

# Единицы для силы и импульса

Для сравнения разных сил можно использовать тот же способ, что для сравнения разных масс, но на этот раз брать одно и то же тело (фиксировать массу). Если тело получает ускорение в 2 раза больше, значит, сила вдвое больше и т.п.

Далее следует выбрать единицу измерения силы. При этом можно получить не только саму единицу, но и выбрать коэффициент пропорциональности в  $\mathbf{w} \sim \mathbf{F}/m$  равным 1. В системе СИ единицей силы является *ньютон*. 1 ньютон это сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с<sup>2</sup>.

$$[F] = \text{Н} = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$$

Заодно нужно определить единицу измерения импульса:

$$[p] = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с} = \text{Н}\cdot\text{с}$$

После такого выбора единиц измерения соотношения пропорциональности превращаются в уравнения:

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F} \text{ (основное уравнение динамики)} \text{ и } \mathbf{w} = \mathbf{F}/m$$

# Соотношение I и II законов Ньютона

1-е заблуждение: I ЗН не самостоятельный закон, а частный случай II ЗН при  $F = 0$ .

2-е заблуждение: II ЗН противоречит простым наблюдениям: если наблюдатель движется с ускорением, то окружающие предметы движутся с ускорением в противоположную сторону.

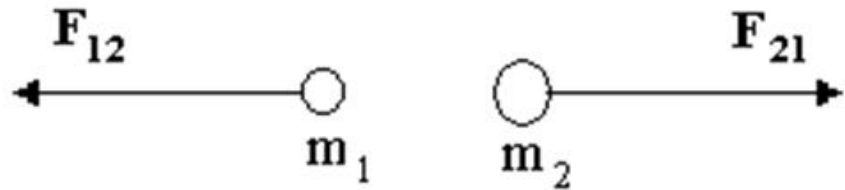
**II ЗН справедлив не для всех систем отсчета, а только для некоторых из них, а именно, для инерциальных СО (ИСО).**

Существуют ли ИСО?

Ответы дает I ЗН. Признак ИСО  $w = 0$  при  $F = 0$ .  
Существование таких СО обещает I ЗН. *В этом состоит второй важный смысл I ЗН.*

Принцип относительности утверждает, что все СО, движущиеся равномерно и прямолинейно друг относительно друга, эквивалентны, т.е. если существует одна ИСО, то существует и бесконечное множество других.

# III закон Ньютона



При взаимодействии 2 тел силы, с которыми они действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

$$\mathbf{F}_{12} = - \mathbf{F}_{21}$$

Существенно, что силы  $\mathbf{F}_{12}$  и  $\mathbf{F}_{21}$  приложены к разным телам.

III ЗН справедлив в любых, а не только в инерциальных СО.

# Динамические уравнения движения

Законы Ньютона  $\Rightarrow$

*дифференциальные уравнения (ДУ) =  
динамические уравнения движения.*

Решения *динамических уравнений  
движения*  $\Rightarrow$

кинематические уравнения движения,  
т.е. зависимости от времени  
координат и скоростей тел.

# Простой пример

Движение МТ вдоль оси  $Ox \Rightarrow$  уравнение движения:

$$w_x = F_x / m \text{ или } d^2x/dt^2 = F_x / m$$

Получить проекцию скорости  $v_x =$  найти (угадать, найти в таблице или справочнике) первообразную для функции в ПЧ этого уравнения :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \int F_x dt$$

Для простоты:  $F_x = \text{const} \Rightarrow v_x = (F_x / m) t + C_1$ ,  
где  $C_1$  – константа интегрирования.

Далее найти первообразную для  $v_x$ :

$$x = \int v_x dt = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2 + C_1 t + C_2$$

$C_2$  – вторая константа интегрирования.

# Константы интегрирования и начальные условия

Решение с конст-ми интегрирования – общее решение.

Константы интегрирования  $\Leftarrow$  начальные условия (НУ). т.е. значения  $v_x$  и  $x$  в начальный момент времени.

Их подставить в общее решение и найти С:

$$v_x = (F_x / m) t + v_0$$
$$x = \frac{1}{2}(F_x / m) t^2 + v_0 t + x_0$$

Решение ДУ (и систем ДУ, т.к. нужны еще уравнения для 2 других координат и для других тел) требует некоторых математических навыков.

**Поэтому** стараются избегать ДУ и получать решения из законов сохранения (ЗС), т.е. соотношений для ФВ, которые сохраняют свои начальные значения при некоторых условиях.

