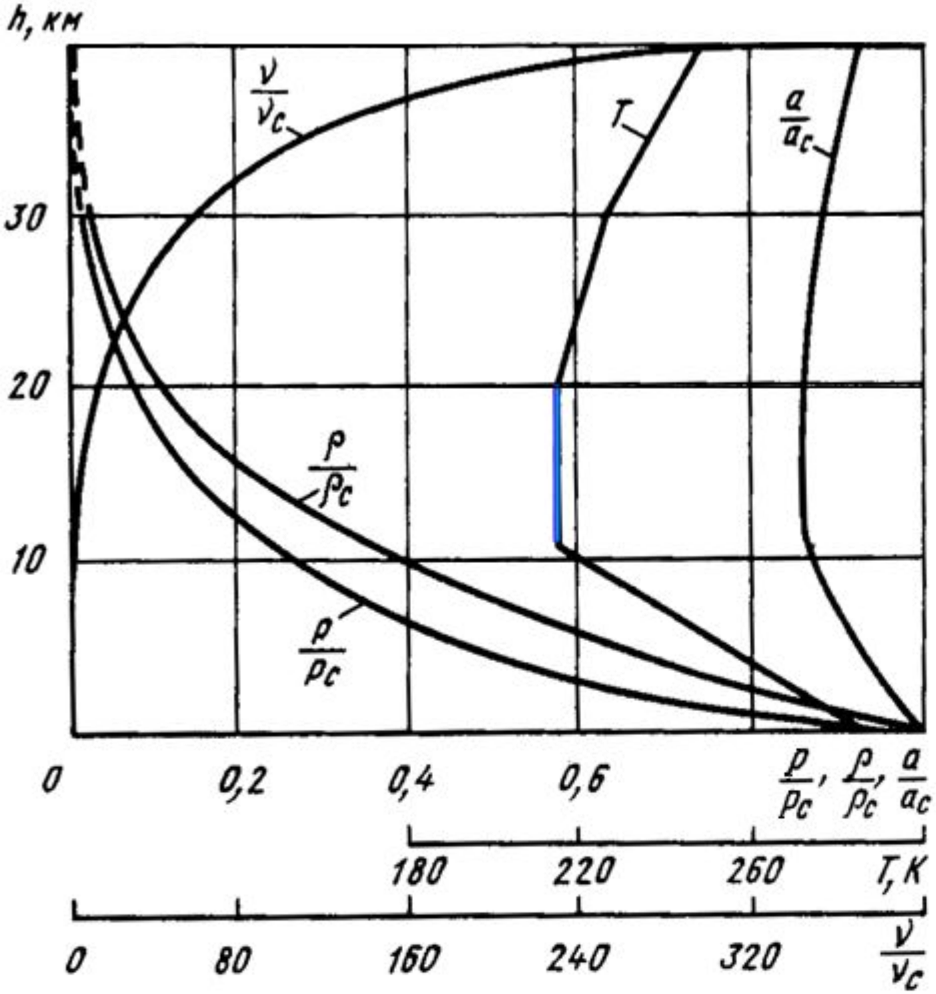
Лекция 4

- стандартная атмосфера
- кинематика жидкости
- ускорение жидкой частицы
- полные производные от термодинамических параметров
- уравнение линии тока
- вращательное движение жидкой частицы
- деформационное движение жидкой частицы
- деформация скашивания при движении жидкой частицы
- уравнение неразрывности

Стандартная атмосфера

Стандартная атмосфера – условная по высоте (параметры воздушной оболочки на определённых высотах фиксированы).



Стандартные значения параметров:

$T_с$=288,15 K;
$ρ_с$=1,225 $кг/м^3$;
$p_с$=101,3 $КПа$;

$$\lambda_c = 2,53 \cdot 10^{-2} \frac{Вт}{м \cdot K}$$

$$\nu_c = 1,46 \cdot 10^{-5} \frac{м^2}{с}$$

$$T_{|h=11...20\,км} = 216\,K = -57,15\,C^{\circ}$$

Рисунок 4.1 – Стандартная атмосфера

Кинематика жидкости. Ускорение

Кинематика жидкости – раздел механики, который рассматривает поле скорости, ускорения и не рассматривает силовое воздействие между телом и средой.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t); \quad \vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \tag{4.1}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}; \tag{4.2}$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \quad \frac{dy}{dt} = V_y, \quad \frac{dz}{dt} = V_z; \tag{4.3}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}; \tag{4.4}$$

Кинематика жидкости. Ускорение

Скалярное произведение двух векторов:

