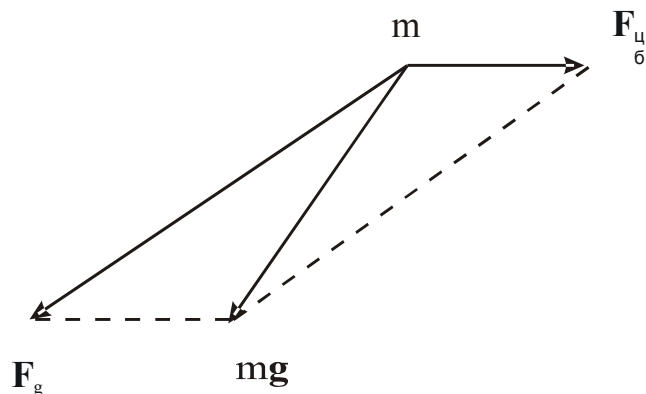


Механика

Лекция 6

Момент Инерции. Уравнение моментов.

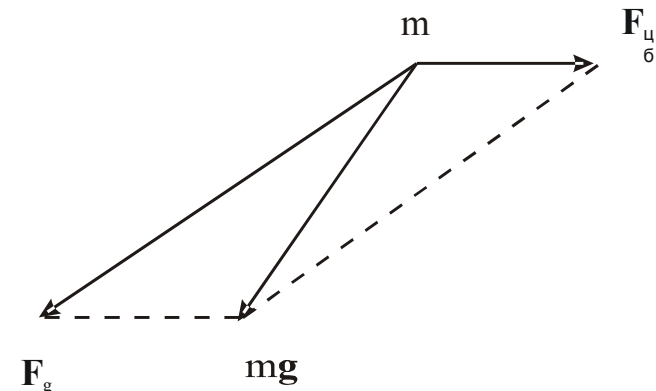
Вес тела и сила тяжести



Весом тела называется сила, с которой тело действует на опору или подвес вследствие гравитационного притяжения.

В условиях Земли – вследствие притяжения к Земле. Вес тела не надо путать с **силой тяжести $P = mg$** , где **g** - одинаковое для всех тел вблизи вращающейся (т.е. во вращающейся системе отсчета) поверхности Земли ускорение, называемое ускорением свободного падения. **P** хотя и обусловлена притяжением тел к Земле но **результат двух сил и не равна силе гравитационного притяжения тела F_g из-за действия $F_{цб}$** .

Различие силы тяжести и веса



На любое тело, находящееся на поверхности Земли (кроме полюса) действует центробежная сила инерции $F_{цб}$, что и приводит к некоторому

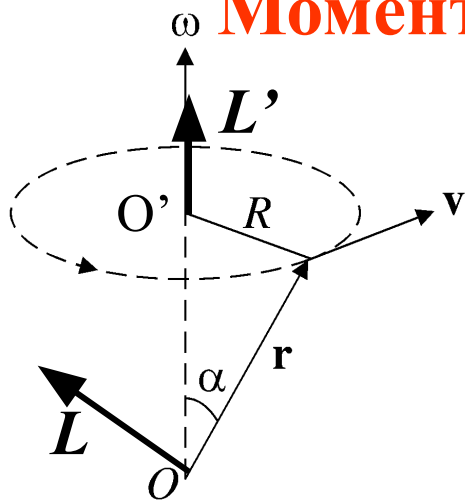
различию силы тяжести P и силы гравитационного притяжения F_g как по величине, так и по направлению. Те во вращающейся системе отсчета складываем два вектора

$$P = mg = F_g + F_{цб} \quad |F_{цб}| = m\omega_3^2 R_3 \cos \phi$$

Результирующая сила направлена не к центру Земли.

Максимальное различие получается **на экваторе** и составляет 0,3% от силы P . На экваторе на тело массой 1 кг действует $F_{цб} = 0.0337 \text{ Н} = 1/291 mgh$. Т.е. в ряде случаев ей можно пренебречь. Угол между направлениями векторов P и F_g также очень мал и его max значение равно 0,0018 рад (на широте 45 градусов).

