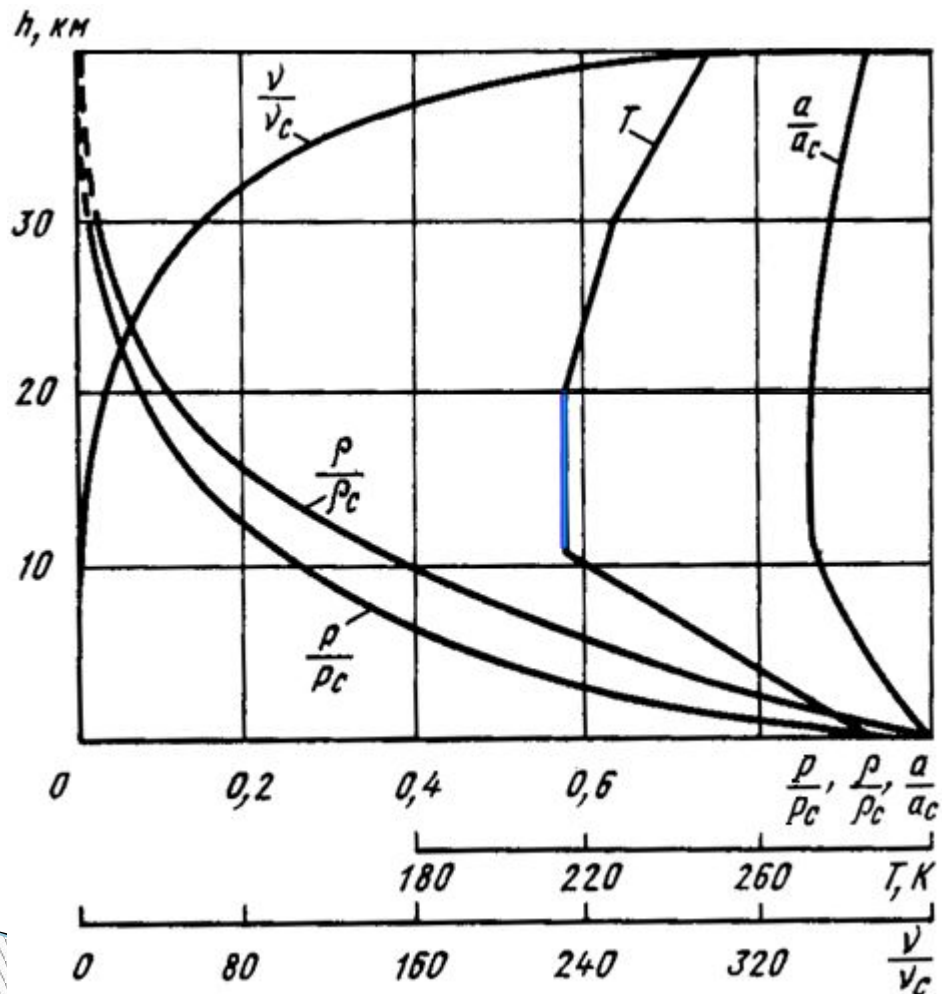


# Лекция 4

- стандартная атмосфера
- кинематика жидкости
- ускорение жидкой частицы
- полные производные от термодинамических параметров
- уравнение линии тока
- вращательное движение жидкой частицы
- деформационное движение жидкой частицы
- деформация скашивания при движении жидкой частицы
- уравнение неразрывности

# Стандартная атмосфера

**Стандартная атмосфера** – условная по высоте (параметры воздушной оболочки на определённых высотах фиксированы).



Стандартные значения параметров:

$$T_c = 288,15 \text{ K};$$

$$\rho_c = 1,225 \text{ кг/м}^3;$$

$$p_c = 101,3 \text{ КПа};$$

$$\lambda_c = 2,53 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

$$v_c = 1,46 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

$$T_{|h=11 \dots 20 \text{ км}} = 216 \text{ K} = -57,15 \text{ C}^\circ$$

Рисунок 4.1 – Стандартная атмосфера

# Кинематика жидкости. Ускорение

**Кинематика жидкости** – раздел механики, который рассматривает поле скорости, ускорения и не рассматривает силовое воздействие между телом и средой.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t); \quad \vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (4.1)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}; \quad (4.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \quad \frac{dy}{dt} = V_y, \quad \frac{dz}{dt} = V_z; \quad (4.3)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}; \quad (4.4)$$