$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_{1x} \cdot V_{2x} + V_{1y} \cdot V_{2y} + V_{1z} \cdot V_{2z}} \qquad (4.5)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\ ; \qquad \nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} \qquad (4.6)$$

$$V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} \qquad (4.7)$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V}} \qquad (4.8)$$

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ - локальное (субстанциональное) ускорение

$\left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V}$ - конвективное ускорение

Кинематика жидкости. Частные производные

$$a_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla V_x) = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \qquad (4.9)$$

$$a_y = \frac{\partial V_y}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla V_y) \qquad (4.10)$$

$$a_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla V_z) \qquad (4.11)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \qquad (4.12)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} = \qquad (4.13)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \qquad (4.14)$$

$$(\bar{V}_1 . \bar{V}_2) = V_{1x} . V_{2x} + V_{1y} . V_{2y} + V_{1z} . V_{2z} \qquad (4.15)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla \rho)} \qquad (4.16)$$

Частные производные температуры, энтальпии и энтропии

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla T)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\partial i}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla i) \qquad (4.17)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla S)$$

Линия тока

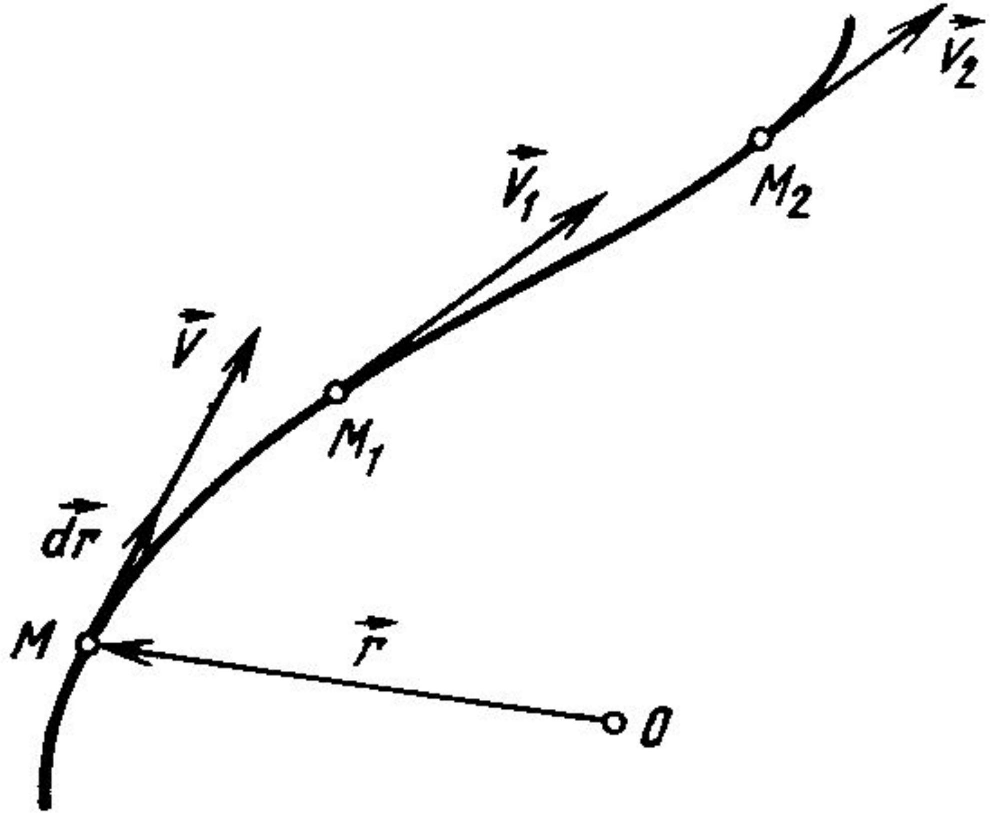


Рисунок 4.2 – Линия тока

Кривая в пространстве, в каждой точке которой в **данный момент времени** вектор скорости совпадает с касательной в этой точке называется **линией тока**.

Дифференциальное уравнение линии тока

$$\vec{V} \parallel d\vec{r} \quad \Rightarrow \vec{V} \times d\vec{r} = 0$$

$$\vec{V}\left\{V_x, V_y, V_z\right\}, \; d\vec{r}\left\{dx, dy, dz\right\}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{i}\left(V_y dz - V_z dy\right) + \vec{j}\left(V_z dx - V_x dz\right) + \vec{k}\left(V_x dy - V_y dx\right) = 0$$

$$\begin{cases} V_y dz - V_z dy = 0 \\ V_z dx - V_x dz = 0 \\ V_x dy - V_y dx = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = const =$$

Уравнение линии тока и траектории

Траектория это след частицы в пространстве.

