Единицы для силы и импульса

Для сравнения разных сил можно использовать тот же способ, что для сравнения разных масс, но на этот раз брать одно и то же тело (фиксировать массу). Если тело получает ускорение в 2 раза больше, значит, сила вдвое больше и т.п.

Далее следует выбрать единицу измерения силы. При этом можно получить не только саму единицу, но и выбрать коэффициент пропорциональности в $\mathbf{w} \sim \mathbf{F}/m$ равным 1. В системе СИ единицей силы является *ньютон*. 1 ньютон это сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2.

$$[F] = \text{Н} = \text{кг}\cdot\text{м/с}^2$$

Заодно нужно определить единицу измерения импульса:

$$[p] = \text{кг}\cdot\text{м/с} = \text{Н}\cdot\text{с}$$

После такого выбора единиц измерения соотношения пропорциональности превращаются в уравнения:

$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ (*основное уравнение динамики*) и $\mathbf{w} = \mathbf{F}/m$

Соотношение I и II законов Ньютона

1-е заблуждение: I ЗН не самостоятельный закон, а частный случай II ЗН при F = 0.

2-е заблуждение: II ЗН противоречит простым наблюдениям: если наблюдатель движется с ускорением, то окружающие предметы движутся с ускорением в противоположную сторону.

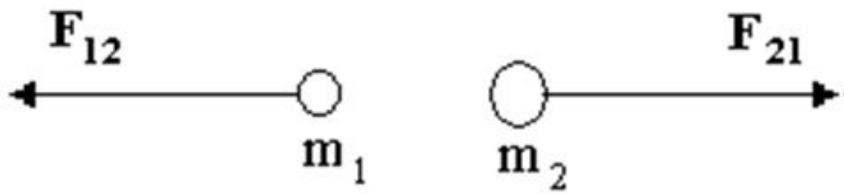
II ЗН справедлив не для всех систем отсчета, а только для некоторых из них, а именно, для *инерциальных СО* (ИСО).

Существуют ли ИСО?

Ответы дает I ЗН. Признак ИСО w = 0 при F = 0. Существование таких СО обещает 1 ЗН. *В этом состоит второй важный смысл 1 ЗН.*

Принцип относительности утверждает, что все СО, движущиеся равномерно и прямолинейно друг относительно друга, эквивалентны, т.е. если существует одна ИСО, то существует и бесконечное множество других.

III закон Ньютона



При взаимодействии 2 тел силы, с которыми они действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

$$\mathbf{F}_{12} = - \mathbf{F}_{21}$$

Существенно, что силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ приложены к разным телам.

III ЗН справедлив в любых, а не только в инерциальных СО.

Динамические уравнения движения

Законы Ньютона ⇨

дифференциальные уравнения (ДУ) =
динамические уравнения движения.

Решения *динамических уравнений движения* ⇨

кинематические уравнения движения,

т.е. зависимости от времени координат и скоростей тел.

Простой пример

Движение МТ вдоль оси Ох ⇨ уравнение движения:

$$w_x = F_x / m \text{ или } d^2x/dt^2 = F_x / m$$

Получить проекцию скорости v_x = найти (угадать, найти в таблице или справочнике) первообразную для функции в ПЧ этого уравнения :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\int F_x\, dt$$

Для простоты: F_x = const ⇨ $v_x = (F_x /m)\, t + C_1$,
где C_1 – константа интегрирования.
Далее найти первообразную для v_x:

$$x = \int v_x\, dt = ½\, \frac{F_x}{m} t^2 + C_1 t + C_2$$

C_2 – вторая константа интегрирования.

Константы интегрирования и начальные условия

Решение с конст-ми интегрирования – <u>общее решение.</u>

Константы интегрирования ⇦ <u>*начальные условия*</u> (НУ). т.е. значения v_x и x в начальный момент времени.

Их подставить в общее решение и найти С:

$$v_x = (F_x /m)\, t + v_0$$

$$x = ½(F_x /m)\, t^2 + v_0 t + x_0$$

Решение ДУ (и систем ДУ, т.к. нужны еще уравнения для 2 других координат и для других тел) требует некоторых математических навыков.

Поэтому стараются избегать ДУ и получать решения из <u>*законов сохранения*</u> (ЗС), т.е. соотношений для ФВ, которые сохраняют свои начальные значения при некоторых условиях.

Закон сохранения импульса

Движение МТ, на которую не действуют никакие силы или $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{dp}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const \Rightarrow$ импульс МТ остается постоянным (сохраняется) $\vec{v} = const = \overrightarrow{v_0}$ - без решения ДУ.

Когда будет похожий результат, если силы ненулевые?

Система N тел (МТ), между ними действуют силы **F_{ik}**, но другими сил нет (другие тела находятся далеко). Такая система тел называется *замкнутой*.

Для каждой МТ: $\frac{\overrightarrow{dp_k}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ik}}$ (при этом i ≠ k)

Сумма этих соотношений: $\sum \frac{\overrightarrow{dp_k}}{dt} = \sum \sum \overrightarrow{F_{ik}}$

В ЛЧ меняем местами суммирование и дифференцирование:

$\sum \frac{\overrightarrow{dp_k}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum \overrightarrow{p_k}) = \frac{\overrightarrow{dP}}{dt}$, где $\vec{P} = \sum \overrightarrow{p_k}$ – суммарный (полный) импульс системы.