# Кинематика жидкости. Ускорение

Скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_{1x} \cdot V_{2x} + V_{1y} \cdot V_{2y} + V_{1z} \cdot V_{2z} \quad (4.5)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} ; \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad (4.6)$$

$$V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (4.7)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (4.8)$$

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  - локальное (субстанциональное) ускорение

$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$  - конвективное ускорение

# Кинематика жидкости. Частные производные

$$a_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla V_x) = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad (4.9)$$

$$a_y = \frac{\partial V_y}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla V_y) \quad (4.10)$$

$$a_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla V_z) \quad (4.11)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (4.12)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} = \quad (4.13)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \quad (4.14)$$

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = V_{1x} \cdot V_{2x} + V_{1y} \cdot V_{2y} + V_{1z} \cdot V_{2z} \quad (4.15)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla \rho)} \quad (4.16)$$

# Частные производные температуры, энтальпии и энтропии

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla T)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla i) \quad (4.17)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla S)$$

# Линия тока

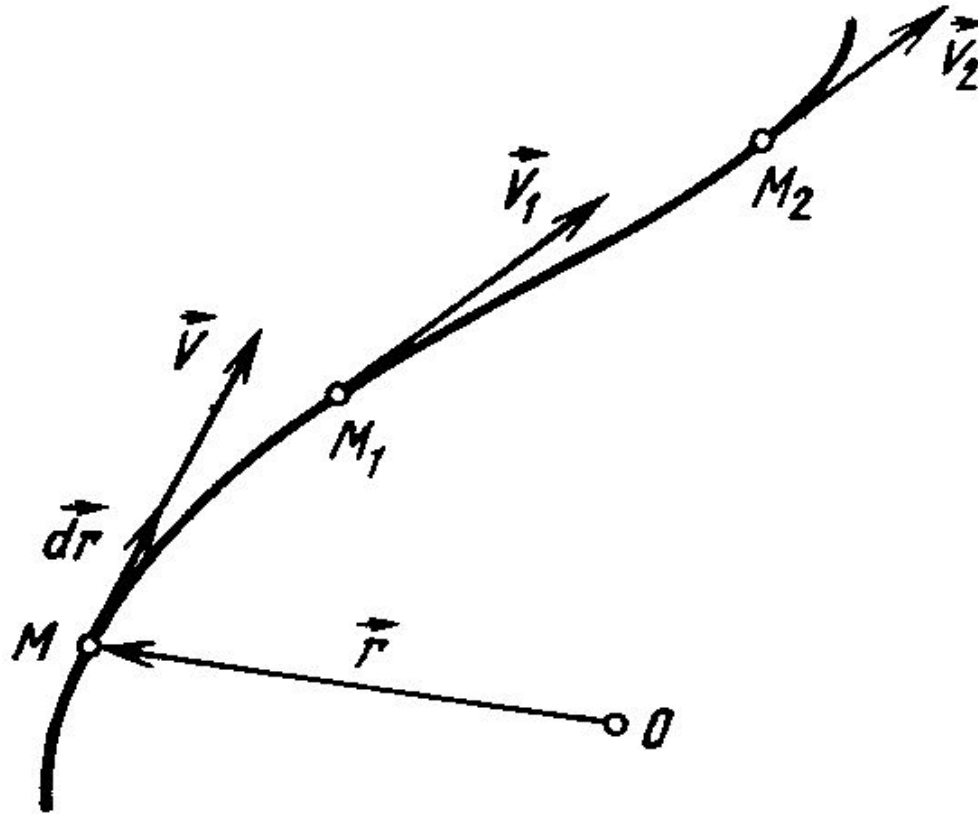


Рисунок 4.2 – Линия тока

Кривая в пространстве, в каждой точке которой в **данный момент времени** вектор скорости совпадает с касательной в этой точке называется **линией тока**.

