Тема: Случайные величины.

Наряду со случайными событиями, характеризующими качественно процедуру проводимых испытаний, результаты опытов можно описать количественно.

Это приведёт к понятию **случайной величины** в теории вероятностей.

Практически почти всегда результаты опытов можно представить количественно с помощью одной или нескольких числовых величин.

Так, в конечных схемах описаний вместо самих элементарных исходов можно рассматривать их номиналы (идентификаторы).

Например, при бросании монеты «решка» — это 0, а «герб» — это 1; при бросании игральной кости результаты — номер граней от 1 до 6; при разыгрывании лотереи – число выигрышных лотерейных билетов из трех купленных и т. п.

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от ряда случайных факторов.

Например: количество выпадений «решки» при 2-х подбрасываниях монеты; остаток вклада по выбранному наудачу лицевому счету; число зарегистрированных правонарушений за дежурство; количество выигрышных билетов из 3-х купленных; продолжительность обслуживания покупателей в магазине и т. д.

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА (С. В.) [англ. random value] — всякая наблюдаемая величина, изменяющаяся при повторении общего комплекса условий, в которых она возникает.

С.В. принимает в зависимости от случая те или иные значения с определенными *вероятностями*.

Распределение указанных вероятностей С. В. служит ее важнейшей характеристикой

Разделяют **2 класса** сл. величин:

- "дискретные", множества возможных значений которых можно перечислить;

-"непрерывные", множества возможных значений которых непрерывно (сплошь) заполняют числовой интервал.

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями.

Пусть **X** – дискретная сл. величина **(ДСВ),** в результате испытания принимающая возможные значения $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$.

Законом распределения ДСВ называют соотношение, устанавливающее связь между ее возможными значениями и соответствующими им вероятностями. Закон может быть задан:

- **аналитически** (формулой);
- **таблично** (ряд распределения);
- **графически**.

ДСВ **X** полностью определена, если указаны принимаемые ею значения: $\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n}$ и указаны вероятности их появления, то есть

$\mathbf{p_i = P(X = x_i)}$, где i = 1, 2, …

Для любой ДСВ всегда верно условие:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Традиционно ДСВ задают в виде **таблицы (ряда)** распределения вероятностей

Значения **X**	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2} \ldots$	$\mathbf{x_n}$	
Вероятности **P** $\mathbf{p_1}$	$\mathbf{p_2}$	... $\mathbf{p_n}$		

<u>Пример.</u> Два стрелка делают по выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка - **0,6**; второго стрелка - **0,3**. Найти закон распределения вероятностей ДСВ **X** – числа попаданий в мишень.

<u>Решение.</u>

X - число попаданий	**0**	**1**	**2**
P- соответствующие вероятности	**0,28**	**0,54**	**0,18**

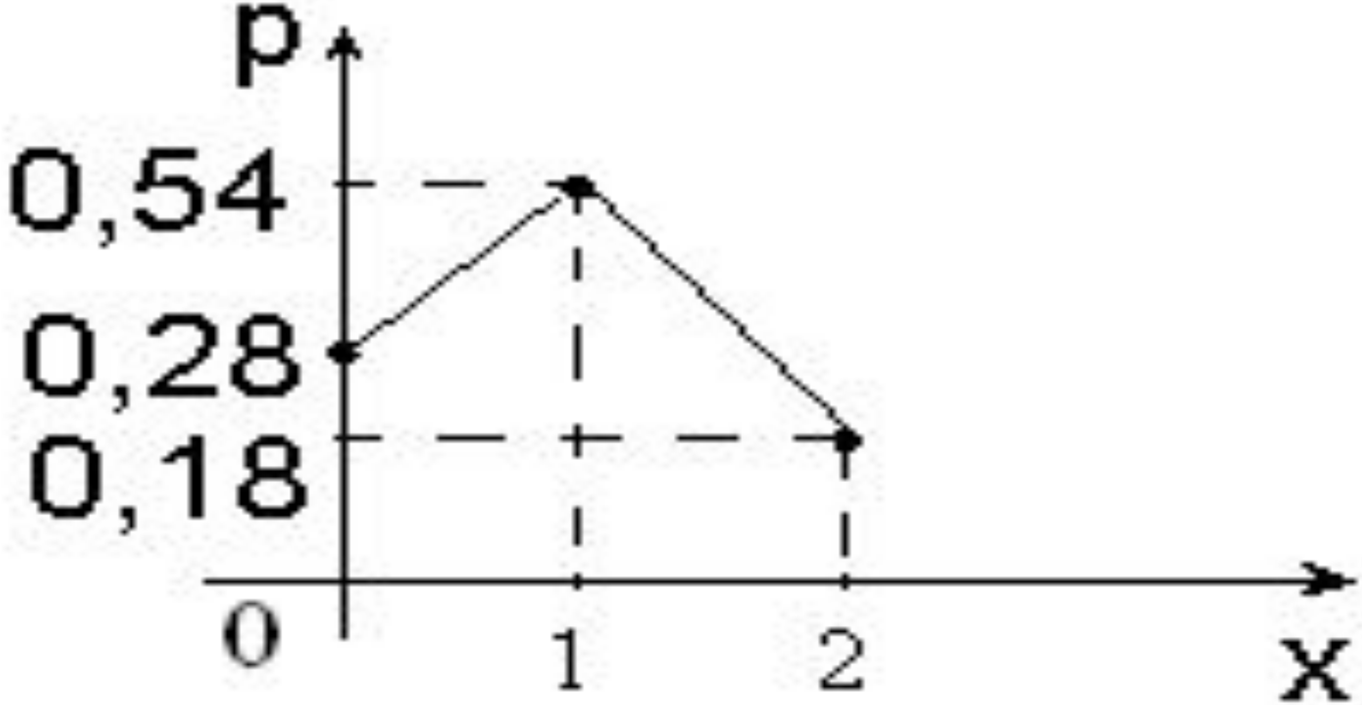
Здесь $\mathbf{p_1} = p\ (X = x_1) = \mathbf{0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28}$

