

Урок 5

Практическая работа № 2 «Вычисление вероятностей сложных событий»

Дидактическая цель

- Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.
- *Знать:*
 - понятия произведения событий и суммы событий;
 - формулу вероятности произведения независимых событий
 - формулу вероятности суммы несовместных событий
- *Уметь:*
 - представлять сложные события через элементарные события с помощью операций над событиями;
 - вычислять вероятности сложных событий

Действия над событиями

- **Сумма:**

$A + B$ выполняется тогда, когда происходит хотя бы одно из этих событий (или A , или B , или оба вместе)

- **Произведение:**

$A \cdot B$ выполняется тогда, когда происходят оба события (и A , и B).

Теоремы сложения вероятностей

- Вероятность суммы событий $A + B$ определяется следующей формулой:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Если события несовместны, то формула упрощается и принимает вид:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Теорема умножения вероятностей

- Если события независимы, то *вероятность произведения событий* $A \cdot B$ определяется следующей формулой:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Вопросы к теме

- 1. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
Сумме вероятностей этих событий.
- 2. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
Равна единице.
- 3. Сформулируйте теорему о вероятности суммы совместных событий.
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$
- 4. При каком условии вероятность суммы двух случайных событий равна сумме вероятностей этих событий?
Если события несовместны.

Вопросы к теме

- 5. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?

Равна произведению вероятностей этих событий.

- 6. Сформулируйте теорему о вероятности произведения независимых событий.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

- 7. При каком условии вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятностей этих событий?

- Если события независимые.

Задача № 1

- В урне 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется:
а) 2 белых шара; б) меньше чем 2 белых шара;
в) хотя бы один белый шар.

Дано:

.....

.....

.....

.....

Найти:

Задача № 1

- В урне 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется:
 - а) 2 белых шара; б) меньше чем 2 белых шара;
 - в) хотя бы один белый шар.

Дано:

Всего 11 шаров, из них 5 черных и 6 белых.

Испытание: случайным образом берут 4 шара.

Событие А: из 4-х выбранных шаров окажется 2 белых шара.

Событие В: из 4-х выбранных шаров окажется меньше чем 2 белых шара.

Событие С: из 4-х выбранных шаров окажется хотя бы один белый шар.

Найти: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$

Решение:

Решим задачу по формуле классического определения вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Найдем число равновозможных исходов.

Рассмотрим испытание:

всего 11 шаров, выбирают из них 4 шара, порядок не важен.

По формуле сочетаний из 11 по 4 найдем n .

Тогда

$$n = C_{11}^4 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$$

Решение:

а) Рассмотрим событие A - *из 4-х выбранных шаров окажется 2 белых шара.*

Значит, среди вынутых шаров 2 белых и 2 черных, то есть $A = \{2 \text{ бел. и } 2 \text{ чер.}\}$

И белые и черные шары берут одновременно, поэтому число способов выбора белых и черных шаров перемножаем.

событие A - из 4-х выбранных шаров окажется 2 белых шара

Пусть m_1 – число способов выбрать 2 белых шара, Белых шаров 6, берут из них 2, значит

$$m_1 = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

Обозначим m_2 - число способов выбрать 2 черных шара.

Черных шаров 5, берут из них 2, значит

$$m_2 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \quad \text{тогда} \quad m = m_1 \cdot m_2 = 15 \cdot 10 = 150$$

Вероятность события A равна: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{150}{330}$

Решение:

б) Событие B - из 4-х выбранных шаров окажется меньше чем 2 белых шара

Это событие состоит из двух несовместных событий:

B_1 - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных.

B_2 - среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные.

Так как события B_1 и B_2 несовместны, можно использовать формулу: $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$

V_1 - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных

Вероятности событий V_1 и V_2 найдем по формуле классического определения вероятности.

V_1 - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных.

Берут шары разного цвета, поэтому найдем:

m_1 – число способов выбрать 1 белый шар, и

m_2 – число способов выбрать 3 черных шара.

Тогда $m = m_1 \cdot m_2$

V_1 - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных

- m_1 – число способов выбрать 1 белый шар
Белых шаров 6, берут из них 1, значит:

$$m_1 = C_6^1 = 6$$

- m_2 - число способов выбрать 3 черных шара.
Черных шаров 5, берут из них 3, значит:

$$m_2 = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

- Значит $m = m_1 \cdot m_2 = 6 \cdot 10 = 60$

B_2 - среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные

- Найдем вероятность события B_1 : $P(B_1) = \frac{60}{330}$
- B_2 - среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные.
Черных шаров 5, берут из них 4, значит
 $m = C_5^4 = C_5^1 = 5$
- Найдем вероятность события B_2 : $P(B_2) = \frac{5}{330}$
- Вероятность события B : $P(B) = \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{65}{330}$

в) C – среди вынутых шаров хотя бы один белый.

- Здесь событие C определяется словами "хотя бы один" и прямое решение приводит обычно к сложным вычислениям.
- Этому событию удовлетворяют следующие сочетания шаров: 1 белый и 3 черных (C_1), 2 белых и 2 черных (C_2), 3 белых и 1 черный (C_3), 4 белых (C_4).
- Имеем: $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.
- Для вычисления вероятности события C необходимо найти вероятности четырёх событий C_1, C_2, C_3, C_4 .