# Дифференциальное уравнение линии тока

$$\vec{V} \parallel d\vec{r} \Rightarrow \vec{V} \times d\vec{r} = 0$$

$$\vec{V} \{V_x, V_y, V_z\}, d\vec{r} \{dx, dy, dz\}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ V_x & V_y & V_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow i(V_y dz - V_z dy) + j(V_z dx - V_x dz) + k(V_x dy - V_y dx) = 0$$

$$\begin{cases} V_y dz - V_z dy = 0 \\ V_z dx - V_x dz = 0 \\ V_x dy - V_y dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \tau_{const} =$$



# Уравнение линии тока и траектории

**Траектория** это след частицы в пространстве.

Если рассматривать установившееся (стационарное) течение, линия тока и траектория совпадают. **Обратное не выполняется.**

Дифференциальное уравнение линии тока:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \tau = \text{const} \quad (4.18)$$

Система дифференциальных уравнений траектории:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_x \\ \frac{dy}{dt} = V_y \\ \frac{dz}{dt} = V_z \end{cases} \quad (4.19)$$

# Вращательное движение жидкой частицы

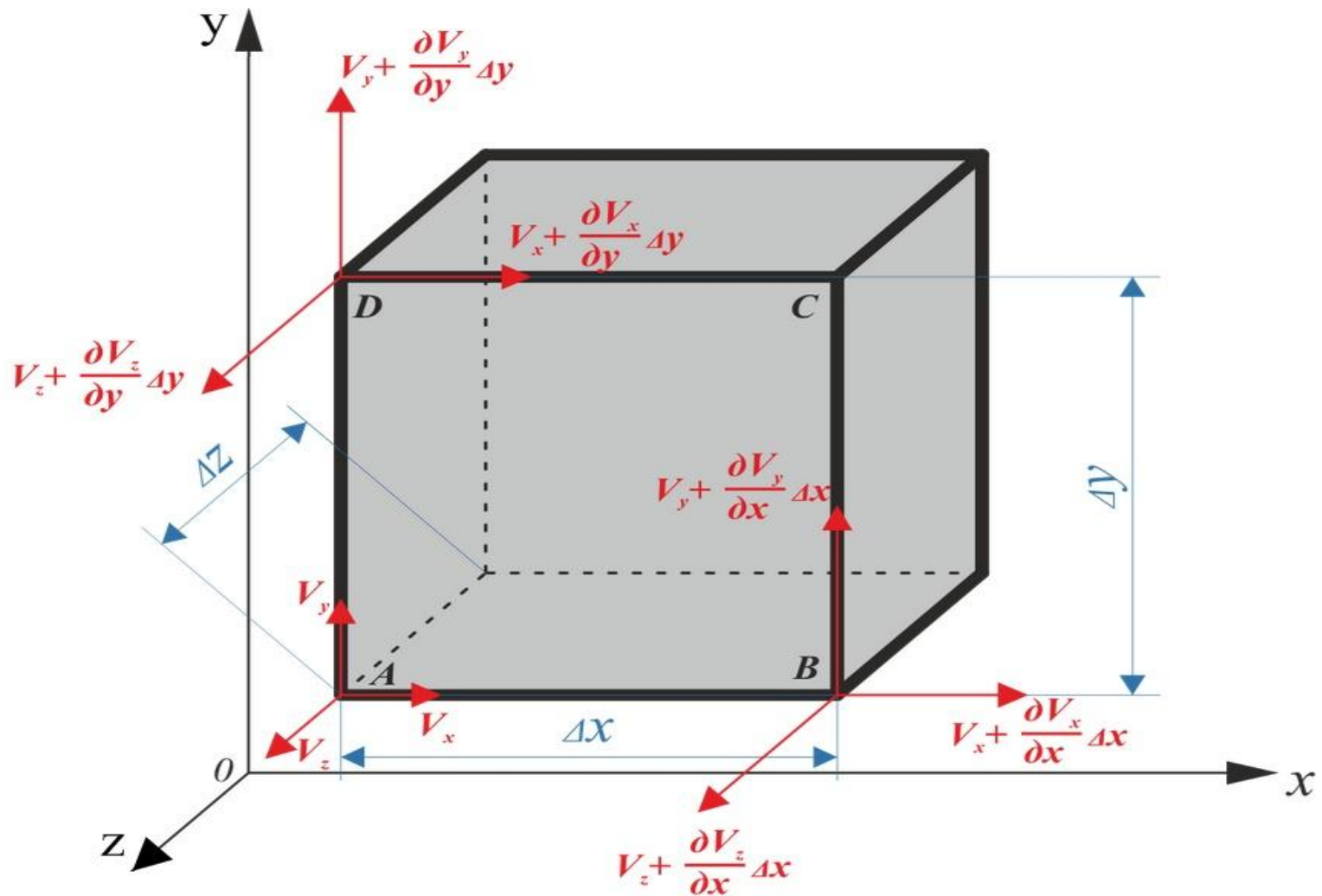


Рисунок 4.3 – Общее движение жидкой частицы

# Вращательное движение жидкой частицы

Будем полагать вектор скорости *непрерывной функцией* координат и времени.

