

Определение логарифмического уравнения

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим

$$\log_a x = b$$

Где $a > 0, a \neq 1$ Оно имеет единственное решение

$$x = a^b \text{ при любом } b.$$

Определение логарифма.

* Логарифмом положительного числа x по положительному и не равному 1 основанию a : $\log_a x$ называется показатель степени, при возведении в который числа a получается x .

$$a^{\log_a x} = x, a > 0, a \neq 1$$

или

$$a^b = x, a > 0,$$

$$a \neq 1,$$

тогда

$$b = \log_a x$$

Основные сведения о логарифмах.

Логарифм

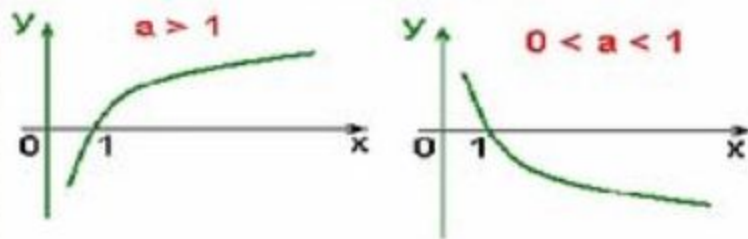
$$\log_a x = b, \text{ если } a^b = x$$

$$\log_a a^b = b$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Логарифмическая функция

$$y = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$$



$$\lg x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$e = 2,71828\dots$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$e^{x \ln a} = a^x$$

$$\ln e^x = x$$

Свойства

$$1) \log_a x y = \log_a x + \log_a y$$

$$2) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$3) \log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

$$4) \log_a 1 = 0$$

$$5) \log_a a = 1$$

$$6) \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$7) \log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$$

$$8) \log_{\left(\frac{1}{a}\right)^n} a^m = -\frac{m}{n}$$

$$9) \log_{a^n} \left(\frac{1}{a}\right)^m = -\frac{m}{n}$$

$$10) \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$



**Что надо знать и уметь,
для того, чтобы решить логарифмическое
уравнение**

1. **Знать определение
логарифма.**
2. **Уметь решать линейное
и квадратное уравнение.**



Методы решения логарифмических уравнений

1. *Решение уравнений по свойствам логарифма.*
2. *Решение уравнений по определению логарифма*
3. *Решение уравнений заменой переменной.*

Пути решения уравнений

1. **Выбрать метод решения.**
2. **Решить уравнение.**
3. **Проверить найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение.**

Решите сами

$$1.3^{\log_3(x+20)} = 15 \quad 1.2^{\log_2(x-12)} = 4$$

$$2.7^{\log_7(x^2-1)} = 80 \quad 2.5^{\log_5(x^2-2x)} = 0$$

$$1. \log_6 x = 2$$

$$1. \log_5 x = -2$$

$$2. \log_2(-1-x) = 3$$

$$2. \log_3(9+x) = 4$$

* *Решение простейших логарифмических уравнений

* № 1. Решите уравнение $\log_{15}(5x - 25) = 2$.

* *Решение.*

$$\begin{aligned} * \log_{15}(5x - 25) = 2 ; 5x - 25 = 15^2 ; 5x - 25 = 225 ; \\ 5x = 200 ; x = 40 . \end{aligned}$$

* *Ответ.* 4.

* № 2. Решите уравнение $\log_{2,5}(6x + 11) = \log_{2,5}(11x + 6)$.

* *Решение.*

$$\begin{aligned} * \log_{2,5}(6x + 11) = \log_{2,5}(11x + 6) ; 6x + 11 = 11x + 6 ; \\ 5x = 5 ; x = 1 . \end{aligned}$$

* *Ответ.* 1.

*№ 3. Решите уравнение $\log_{2x-1}(3x + 16) = 2$.

*Решение.

$$*\log_{2x-1}(3x + 16) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 1)^2 = 3x + 16, \\ 2x - 1 \neq 1, \\ 2x - 1 > 0; \end{cases}$$

$$*\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 = 3x + 16, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 7x - 15 = 0, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$*\begin{cases} x_1 = -1,25, \quad x_2 = 3, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 .$$

*Ответ. 3.

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

5. Решите уравнение: $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$	$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$
$\log_3(x+1)(x+3) = 1$	$\log_a a = 1$
$\log_3(x+1)(x+3) = \log_3 3$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$(x+1)(x+3) = 3$	Раскроем скобки
$x^2 + 3x + x + 3 = 3$	Приведём подобные
$x^2 + 4x + 3 - 3 = 0$	Перенесём все слагаемые в лево
$x^2 + 4x = 0$	Решим неполное квадратное уравнение

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

6. Решите уравнение: $\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg(x - 1) = 0$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg(x - 1) = 0$	$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
$\lg \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} = 0$	$\log_a 1 = 0$
$\lg \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} = \lg 1$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$\frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} = 1$	Применим свойство пропорции
$x^2 + 2x - 7 = x - 1$	Перенесём все слагаемые влево
$x^2 + 2x - 7 - x + 1 = 0$	Приведём подобные
$x^2 + x - 6 = 0$	Решим квадратное уравнение

Введение новой переменной

$$A \log_a^2 f(x) + B \log_a f(x) + C = 0,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, A, B, C – действительные числа.

Пусть $t = \log_a f(x)$, $t \in \mathbb{R}$.

Уравнение примет вид $t^2 + Bt + C = 0$.

Решив его, найдём x из подстановки $t = \log_a f(x)$.

Учитывая область определения, выберем только те значения x , которые удовлетворяют неравенству

$$f(x) > 0.$$

Решение логарифмического уравнения

7. Решите уравнение **с введением новой переменной**

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$	Обозначим: $\log_3 x = t$
$t^2 - t - 2 = 0$	Решим квадратное уравнение
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$	$D = b^2 - 4ac$
$t_1 = \frac{1 - 3}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$	$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$t_2 = \frac{1 + 3}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$	
$\log_3 x = -1$ $\log_3 x = 2$	$\log_a a^b = b$
$\log_3 x = \log_3 3^{-1}$ $\log_3 x = \log_3 3^2$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $x = 3^2 = 9$	

$$1. \log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$$

$$2. \log_{3,4}(x^2 - 5x + 8) - \log_{3,4}x = 0$$

$$1. \log_{0,4}(x+2) + \log_{0,4}(x+3) = \log_{0,4}(1-x)$$

$$2. \log_{23}(2x-1) - \log_{23}x = 0$$

$$1. 2 \log_5^2 x + 5 \log_5 x + 2 = 0$$

$$2. \log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$$

$$1. 3 \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 2 = 0$$

$$2. \log_5^2 x + \log_5 x - 6 = 0$$

Решите уравнения:

1. $4^{\log_4(x+7)} = 11$

2. $\log_3(5x - 1) = 2$

3. $\log_5(x - 1) + \log(x - 2) = \log(x + 2)$

4. $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0$

5. $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4$

1. $2^{\log_2(x-15)} = 4$

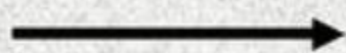
2. $\log_4(5 + 2x) = 3$

3. $\lg^2 x + \lg x + 6 = 0$

4. $\log_{23}(2x - 1) - \log_{23} x = 0$

5. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Проблема?



Цель?

$$\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4$$

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$