Момент инерции МТ относительно оси вращения



Величина угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Изменение угловой скорости со временем определяется вектором углового ускорения

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dot{\omega}$$

При вращении по окружности **момент импульса МТ L**

относительно точки O : $L = [r, mv]$ и направления векторов L и ω не совпадают если точка O не в центре окружности. Если движение идет по окружности и точка O' в центре окружности, то направления векторов L' и ω совпадают.

$$L' = Rmvs \sin 90^\circ = Rmv = Rm \cdot \omega R = mR^2 \omega = I\omega$$

Скалярная величина $I = mR^2$ называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения.

Уравнение моментов для материальной точки

Как уже говорилось момент импульса **MT**, двигающейся по окружности:

$$L = mR^2\omega = I\omega$$

Производная по времени равна:

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\beta$$

В соответствии с законом изменения момента импульса для **MT** получаем:

$$I\beta = \sum_i N_{\text{ивнеш}}$$

Абсолютно твердое тело

Под твердым телом будем подразумевать **абсолютно твердое тело**, в котором расстояния между любыми двумя точками неизменны. Твердое тело можно представить как совокупность большого количества очень малых масс Δm_i , которые можно считать **МТ**.

Теорема о движении центра масс твердого тела:

центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, и к которой приложены все внешние силы, действующие на тело. **Т.е. раньше мы говорили о МТ и о системе МТ и ее центре масс, теперь еще и об абсолютно твердом теле.**

Момент инерции твердого тела

Твердое тело можно представить как систему **МТ**, удерживаемых внутренними силами на неизменных расстояниях друг от друга и по аналогии с **МТ** записать:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{N}_{\text{внеш}}$$

Пусть момент импульса i -й частицы, r_i — радиус окружности, по которой движется **МТ** Δm_i относительно оси вращения тела.

Направление L_i относительно оси вращения всех точек тела одинаковое, так как в каждый момент времени направление и величина угловых скоростей всех точек одинаковы (тело твердое).

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \boldsymbol{\omega} \sum \Delta m_i r_i^2 = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$$

Величина $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ называется **моментом инерции твердого тела** относительно данной оси. Направление векторов \mathbf{L} и $\boldsymbol{\omega}$ совпадают только в случае симметричного тела.

Уравнением моментов

Подставим момент импульса тела $L = I\omega$ $\frac{dL}{dt} = I\beta = \sum N_{\text{внеш}}$

Это закон изменения момента импульса твердого тела или основной закон динамики для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Как и в случае с **МТ** можно сопоставить все величины для поступательного и вращательного движения.

Заменив в выражении для кинетической энергии $T = \frac{mv^2}{2}$ массу на момент инерции I , а скорость v на угловую скорость ω получим кинетическую энергию вращающегося вокруг **неподвижной** оси тела или просто подставив $v = \omega R$:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

1. Скамья Жуковского $T = \text{const}$? Произведение момента инерции на угловую скорость в замкнутой системе ($N = 0$) остается постоянным?
2. Видео с вращением штанги.

Момент инерции сложных тел

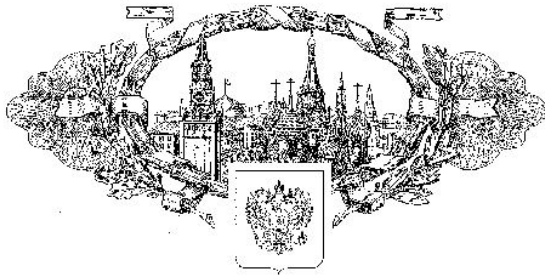
Для полного определения момента инерции более сложных тел выражение $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ следует уточнить, устремив элемент Δm_i к нулю и найдя соответствующий предел:

$$I = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum r_i^2 \Delta m_i$$

Как известно, такой предел называется интегралом:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

Интегрирование производится по всему объему тела V . Если плотность тела ρ постоянна, то ρ можно вынести из под знака интегрирования. **Но даже для яйца (желток, белок и скорлупа имеют разную плотность)! Земля?**



ПАТЕНТ

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 135507

НАГРЕВАТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ НАГРЕВА ЯИЦ

Изобретатель(ы): Тишин Александр Металлинович (RU)

Автор(ы): Тишин Александр Металлинович (RU)

Заявка № 2013127777

Приоритет полезной модели 19 июня 2013 г.