Закон сохранения импульса для замкнутой системы

В ПЧ слагаемые группируют так, чтобы $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$ стояли рядом. Тогда выяснится, что ПЧ = 0.

$$d\mathbf{P}/dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathrm{const}$$

Это соотношение выражает *закон сохранения импульса* (ЗСИ) для замкнутой системы.

Какая польза? Теперь вместо 3N ДУ можно решать только 3(N – 1), т.к. импульс, например, последнего тела $\mathbf{p}_N = \mathbf{P} - \Sigma\mathbf{p}_i$ (суммирование по N - 1 тел) получается из решения укороченной системы.

Закон сохранения и изменения импульса незамкнутой системы

Если система незамкнутая, т.е. кроме внутренних сил действуют и внешние силы, то: $\frac{\overrightarrow{dp_k}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ik}^{int}} + \overrightarrow{F_k^{ext}}$

Индексы int = internal, внутренний; ext – external, внешний.

После суммирования:

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \sum\sum \overrightarrow{F_{ik}^{int}} + \sum \overrightarrow{F_k^{ext}}$$

I слагаемое в ПЧ дает 0, а II - сумма всех внешних сил, действующих на систему $\overrightarrow{F^{ext}} = \sum \overrightarrow{F_k^{ext}}$:

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \overrightarrow{F^{ext}}$$

Изменение полного импульса системы происходит под действием только внешних сил.

Это соотношение выражает *закон сохранения и* ***изменения*** *импульса* для незамкнутой системы.

Теорема о движении центра масс

Его можно привести к виду **w = F**/m.

Центр масс (ЦМ), или центр инерции, системы:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \frac{\sum m_k \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}}{\sum m_k}$$

Здесь m_k и $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{k}}$ – массы и РВ отдельных частей системы, $\vec{\boldsymbol{R}}$ - радиус-вектор ЦМ, а общая масса системы $M = \sum m_k$

При этом d**P**/dt = $\mathbf{F}^{\mathbf{ext}}$ превращается в:

$$M \frac{d^2 \vec{\boldsymbol{R}}}{dt^2} = \overrightarrow{F^{ext}} \quad \text{или } M\overrightarrow{W_c} = \overrightarrow{F^{ext}}$$

где $\overrightarrow{W_c}$ – ускорение ЦМ.

Эти соотношения выражают *теорему о движении ЦМ.*

ЦМ - воображаемая точка, в ней не обязательно должно находиться какое-то тело. Например, для 3 одинаковых грузиков, соединенных легкими стержнями, ЦМ находится в точке пересечения медиан треугольника, образованного стержнями. Часто удобно помещать начало координат в ЦМ (система ЦМ).

Применимость закона сохранения импульса

Из теоремы о движении ЦМ можно сделать вывод о том, когда можно пользоваться ЗСИ:

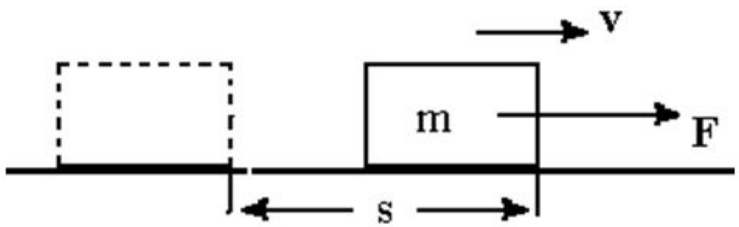
1. если система замкнутая;
2. если система незамкнутая, но $\sum \overrightarrow{F_k^{ext}} = 0$;
3. $\sum \overrightarrow{F_k^{ext}} \neq 0$, но ее проекции на какие-либо оси = 0 (удачно выбраны оси) $dP_x/dt = 0 \Rightarrow P_x = const$

В теор. физике есть мнение, что ЗСИ более общий, чем законы Ньютона. Это верно в том смысле, что он справедлив и за пределами классической механики, но для этого приходится обобщать то понятие импульса, которое дается законами Ньютона.

Из $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ можно получить изменение импульса $\Delta\mathbf{p} = \int\mathbf{F}dt$, но практическое интегрирование может быть затруднено, если $\mathbf{F}$ меняется в пространстве $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, а $\mathbf{r}(t)$ должно получиться только после решения уравнения движения. В этом случае требуется другой подход, другой закон сохранения.

Работа и кинетическая энергия

Импульс силы $F\,\Delta t \Rightarrow \int F dt$ характеризует действие силы пропорционально времени. Другая мера действия силы, она пропорциональна пути пройденному телом – *работа*.