# Закон сохранения импульса

Движение МТ, на которую не действуют никакие силы или

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const \Rightarrow \text{импульс МТ остается}$$

постоянным (сохраняется)  $\vec{v} = const = \vec{v}_0$  - без решения ДУ.

Когда будет похожий результат, если силы ненулевые?

Система N тел (МТ), между ними действуют силы  $\mathbf{F}_{ik}$ , но другими сил нет (другие тела находятся далеко). Такая система тел называется замкнутой.

$$\text{Для каждой МТ: } \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum \vec{F}_{ik} \quad (\text{при этом } i \neq k)$$

$$\text{Сумма этих соотношений: } \sum \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum \sum \vec{F}_{ik}$$

В ЛЧ меняем местами суммирование и дифференцирование:

$$\sum \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\sum \vec{p}_k) = \frac{d\vec{P}}{dt}, \text{ где } \vec{P} = \sum \vec{p}_k \text{ - суммарный (полный)}$$

импульс системы.

# Закон сохранения импульса для замкнутой системы

В ПЧ слагаемые группируют так, чтобы  $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$  стояли рядом. Тогда выяснится, что ПЧ = 0.

$$d\mathbf{P}/dt = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{const}$$

Это соотношение выражает *закон сохранения импульса* (ЗСИ) для замкнутой системы.

Какая польза? Теперь вместо  $3N$  ДУ можно решать только  $3(N - 1)$ , т.к. импульс, например, последнего тела  $\mathbf{p}_N = \mathbf{P} - \sum \mathbf{p}_i$  (суммирование по  $N - 1$  тел) получается из решения укороченной системы.



# Закон сохранения и изменения импульса незамкнутой системы

Если система незамкнутая, т.е. кроме внутренних сил действуют и внешние силы, то:  $\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum \vec{F}_{ik}^{int} + \vec{F}_k^{ext}$

Индексы int = internal, внутренний; ext – external, внешний.

После суммирования:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \sum \vec{F}_{ik}^{int} + \sum \vec{F}_k^{ext}$$

I слагаемое в ПЧ дает 0, а II - сумма всех внешних сил, действующих на систему  $\vec{F}^{ext} = \sum \vec{F}_k^{ext}$ :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

Изменение полного импульса системы происходит под действием только внешних сил.

Это соотношение выражает закон сохранения и **изменения** импульса для незамкнутой системы.

# Теорема о движении центра масс

Его можно привести к виду  $\mathbf{w} = \mathbf{F}/m$ .

Центр масс (ЦМ), или центр инерции, системы:

$$\vec{R} = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k}$$

Здесь  $m_k$  и  $\vec{r}_k$  – массы и РВ отдельных частей системы,  $\vec{R}$  – радиус-вектор ЦМ, а общая масса системы  $M = \sum m_k$

При этом  $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}^{ext}$  превращается в:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{ext} \quad \text{или} \quad M \vec{W}_c = \vec{F}^{ext}$$

где  $\vec{W}_c$  – ускорение ЦМ.

Эти соотношения выражают теорему о движении ЦМ.

ЦМ – воображаемая точка, в ней не обязательно должно находиться какое-то тело. Например, для 3 одинаковых грузиков, соединенных легкими стержнями, ЦМ находится в точке пересечения медиан треугольника, образованного стержнями. Часто удобно помещать начало координат в ЦМ (система ЦМ).

# Применимость закона сохранения импульса

Из теоремы о движении ЦМ можно сделать вывод о том, когда можно пользоваться ЗСИ:

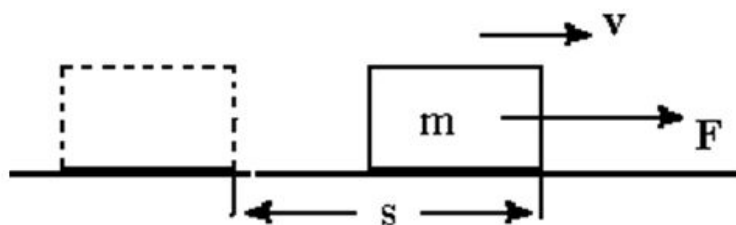
1. если система замкнутая;
2. если система незамкнутая, но  $\sum \overrightarrow{F}_k^{ext} = 0$ ;
3.  $\sum \overrightarrow{F}_k^{ext} \neq 0$ , но ее проекции на какие-либо оси = 0 (удачно выбраны оси)  $dP_x/dt = 0 \Rightarrow P_x = \text{const}$

В теор. физике есть мнение, что ЗСИ более общий, чем законы Ньютона. Это верно в том смысле, что он справедлив и за пределами классической механики, но для этого приходится обобщать то понятие импульса, которое дается законами Ньютона.