Непрерывная функция является *дифференцируемой* функцией.

*Дифференцируемая* функцией может быть разложена в *ряд Тейлора*.

# Вращательное движение жидкой частицы

Пусть все производные компоненты скорости равны нулю.

Пусть только в момент времени  $t = \text{const}$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \neq 0$$

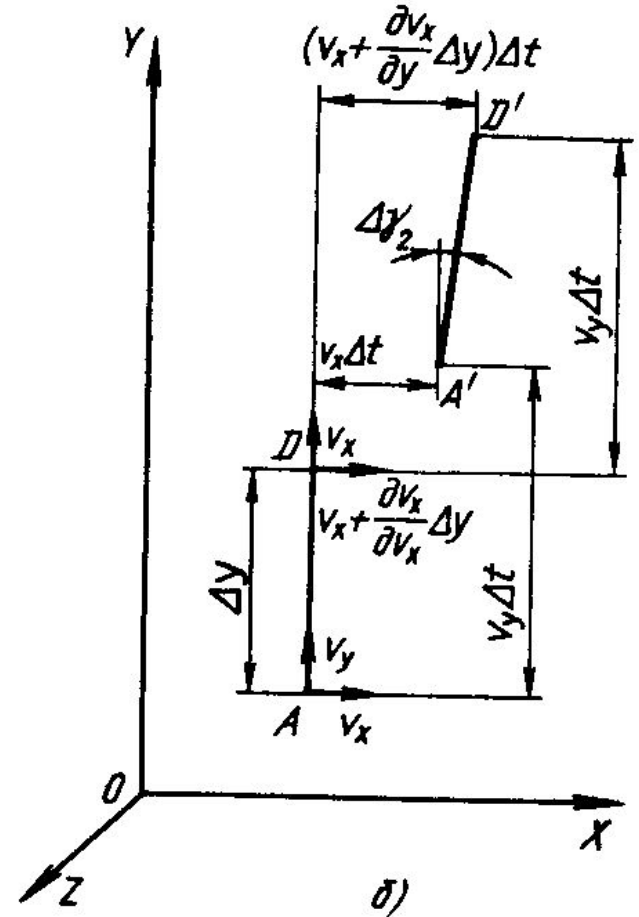
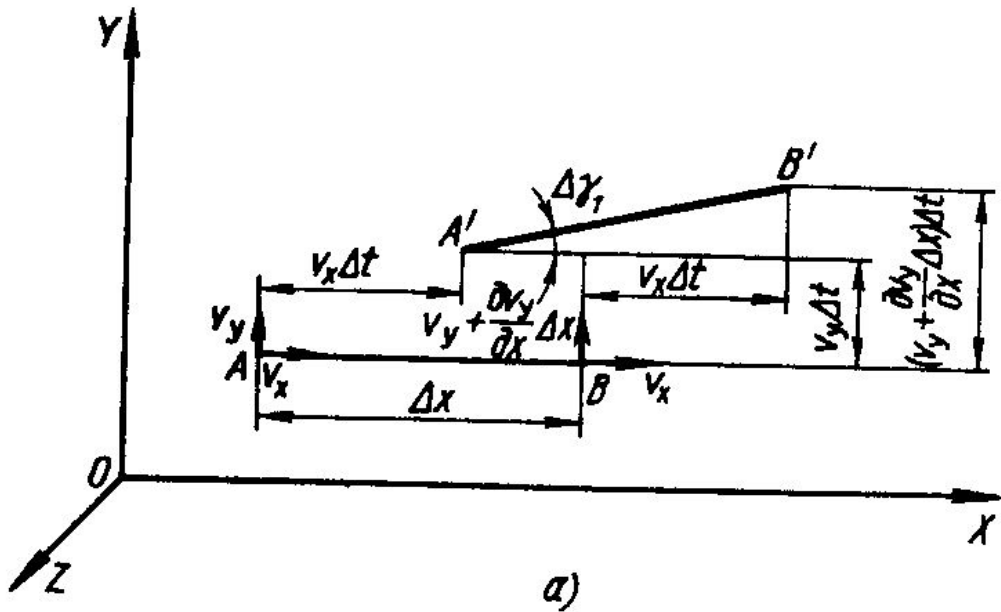