Если направления **F** и **v** совпадают, то работа:

$$A = F\,s$$

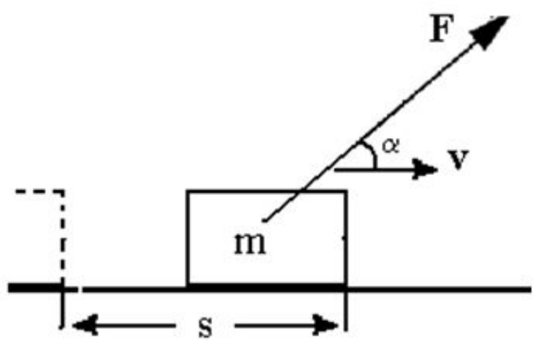
Преобразование:

$$A = mw\langle v\rangle t = mwt\cdot ½(v_0 + v) =$$

$$½m(v - v_0)(v_0 + v) =$$

$$½mv^2 - ½mv_0^2 = K – K_0$$

$K = E_{кин} = ½mv^2$ - *кинетическая энергия* (КЭ), т.е. работа силы превращается в КЭ тела.



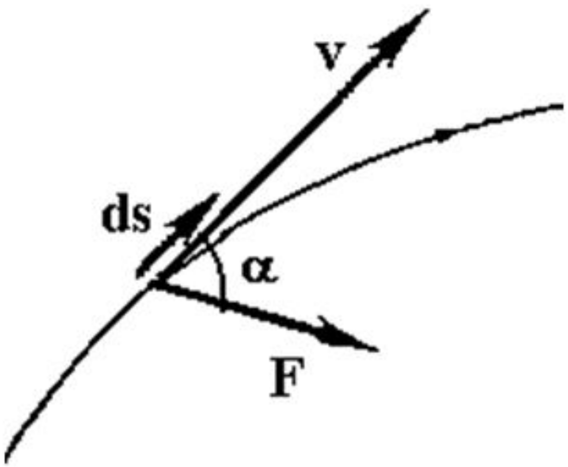
Если направления **F** и **v** не совпадают, то: $A = F\,s\cos\alpha = ½\,mv^2 - ½\,mv_0^2$

Работа может быть положительной (↑КЭ) и отрицательной (↓ КЭ).

Единицей измерения работы и КЭ является *джоуль*:

$$[A] = [K] = Н\cdot м = кг\ м^2/с^2 = Дж$$

Работа и КЭ при криволинейном движении



Для криволинейного движения и под действием переменной силы вводят элемент (дифференциал) работы:

$$dA = F\, ds\, cos\alpha = (\vec{F}, \overrightarrow{ds})$$

Здесь $\overrightarrow{ds} = \vec{v}\, dt$ – элементарный вектор перемещения, а работа определяется как скалярное произведение силы на перемещение.

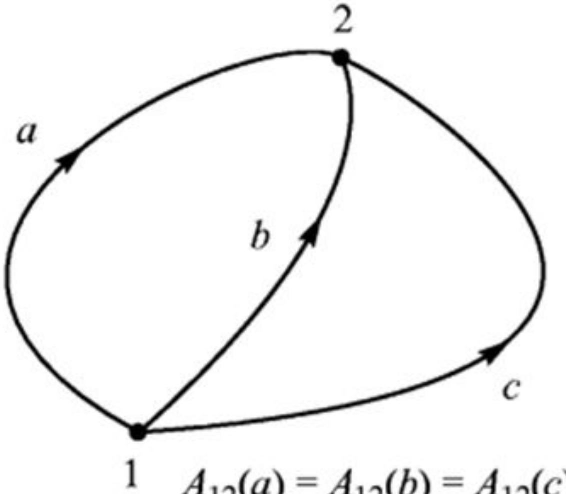
dA = (**F**, **ds**) = (**F**, **v** dt) = (**F**, **v**) dt = d(p^2/2m) = d(m v^2/2) = dK – дифференциал КЭ

$$A = \int dA = \int_a^b (\vec{F}, \overrightarrow{ds}) = \int_{t1}^{t2} (\vec{F}, \vec{v})dt$$

Консервативные силы

Особо выделяют т.н. *консервативные* силы – для которых работа по перемещению тела из одной точки в другую не зависит от траектории, а зависит только от положения этих точек.

$$A_{12} = \int (\vec{F}, \vec{ds})_a = \int (\vec{F}, \vec{ds})_b = \int (\vec{F}, \vec{ds})_c$$

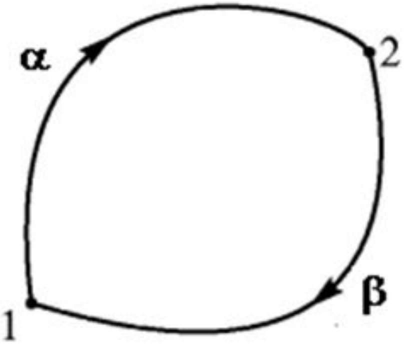


$A_{12}(a) = A_{12}(b) = A_{12}(c)$

Если это условие выполняется, то работа при перемещении по замкнутой траектории равна 0:

$A = A_{1\alpha 2} + A_{2\beta 1} = A_{1\alpha 2} + (-A_{1\beta 2}) = 0$

т.к. при изменении направления движения на участке β меняются знаки косинусов.



Эти 2 свойства консервативных сил находятся во взаимно однозначном соответствии

Те силы, для которых это не справедливо, относятся к *неконсервативным*.