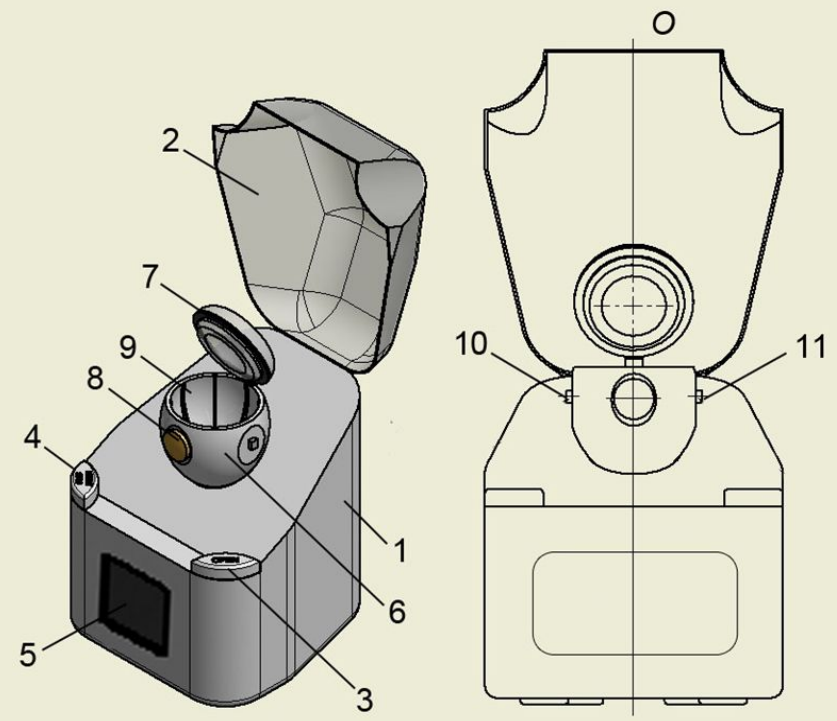
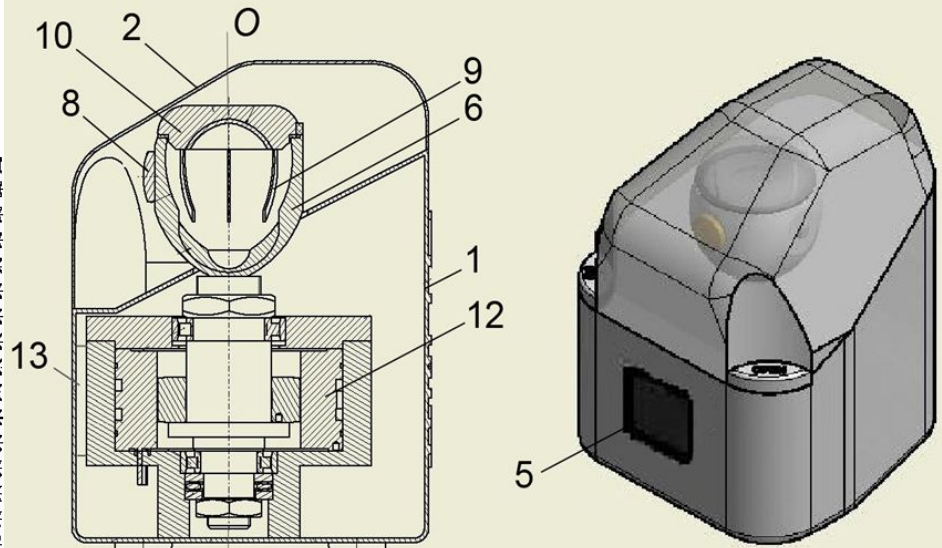
Зарегистрировано в Государственном реестре полезных моделей Российской Федерации 20 декабря 2013 г.