$\mathbf{p_2} = p\ (X = x_2) = \mathbf{0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}54}$

$\mathbf{p_3} = p\ (X = x_3) = \mathbf{0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18.}$

Условие нормировки: $\mathbf{0{,}28 + 0{,}54 + 0{,}18 = 1}$

Графически закон распределения задают в виде многоугольника распределения вероятностей: в прямоугольной системе координат строят точки с координатами **(x_i, p_i)** и соединяют их последовательно отрезками



Задание Выбрать все примеры

А-случайных величин; В - случайных событий:

1) число диагоналей параллелограмма;
2) выпадение монеты «решкой»;
3) время ожидания выполнения заказа в кафе;
4) число градусов или радиан в прямом угле;
5) число правильных ответов Вашего теста;
6) сумма очков, выпавших при бросании 2-х игральных костей при игре в нарды;
7) сумма очков, выпавшая при бросании 2-х игральных костей – нечетное число.
8) наличие бракованных чайников в продаваемой магазином партии товара

Ответ:

Случайные величины	Случайные события
3) время ожидания выполнения заказа в кафе; 5) число правильных ответов Вашего теста; 6) сумма очков, выпавших при бросании 2-х игральных костей при игре в нарды;	2) выпадение монеты «решкой»; 7) сумма очков, выпавшая при бросании 2-х игральных костей – нечетное число. 8) наличие бракованных чайников в продаваемой магазином партии товара

Куплено 1000 лотерейных билетов. На 80 из них упал выигрыш по 1 руб., на 20 – по 5 руб., на 10 – по 10 руб. Какая таблица описывает закон распределения выигрыша?

1.

x	0	1	5	10
p	0,87	0,08	0,02	0,01

2.

x	0	1	5	10
p	0,89	0,08	0,02	0,01

3.

x	0	1	5	10
p	0,91	0,08	0,02	0,01

Ответ: пункт 2

Математическое ожидание ДСВ

Основными числовыми характеристиками случайных величин являются **математическое ожидание** (средний, наиболее типичный, ожидаемый результат величины) и дисперсия.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

где x_i - значения ДСВ;

p_i - соответствующие им вероятности.

Свойства математического ожидания

1. **M(C) = C;** где C=const.
2. **M(C·X) = C· M(X);**
3. **M (X + Y) = M(X) + M(Y);**
4. **M (X · Y) = M(X) · M(Y)**, если **X** и **Y** независимые случайные величины

<u>Задание №9.</u> Дискретная случайная величина **X** имеет закон распределения вероятностей:

X	1	4
P	0,4	0,6

Математическое ожидание **M(X)** этой случайной величины равно…

<u>Варианты ответов:</u> 1) **5** **2) 2,2**

3) 1 **4) 2,8**

<u>Ответ:</u> пункт №**4**, т.к. $\mathbf{M\,(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}6 =}$

$\mathbf{= 0{,}4 + 2{,}4 = 2{,}8}$

Пример. Играем в следующую игру – бросаем игральную кость и получаем столько $, сколько выпало очков. Цена игры 4 $, выгодно ли играть?

Решение. ДСВ X – количество очков выпавшее при бросании игральной кости. Вычислим математическое ожидание M(X)

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Именно столько $ мы будем получать, если играть достаточно долго, значит игра невыгодна для нас, в среднем мы будем терять 0,5 $ в каждой игре.

Дисперсия случайной величины

Мера разброса данной случайной величины, то есть её отклонения от математического ожидания. Обозначается ***D*[*X*]** в русской литературе и ***varX*** (англ. *variance*) в зарубежной. В статистике употребляется обозначение σ^2_x или σ^2. Квадратный корень из дисперсии, равный σ , называется среднеквадратичным (стандартным) отклонением или стандартным разбросом. Стандартное отклонение измеряется в тех же единицах, что и

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия любой случайной величины неотрицательна: $D(X) \geq 0$;
2. Если дисперсия случайной величины конечна, то конечно и её математическое ожидание;
3. Если случайная величина равна константе, то её дисперсия равна нулю: $D[a] = 0$. Верно и обратное: если $D[X] = 0$, то $X = M[X]$;
4. Дисперсия суммы двух случайных величин равна: $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2\operatorname{cov}(X, Y)$ где $\operatorname{cov}(X, Y)$ - их ковариация (мера линейной зависимости двух случайных величин).

Для вычисления дисперсии (задача про игру в кости) воспользуемся формулой $D(X) = M[X]^2 - (M[X])^2$

Случайная величина X^2 имеет следующий закон распределения:

X^2	1	$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$	$6^2=36$
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Вычислив $M[X]^2 = (1+4+9+16+25+36)/6 = 91/6$; находим D(X).

$$D(X) = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{546 - 441}{36} = \frac{105}{36} = 2\frac{11}{12}$$