $\quad$ $1.\ 2^{\log_2(x-12)}=4$

$2.\ 7^{\log_7(x^2-1)}=80$ $\quad$ $2.\ 5^{\log_5(x^2-2x)}=0$

$1.\ \log_6 x=2$ $\quad$ $1.\ \log_5 x=-2$

$2.\ \log_2(-1-x)=3$ $\quad$ $2.\ \log_3(9+x)=4$

Решение простейших логарифмических уравнений

№ 1. Решите уравнение $\boldsymbol{log_{15}(5x-25)=2}$.

Решение.

$log_{15}(5x-25)=2$; $5x-25=15^2$; $5x-25=225$; $5x=200$; $x=40$.

Ответ. 4.

№ 2. Решите уравнение $\boldsymbol{log_{2,5}(6x+11)=log_{2,5}(11x+6)}$.

Решение.

$log_{2,5}(6x+11)=log_{2,5}(11x+6)$; $6x+11=11x+6$; $5x=5$; $x=1$.

Ответ. 1.

* № 3. Решите уравнение $\boldsymbol{log_{2x-1}(3x+16)=2}$.
* *Решение.*
* $log_{2x-1}(3x+16)=2 \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1)^2=3x+16,\\ 2x-1\neq 1,\\ 2x-1>0;\end{cases}$
* $\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-4x+1=3x+16,\\ x\neq 1,\\ x>\frac{1}{2};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-7x-15=0,\\ x\neq 1,\\ x>\frac{1}{2};\end{cases} \Leftrightarrow$
* $\begin{cases}x_1=-1{,}25\,,\ \ x_2=3\,,\\ x\neq 1,\\ x>\frac{1}{2}\,;\end{cases} \Leftrightarrow x=3\,.$
* *Ответ.* 3.

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

5. Решите уравнение: $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$	$\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$
$\log_3(x+1)(x+3)=1$	$\log_a a=1$
$\log_3(x+1)(x+3)=\log_3 3$	**Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию**
$(x+1)(x+3)=3$	**Раскроем скобки**
$x^2+3x+x+3=3$	**Приведём подобные**
$x^2+4x+3-3=0$	**Перенесём все слагаемые в лево**
$x^2+4x=0$	**Решим неполное квадратное уравнение**

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

6. Решите уравнение: $\lg(x^2+2x-7)-\lg(x-1)=0$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\lg(x^2+2x-7)-\lg(x-1)=0$	$\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$
$\lg\frac{x^2+2x-7}{x-1}=0$	$\log_a 1=0$
$\lg\frac{x^2+2x-7}{x-1}=\lg 1$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$\frac{x^2+2x-7}{x-1}=1$	Применим свойство пропорции
$x^2+2x-7=x-1$	Перенесём все слагаемые влево
$x^2+2x-7-x+1=0$	Приведём подобные
$x^2+x-6=0$	Решим квадратное уравнение

Введение новой переменной

$$A\log_a^2 f(x) + B\log_a f(x) + C = 0,$$

где а > *0*, а $\neq$ *1*, А, В, С – действительные числа.

Пусть t = loga f(x), t$\in$*R.*

Уравнение примет вид *t*2 + *Bt* + *C* = 0.

Решив его, найдём *x* из подстановки *t* = log*a f*(*x*).

Учитывая область определения, выберем только те значения *x*, которые удовлетворяют неравенству *f*(*x*) > 0.

Решение логарифмического уравнения введением новой переменной

7. Реши

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3^2 - \log_3 x - 2 = 0$	**Обозначим:** $\log_3 x = t$
$t^2 - t - 2 = 0$	**Решим квадратное уравнение**
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$	$D = b^2 - 4ac$
$t_1 = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$ $t_2 = \frac{1+3}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$	$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$\log_3 x = -1$ $\log_3 x = 2$	$\log_a a^b = b$
$\log_3 x = \log_3 3^{-1}$ $\log_3 x = \log_3 3^2$ $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $x = 3^2 = 9$	**Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию**

$$1.\log_3(x-2)+\log_3(x+2)=\log_3(2x-1)$$

$$2.\log_{3,4}(x^2-5x+8)-\log_{3,4}x=0$$

$$1.\log_{0,4}(x+2)+\log_{0,4}(x+3)=\log_{0,4}(1-x)$$

$$2.\log_{23}(2x-1)-\log_{23}x=0$$

$$1.2\log_5^2 x+5\log_5 x+2=0$$

$$2.\log_{\frac{1}{2}}^2 x+3\log_{\frac{1}{2}} x+2=0$$

$$1.3\log_4^2 x-7\log_4 x+2=0$$

$$2.\log_5^2 x+\log_5 x-6=0$$

Решите уравнения:

1. $4^{\log_4(x+7)} = 11$
2. $\log_3(5x - 1) = 2$
3. $\log_5(x - 1) + \log(x - 2) = \log(x + 2)$
4. $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0$
5. $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4$

1. $2^{\log_2(x-15)} = 4$
2. $\log_4(5 + 2x) = 3$
3. $\lg^2 x + \lg x + 6 = 0$
4. $\log_{23}(2x - 1) - \log_{23} x = 0$
5. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Проблема? $\longrightarrow$ **Цель?**

$$\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4$$

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$