Срок действия патента истекает 19 июня 2023 г.

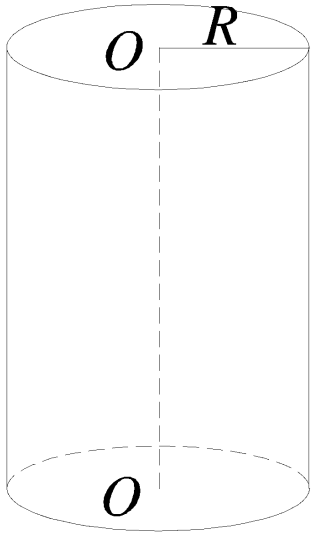
Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

В.Н. Симонин

И.И. Симонин



Момент инерции полого цилиндра



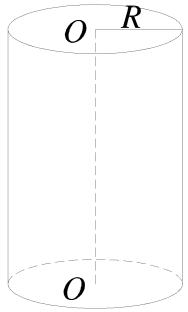
Найдем момент инерции **полого** цилиндра относительно его оси симметрии OO' .

$$I = \sum \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 m = mR^2$$

где m — масса цилиндра.

Итак, момент инерции **полого** цилиндра прямо не зависит от высоты этого цилиндра (косвенно естественно зависит так как чем больше высота тем больше площадь и масса). Точно также выглядит и выражение для момента инерции **обруча**.

Момент инерции сплошного цилиндра и однородного шара



Момент инерции **сплошного однородного цилиндра** относительно оси симметрии OO можно найти разбив его на цилиндры радиуса r и толщиной dr . Так как объем одного слоя равен $dV=2\pi r h dr$ то

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \int r^2 \rho 2\pi r h dr = 2\pi \rho h \int r^3 dr =$$
$$2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \rho (\pi R^2 h) \frac{R^2}{4} = \rho V \frac{R^2}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

ρ - плотность, dr и h –толщина и высота цилиндра . А у полого цилиндра было mR^2 . **Чем дальше удалена масса от центра тем больше I** . При равных m и R у полого момент инерции I в 2 раза больше

1. **Опыт с двумя скатывающимися цилиндрами.**
2. **Опыт со скатыванием пенопласта не через главную ось**

Фигуристка на льду и Торнадо: Что общего?

Сохранение кинетической энергии?

Приблизительно !

Торнадо – увеличивается масса того, что поднято с Земли - увеличивается момент инерции и увеличивается кинетическая энергия. Как зависит I от радиуса торнадо ? Узнаем чуть позже $\sim R^2$

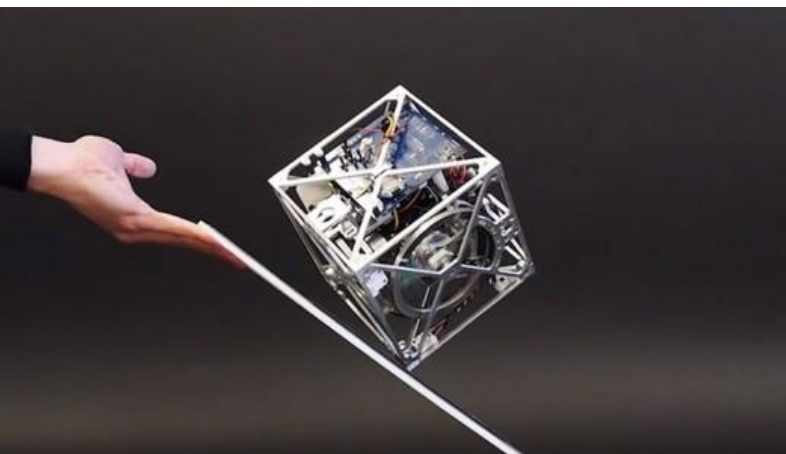
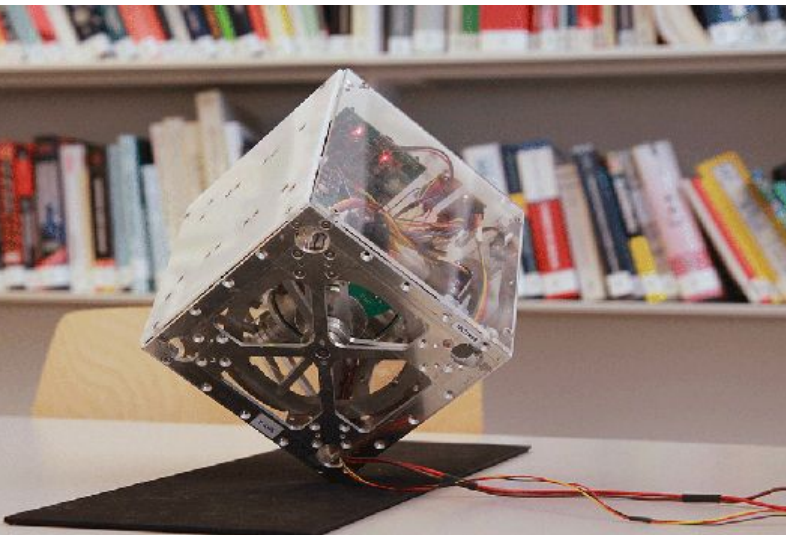
Куда расходуется кинетическая энергия? Вспомним :

