

# Определение логарифмического уравнения

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим

$$\log_a x = b$$

Где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  Оно имеет единственное решение

$$x = a^b \text{ при любом } b.$$

# Определение логарифма.

\* Логарифмом положительного числа  $x$  по положительному и не равному  $1$  основанию  $a$ :  $\log_a x$  называется показатель степени, при возведении в который числа  $a$  получается  $x$ .

$$a^{\log_a x} = x, a > 0, a \neq 1$$

или

$$a^b = x, a > 0,$$

$$a \neq 1,$$

тогда

$$b = \log_a x$$

# Основные сведения о логарифмах.

## Логарифм

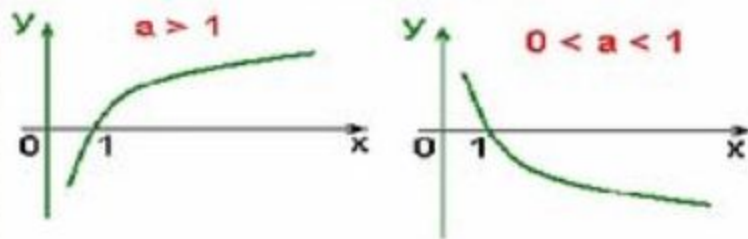
$$\log_a x = b, \text{ если } a^b = x$$

$$\log_a a^b = b$$

$$a^{\log_a x} = x$$

## Логарифмическая функция

$$y = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$$



$$\lg x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$e = 2,71828\dots$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$e^{x \ln a} = a^x$$

$$\ln e^x = x$$

## Свойства

$$1) \log_a x y = \log_a x + \log_a y$$

$$2) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$3) \log_a x^p = p \cdot \log_a x$$

$$4) \log_a 1 = 0$$

$$5) \log_a a = 1$$

$$6) \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$7) \log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$$

$$8) \log_{\left(\frac{1}{a}\right)^n} a^m = -\frac{m}{n}$$

$$9) \log_{a^n} \left(\frac{1}{a}\right)^m = -\frac{m}{n}$$

$$10) \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$



**Что надо знать и уметь,  
для того, чтобы решить логарифмическое  
уравнение**

- 1. Знать определение логарифма.**
- 2. Уметь решать линейное и квадратное уравнение.**



# Методы решения логарифмических уравнений

1. *Решение уравнений по свойствам логарифма.*
2. *Решение уравнений по определению логарифма*
3. *Решение уравнений заменой переменной.*

## Пути решения уравнений

1. **Выбрать метод решения.**
2. **Решить уравнение.**
3. **Проверить найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение.**

## Решите сами

$$1.3^{\log_3(x+20)} = 15 \quad 1.2^{\log_2(x-12)} = 4$$

$$2.7^{\log_7(x^2-1)} = 80 \quad 2.5^{\log_5(x^2-2x)} = 0$$

$$1. \log_6 x = 2$$

$$1. \log_5 x = -2$$

$$2. \log_2(-1-x) = 3$$

$$2. \log_3(9+x) = 4$$

\* \*Решение простейших логарифмических уравнений

\* № 1. Решите уравнение  $\log_{15}(5x - 25) = 2$  .

\* *Решение.*

$$\begin{aligned} * \log_{15}(5x - 25) = 2 ; 5x - 25 = 15^2 ; 5x - 25 = 225 ; \\ 5x = 200 ; x = 40 . \end{aligned}$$

\* *Ответ.* 4.

\* № 2. Решите уравнение  $\log_{2,5}(6x + 11) = \log_{2,5}(11x + 6)$  .

\* *Решение.*

$$\begin{aligned} * \log_{2,5}(6x + 11) = \log_{2,5}(11x + 6) ; 6x + 11 = 11x + 6 ; \\ 5x = 5 ; x = 1 . \end{aligned}$$

\* *Ответ.* 1.



\*№ 3. Решите уравнение  $\log_{2x-1}(3x+16) = 2$ .

\*Решение.

$$*\log_{2x-1}(3x+16) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2 = 3x+16, \\ 2x-1 \neq 1, \\ 2x-1 > 0; \end{cases}$$

$$*\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 = 3x + 16, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 7x - 15 = 0, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$*\begin{cases} x_1 = -1,25, \quad x_2 = 3, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

\*Ответ. 3.

# Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

5. Решите уравнение:  $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$	$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$
$\log_3(x+1)(x+3) = 1$	$\log_a a = 1$
$\log_3(x+1)(x+3) = \log_3 3$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$(x+1)(x+3) = 3$	Раскроем скобки
$x^2 + 3x + x + 3 = 3$	Приведём подобные
$x^2 + 4x + 3 - 3 = 0$	Перенесём все слагаемые в лево
$x^2 + 4x = 0$	Решим неполное квадратное уравнение

# Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

6. Решите уравнение:  $\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg(x - 1) = 0$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg(x - 1) = 0$	$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$
$\lg \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} = 0$	$\log_a 1 = 0$
$\lg \frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} = \lg 1$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$\frac{x^2 + 2x - 7}{x - 1} = 1$	Применим свойство пропорции
$x^2 + 2x - 7 = x - 1$	Перенесём все слагаемые влево
$x^2 + 2x - 7 - x + 1 = 0$	Приведём подобные
$x^2 + x - 6 = 0$	Решим квадратное уравнение

### *Введение новой переменной*

$$A \log_a^2 f(x) + B \log_a f(x) + C = 0,$$

где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $A, B, C$  – действительные числа.

*Пусть  $t = \log_a f(x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .*

Уравнение примет вид  $t^2 + Bt + C = 0$ .

Решив его, найдём  $x$  из подстановки  $t = \log_a f(x)$ .

Учитывая область определения, выберем только те значения  $x$ , которые удовлетворяют неравенству

$$f(x) > 0.$$

# Решение логарифмического уравнения

## 7. Решите уравнение с введением новой переменной

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$	Обозначим: $\log_3 x = t$
$t^2 - t - 2 = 0$	Решим квадратное уравнение
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$	$D = b^2 - 4ac$
$t_1 = \frac{1 - 3}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$	$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$t_2 = \frac{1 + 3}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$	
$\log_3 x = -1$ $\log_3 x = 2$	$\log_a a^b = b$
$\log_3 x = \log_3 3^{-1}$ $\log_3 x = \log_3 3^2$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $x = 3^2 = 9$	

$$1. \log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$$

$$2. \log_{3,4}(x^2 - 5x + 8) - \log_{3,4}x = 0$$

$$1. \log_{0,4}(x+2) + \log_{0,4}(x+3) = \log_{0,4}(1-x)$$

$$2. \log_{23}(2x-1) - \log_{23}x = 0$$

$$1. 2 \log_5^2 x + 5 \log_5 x + 2 = 0$$

$$2. \log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$$

$$1. 3 \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 2 = 0$$

$$2. \log_5^2 x + \log_5 x - 6 = 0$$

## Решите уравнения:

1.  $4^{\log_4(x+7)} = 11$

2.  $\log_3(5x - 1) = 2$

3.  $\log_5(x - 1) + \log(x - 2) = \log(x + 2)$

4.  $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0$

5.  $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4$

1.  $2^{\log_2(x-15)} = 4$

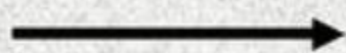
2.  $\log_4(5 + 2x) = 3$

3.  $\lg^2 x + \lg x + 6 = 0$

4.  $\log_{23}(2x - 1) - \log_{23} x = 0$

5.  $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

**Проблема?**



**Цель?**

$$\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4$$

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$