Если рассматривать установившееся (стационарное) течение, линия тока и траектория совпадают. **Обратное не выполняется.**

Дифференциальное уравнение линии тока:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} = \tau = const \qquad (4.18)$$

Система дифференциальных уравнений траектории:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_x \\ \dfrac{dy}{dt} = V_y \\ \dfrac{dz}{dt} = V_z \end{cases} \qquad (4.19)$$

Вращательное движение жидкой частицы

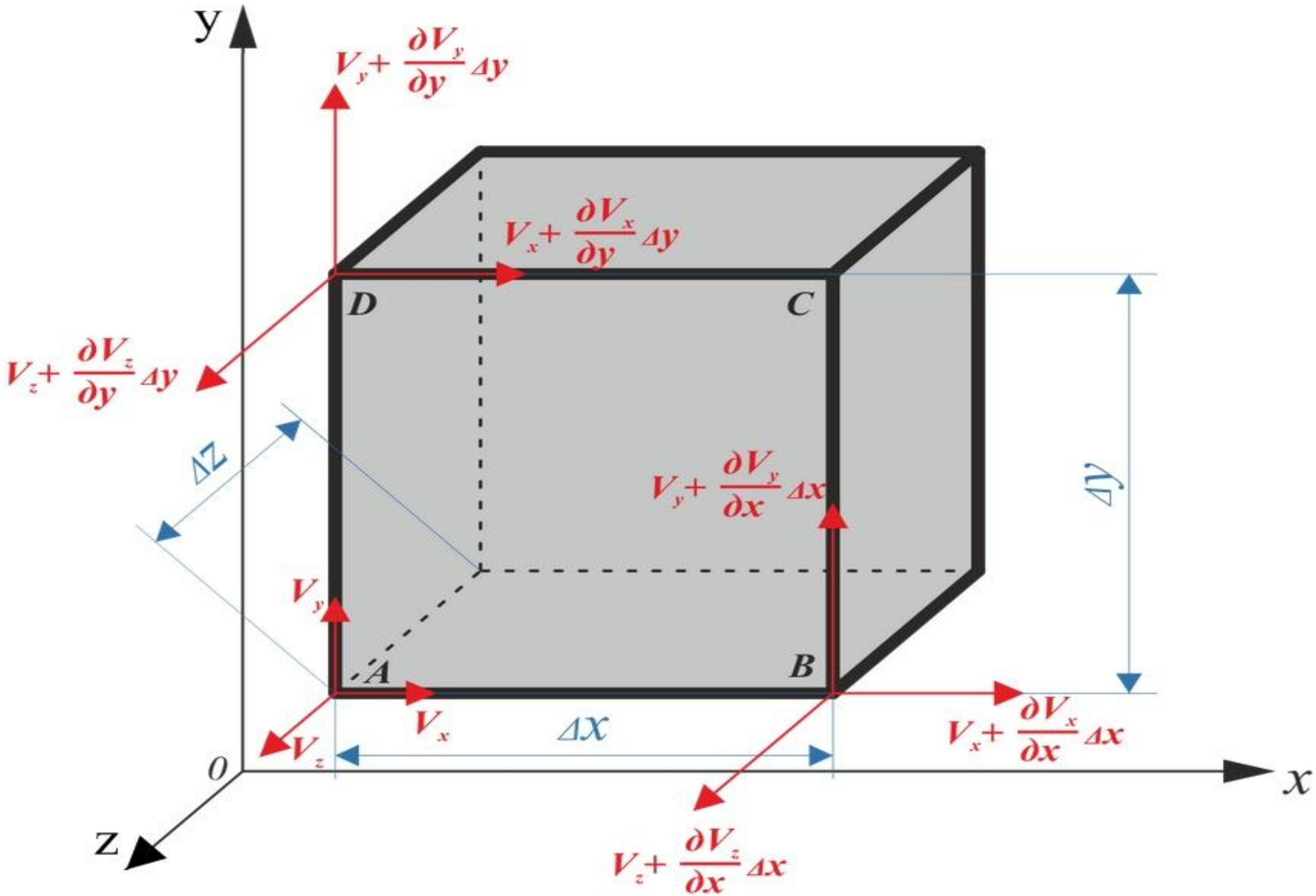


Рисунок 4.3 – Общее движение жидкой частицы

Вращательное движение жидкой частицы

Будем полагать вектор скорости ***непрерывной функцией*** координат и времени.