Из  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$  можно получить изменение импульса  $\Delta \mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt$ , но практическое интегрирование может быть затруднено, если  $\mathbf{F}$  меняется в пространстве  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , а  $\mathbf{r}(t)$  должно получиться только после решения уравнения движения. В этом случае требуется другой подход, другой закон сохранения.

# Работа и кинетическая энергия

Импульс силы  $F \Delta t \Rightarrow \int F dt$  характеризует действие силы пропорционально времени. Другая мера действия силы, она пропорциональна пути пройденному телом – *работа*.



Если направления  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{v}$  совпадают, то работа:

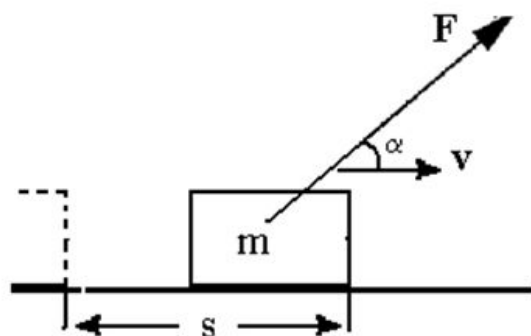
$$A = F s$$

Преобразование:

$$A = m w \langle v \rangle t = m w t \cdot \frac{1}{2}(v_0 + v) = \frac{1}{2} m (v - v_0)(v_0 + v) =$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = K - K_0$$

$K = E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m v^2$  – *кинетическая энергия (КЭ)*, т.е. работа силы превращается в КЭ тела.



Если направления  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{v}$  не совпадают, то:

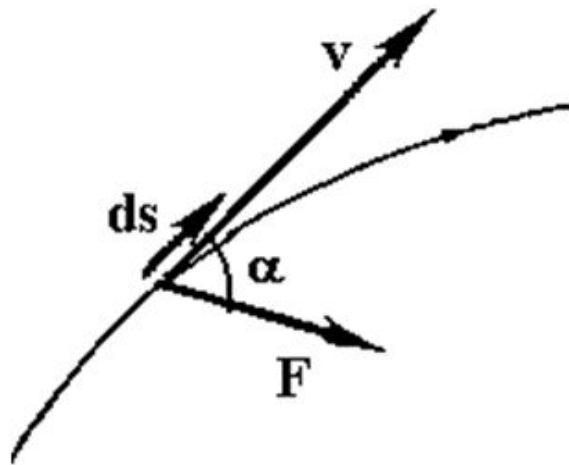
$$A = F s \cos \alpha = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Работа может быть положительной ( $\uparrow$  КЭ) и отрицательной ( $\downarrow$  КЭ).

Единицей измерения работы и КЭ является *джоуль*:

$$[A] = [K] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{кг м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж}$$

# Работа и КЭ при криволинейном движении



Для криволинейного движения и под действием переменной силы вводят элемент (дифференциал) работы:

$$dA = F ds \cos\alpha = (\vec{F}, \vec{ds})$$

Здесь  $\vec{ds} = \vec{v} dt$  – элементарный вектор перемещения, а работа определяется как скалярное

произведение силы на перемещение.

$$dA = (\mathbf{F}, \mathbf{ds}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v} dt) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}) dt = d(p^2/2m) = d(m v^2/2) = dK - \text{дифференциал КЭ}$$

$$A = \int dA = \int_a^b (\vec{F}, \vec{ds}) = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}, \vec{v}) dt$$

# Консервативные силы

Особо выделяют т.н. *консервативные* силы – для которых работа по перемещению тела из одной точки в другую не зависит от траектории, а зависит только от положения этих точек.

$$A_{12} = \int (\vec{F}, \vec{ds})_a = \int (\vec{F}, \vec{ds})_b = \int (\vec{F}, \vec{ds})_c$$

Если это условие выполняется, то работа при перемещении по замкнутой траектории равна 0:

$A = A_{1\alpha 2} + A_{2\beta 1} = A_{1\alpha 2} + (-A_{1\beta 2}) = 0$   
т.к. при изменении направления движения на участке  $\beta$  меняются знаки косинусов.

Эти 2 свойства консервативных сил находятся во взаимно однозначном соответствии

Те силы, для которых это не справедливо, относятся к *неконсервативным*.