машины, цунами, лавины.....

Демонстрации на момент инерции

1. **Гироскопы не путать с гороскопами**
2. **Волчки**
3. **Прошу принести на следующую лекцию два куриных яйца. Одно сырое, другое сваренное вкрутую. Лучше кто живет в общежитии**
4. **Китайский волчок (момент силы трения)**
5. **Кусок пенопласта 3 оси (при вращении выходит на главную ось)**
6. **Палочки кельтов (срезаны наискосок)**

Условия равновесия твердого тела



В общем случае для равновесия абсолютно твердого тела необходимо выполнение двух условий.

1. Сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0$$

2. Сумма моментов внешних сил относительно любой точки должна быть равна нулю:

$$\sum_i \mathbf{N}_{\text{внеш}} = 0$$

Момент инерции в природе



Самолеты убирают шасси во время полета, а, например, пчелы, напротив, вытягивают вперед задние лапки для того, чтобы лететь устойчиво с большей скоростью.

При максимальной скорости в 7.25 м/с пчелы теряют вращательную устойчивость. Это говорит о том, что скорость пчелы ограничивает не сила мускулов или амплитуда машущих крыльев, а наклон тела и умение балансировать в неустойчивом положении. Т.е. определенной скорости пчелы умеют управлять своим моментом инерции и изменять момент импульса так, чтобы обеспечить условия равновесия (нулевую сумму моментов внешних сил).

Факультативно: приливы, отливы и не только?

- Гравитация действует не только на Земле. Земля притягивается силами гравитации к другим телам, включая Солнце и Луну. Луна 19 марта 2011 подошла к Земле на самое близкое расстояние, начиная с 1992 года. Предыдущие фазы максимального сближения происходили в 1955, 1974, 1992 и 2005 годах.
- 2005 - мощный цунами Индонезии за две недели до перигея.
- 1974 - циклон Трэйси в австралийском городе Дарви.
- **Возможное проявление воздействия дополнительных сил и/или моментов сил, нарушающих равновесное состояние плит внутри Земли ?**

Механика поступательного и вращательно движения относительно неподвижной оси

Все выражения для **МТ** и для твердого тела внешне очень похожи. 2-го закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = ma = \sum F_i \qquad \frac{dL}{dt} = I\beta = \sum_i N_{\text{ивнеш}}$$

Аналогами также являются:

координата	x	- угол ϕ ,
линейной скорости	v	- угловая скорость ω ,
линейного ускорения	a	- угловое ускорение β ,
массы	m	- момент инерции I ,
силы	F	- момент силы N ,
импульса	p	- момент импульса L ,
кинетическая энергия	$mv^2/2$	- кинетическая энергия $I\omega^2/2$,
работа	$dA = F_s ds$	- работа $dA = N_\omega d\phi$
мощность	$P = F_v v$	- $P = N_\omega \omega$

Момент инерции сплошного однородного шара. Земля?