Непрерывная функция является ***дифференцируемой*** функцией.

Дифференцируемая функцией может быть разложена в ***ряд Тейлора***.

Вращательное движение жидкой частицы

Пусть все производные компоненты скорости равны нулю.

Пусть только в момент времени t=const

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} \neq 0$$

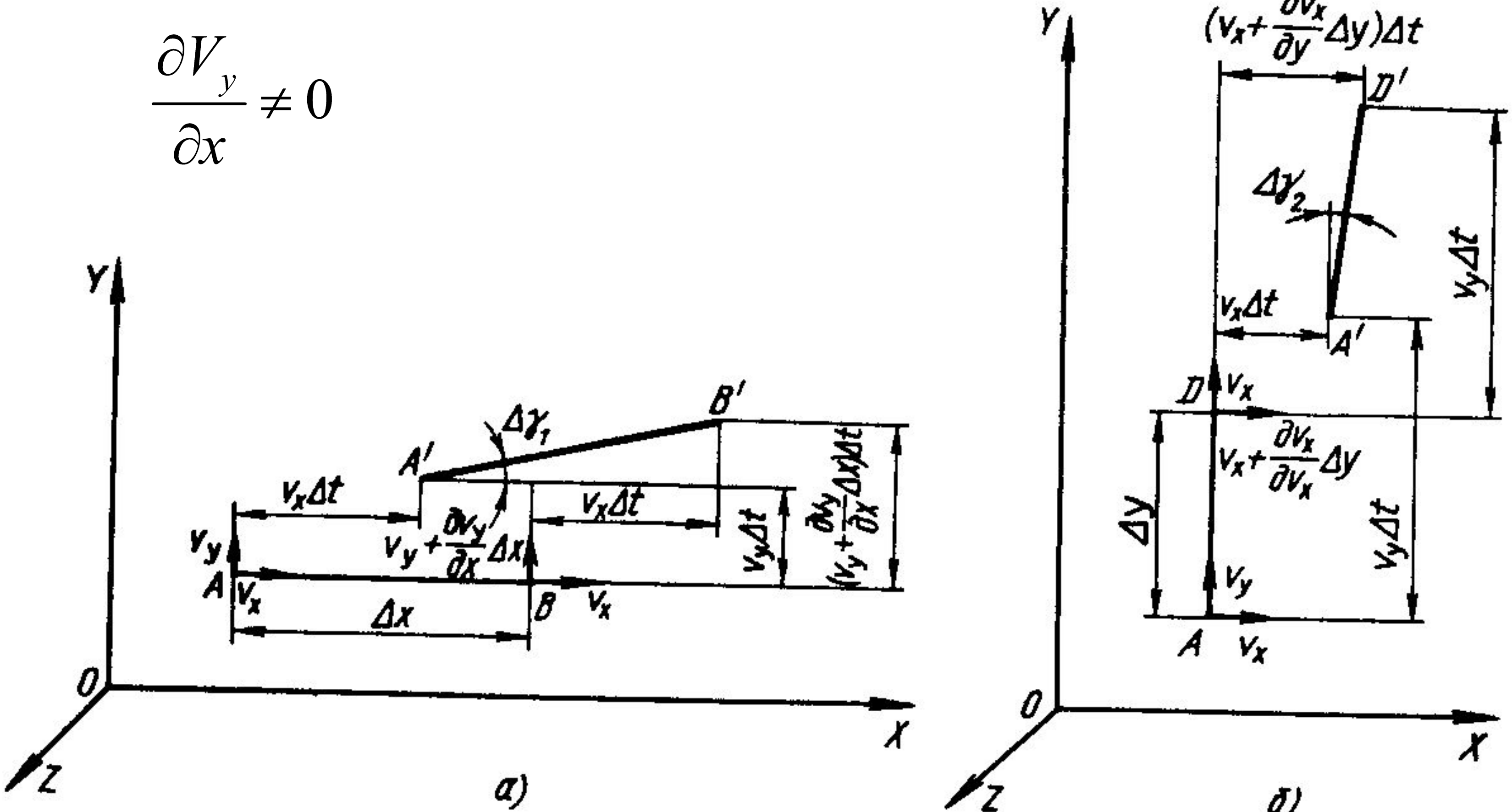


Рисунок 4.4 – Вращательное движение ребра AB жидкой частицы

Вращательное движение жидкой частицы

$$\Delta\gamma_1 \approx \operatorname{tg}(\Delta\gamma_1) = \frac{\left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t - v_y \Delta t}{\Delta x} = \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta t. \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} \neq 0$$

$$\Delta\gamma_2 \approx \operatorname{tg}(\Delta\gamma_2) = \frac{\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t - v_x \Delta t}{\Delta y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta t. \quad (4.21)$$