Рисунок 4.4 – Вращательное движение ребра АВ жидкой частицы

# Вращательное движение жидкой частицы

$$\Delta\gamma_1 \approx \operatorname{tg}(\Delta\gamma_1) = \frac{(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta x) \Delta t - v_y \Delta t}{\Delta x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta t. \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0$$

$$\Delta\gamma_2 \approx \operatorname{tg}(\Delta\gamma_2) = \frac{(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y) \Delta t - v_x \Delta t}{\Delta y} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta t. \quad (4.21)$$

Правило знаков: вращение против часовой стрелки «+», а по часовой – «-»

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\gamma_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\gamma_2}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (4.22)$$

# Вращательное движение жидкой частицы

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (4.24)$$

# Деформационное движение жидкой частицы

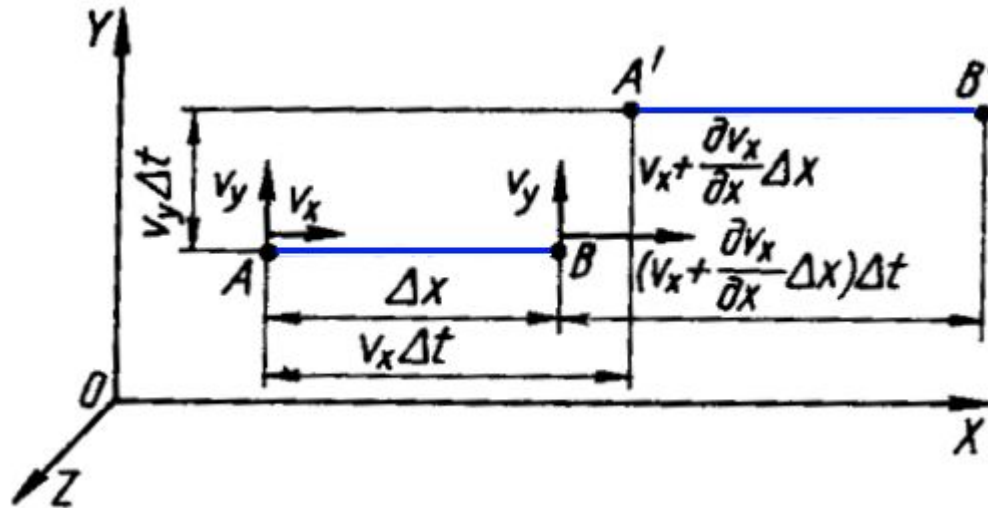


Рисунок 4.5 – Деформационное движение ребра АВ жидкой частицы

$$\Delta x_1 = \Delta x + \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t - v_x \Delta t. \quad (4.25)$$

$$e_{xx} = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x \Delta t} = \frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (4.26)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (4.27)$$

# Деформация скашивания при движении жидкой частицы

$$2e_{xy} = 2e_{yx} = \frac{\Delta\gamma_1}{\Delta t} - \frac{\Delta\gamma_2}{\Delta t} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (4.28)$$

$$2e_{zy} = 2e_{yz} = \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}; \quad (4.29)$$

$$2e_{xz} = 2e_{zx} = \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}.$$

Тензор скоростей деформаций  $\dot{S} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.30)$



# Уравнение неразрывности

Относительное изменение объёма по времени равно

$$\theta = \frac{1}{\Delta W} \frac{d(\Delta W)}{dt} = \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (4.31)$$

$m = \text{const}$

$$\frac{dm}{dt} = 0, \quad m = \rho \cdot W \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho \cdot W)}{dt} = W \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dW}{dt} = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (4.33)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} = 0} \quad (4.34)$$

# Уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla\rho), \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla\rho) + \rho \cdot \operatorname{div}\vec{V}}_{\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.37)$$

# Уравнение неразрывности

Частные случаи уравнения неразрывности

## 1) Установившееся течение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.38)$$

$$\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = \frac{\partial(\rho \cdot V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot V_z)}{\partial z}$$

## 2) Несжимаемое течение

$$\rho = \text{const} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (4.39)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$