- **11** марта **2011** года (мистика? нет! а разрушение двух небоскребов в США **11** сентября **2001** года ?) в Японии произошла серия сильнейших за 140 лет землетрясений, силой до 8,9 по шкале Рихтера, что спровоцировало цунами. Волна высотой до 10 метров проникла вглубь на несколько километров, и израсходовали свою кинетическую энергию на уничтожение всего на своем пути. Ось вращения Земли после японского землетрясения могла кратковременно сместиться на 10-15 см. Печальное следствие $\frac{dI\omega}{dt} = \sum N_{\text{внеш}}$. По сути тот же гироскоп, который мы уже обсуждали. Момент инерции **однородного шара** относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

- Для оценки если масса Земли приблизительно равна 6×10^{24} кг и считая Землю однородным шаром радиусом $6,4 \times 10^6$ м. Можно оценить $I = 9,8 \times 10^{37}$ кг м². Близко! Так как общепринятое значение 8×10^{37} кг м². На самом деле моменты инерции внутреннего ядра, внешнего ядра, мантии и коры могут отличаться и лежать в диапазоне от $5,8 \times 10^{34}$ до 7×10^{37} кг м²
- <http://lnfm1.sai.msu.ru/~chujkova/Trudi/zharov.htm>

Факультативно: Безразмерный момент инерции

Безразмерный момент инерции твердого тела радиуса R и массы m равен отношению его момента инерции относительно оси вращения к моменту инерции MT той же массы $I = mR^2$ относительно неподвижной оси вращения, расположенной на расстоянии R . Как мы уже знаем MT отличается от однородного шара на $2/5=0.4$

Безразмерный момент инерции Земли равен $0,335$, что меньше, чем у шара и что является аргументом в пользу неравномерного распределения массы (существования плотного ядра).

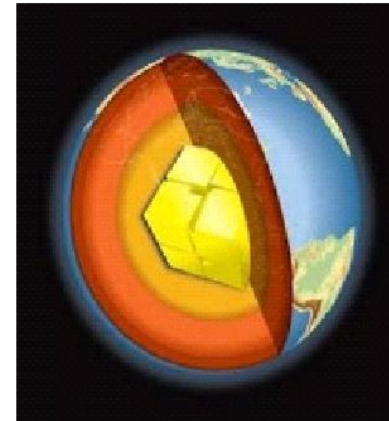
Факультативно: ядро Земли кристалл?



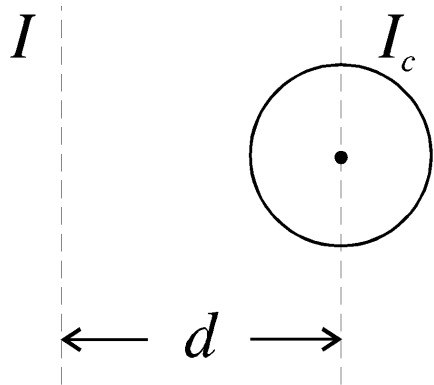
- проф. Борье Йоханссон (Börje Johansson), Факультет материаловедения и машиностроения Королевский технологический институт (Швеция), председатель и член Нобелевского комитета по физике, член Шведской королевской академии наук, почётный профессор МИСиС.

Профессор Йоханссон является одним из авторов концепции, согласно которой ядро Земли является кристаллом с кубической решёткой. Твёрдое железное ядро Земли обладает кристаллической структурой с объёмноцентрированной кубической

решеткой (в одной ячейке такой решётки атомы расположены по углам куба и ещё один атом — в центре куба). Данная теория способна перевернуть существующие представления о природе нашей планеты и о её магнитном поле. Статья, посвящённая этому исследованию, была опубликована в авторитетном научном журнале "Science".



Теорема Штейнера



Зная момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, момент инерции относительно произвольной оси вычисляют по **теореме Штейнера**:

момент инерции относительно произвольной оси I равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями d .

$$I = I_c + md^2$$

Вспомним опыт с гантелями на скамье Жуковского