Правило знаков: вращение против часовой стрелки «+», а по часовой – «-»

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\gamma_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\gamma_2}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \quad (4.22)$$

Вращательное движение жидкой частицы

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \end{vmatrix}, \qquad (4.23)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}\right); \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}\right); \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right).$$

(4.24)

Деформационное движение жидкой частицы

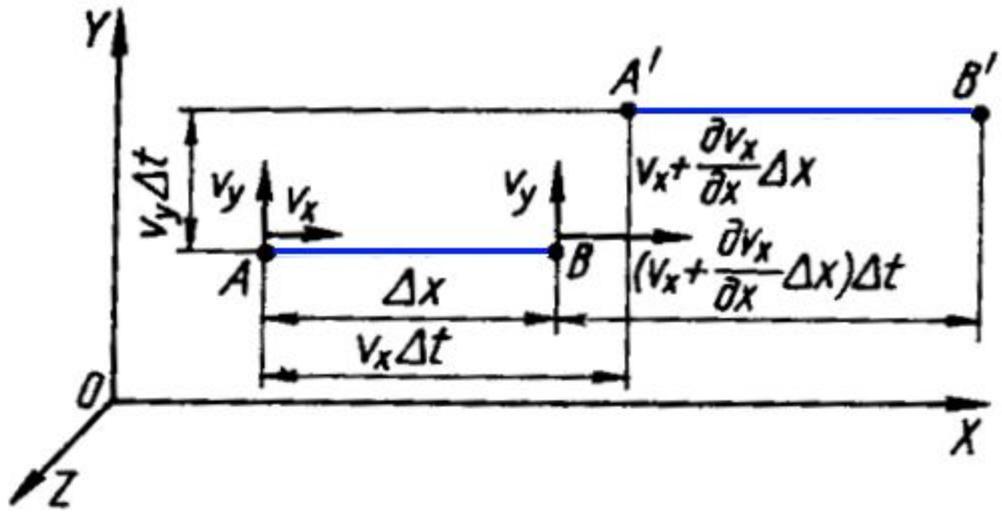


Рисунок 4.5 – Деформационное движение ребра АВ жидкой частицы

$$\Delta x_1 = \Delta x + \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t - v_x \Delta t. \qquad (4.25)$$

$$e_{xx} = \frac{\Delta x_1 - \Delta x}{\Delta x \Delta t} = \frac{\partial v_x}{\partial x}. \qquad (4.26)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad e_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \qquad (4.27)$$

Деформация скашивания при движении жидкой частицы

$$2e_{xy} = 2e_{yx} = \frac{\Delta\gamma_1}{\Delta t} - \frac{\Delta\gamma_2}{\Delta t} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}. \qquad (4.28)$$

$$2e_{zy} = 2e_{yz} = \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z};$$

$$(4.29)$$

$$2e_{xz} = 2e_{zx} = \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}.$$

Тензор скоростей деформаций $\dot{S} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}$ (4.30)

Уравнение неразрывности

Относительное изменение объёма по времени равно

$$\theta = \frac{1}{\Delta W}\frac{d(\Delta W)}{dt} = div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (4.31)$$

$$m = const \qquad (4.32)$$

$$\frac{dm}{dt} = 0, \quad m = \rho \cdot W \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho \cdot W)}{dt} = W\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{dW}{dt} = 0 \qquad (4.33)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + div\vec{V} = 0 \qquad (4.34)$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot div\vec{V} = 0} \qquad (4.35)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\rho\right), \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underbrace{\left(\vec{V}\cdot\nabla\rho\right) + \rho\cdot div\vec{V}}_{div\left(\rho\cdot\vec{V}\right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\cdot\vec{V}\right) = 0$$

(4.36)

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\cdot\vec{V}\right) = 0}$$

(4.37)

Уравнение неразрывности

Частные случаи уравнения неразрывности

1) **Установившиеся течение**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow div\left(\rho \cdot \vec{V}\right) = 0$$

(4.38)

$$div\left(\rho \cdot \vec{V}\right) = \frac{\partial\left(\rho \cdot V_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho \cdot V_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho \cdot V_z\right)}{\partial z}$$

2) **Несжимаемое течение**

$$\rho = const \quad \Rightarrow \quad div\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \qquad (4.39)$$

$$div\vec{V} = 0$$