C – среди вынутых шаров хотя бы один белый

- Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем вычислить вероятность искомого события.

Противоположным событию C является событие \bar{C} - среди вынутых шаров нет ни одного белого,

$$\bar{C} = \{4 \text{ черных}\} = B_2 \quad P(\bar{C}) = P(B_2) = \frac{5}{330}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 5 / 330 = 325 / 330$$

Ответ: $P(A)=150/330$, $P(B)=65/330$, $P(C)=325/330$.

Задача № 2

- Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени T безотказно соответственно с вероятностями $0,851$, $0,751$ и $0,701$. Найти вероятность того, что за время T выйдет из строя: а) только один элемент; б) хотя бы один элемент.

Дано:

.....

.....

.....

.....

- **Найти:**

Задача № 2

■ Дано:

$p_1 = 0.851$ - вероятность работы 1 элемента

$p_2 = 0.751$ - вероятность работы 2 элемента

$p_3 = 0.701$ - вероятность работы 3 элемента

Испытание: работа устройства состоящего из 3-х элементов.

Событие А: за время T выйдет из строя только один элемент.

Событие В: за время T выйдет из строя хотя бы один элемент.

■ Найти: $P(A)$, $P(B)$.

Решение:

- Дано сложное испытание – работа устройства, состоявшего из 3-х элементов.

- Введем элементарные события:

V_i – i -ый элемент не выходит из строя;

\bar{V}_i – i -ый элемент выходит из строя.

а) Событие A – *за время T выходит из строя только один элемент*. Событие A происходит тогда, когда выходит из строя либо только 1-й, либо только 2-й, либо только 3-й элемент.

$A = \{HPP, PHP, PPH\}$

B_i – i -ый элемент не выходит из строя

- Выразим A , через элементарные события:

$$A = \bar{B}_1 \cdot B_2 \cdot B_3 + B_1 \cdot \bar{B}_2 \cdot B_3 + B_1 \cdot B_2 \cdot \bar{B}_3$$

- Определим вероятности элементарных событий.
- Вероятности элементарных событий B_i вычислять не надо, так как эти вероятности заданы по условию.

$$P(B_1) = p_1 = 0.851, \quad P(B_2) = p_2 = 0.751, \quad P(B_3) = p_3 = 0.701$$

$$P(B_1) = 0.851, \quad P(B_2) = 0.751, \\ P(B_3) = 0.701$$

- B_i и \overline{B}_i - противоположные события.
- Сумма вероятностей этих событий равна 1.

$$P(\overline{B}_1) = 1 - P(B_1) = 1 - 0.851 = 0.149$$

$$P(\overline{B}_2) = 1 - P(B_2) = 1 - 0.751 = 0.249$$

$$P(\overline{B}_3) = 1 - P(B_3) = 1 - 0.701 = 0.299$$

Решение:

- Учитывая независимость элементов устройства, несовместимость событий применим теоремы сложения и умножения вероятностей:

$$P(A) = P(\overline{B_1}) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) + P(B_1) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(B_3) + P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B_3})$$

- Вычислим вероятность события A .

$$P(A) = 0.149 \cdot 0.751 \cdot 0.701 + 0.851 \cdot 0.249 \cdot 0.701 + 0.851 \cdot 0.751 \cdot 0.299 = 0.418$$

б) В – за время Т выходит из строя хотя бы один элемент.

Событие определяется словами "хотя бы один", значит, используем противоположное событие \bar{B} - за время Т все элементы работают безотказно. $\bar{B} = \{PPP\} = B_1B_2B_3$

Найдем вероятность события \bar{B}

$$P(\bar{B}) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0.851 \cdot 0.751 \cdot 0.701 = 0.448$$

Вероятность события В: $P(B) = 1 - 0.448 = 0.552$

■ **Ответ:** $P(A) = 0.418$, $P(B) = 0.552$

Выполнение индивидуального задания в 34 вариантах

*Практическая работа № 2 по теме
«Вычисление вероятностей сложных
событий»*

Обязательная часть

Задача № 1

Задача № 2

Вопросы к теме

Дополнительное задание

Задача № 3

Индивидуальное задание № 2

Вычисление параметров

Значения параметров вычислить по следующим формулам:

$k = |14,9 - V| : 100$, где V – номер варианта

$p_1 = 1 - k$, $p_2 = 0.9 - k$, $p_3 = 0.85 - k$

Вычисление параметров

$V = \dots$, $k = |14,9 - \square| : 100 = \dots$

$p_1 = 1 - \dots = \dots$

$p_2 = 0.9 - \dots = \dots$

$p_3 = 0.85 - \dots = \dots$

Индивидуальное задание № 2

Вычисление параметров

Например: $k = |14,9 - V| : 100$

$V = 6$ – номер варианта, тогда

$$k = |14,9 - 6| : 100 = 8,9 : 100 = 0,089$$

$$p_1 = 1 - k = 1 - 0,089 = 0,911,$$

$$p_2 = 0.9 - k = 0,9 - 0,089 = 0,811,$$

$$p_3 = 0.85 - k = 0,85 - 0,089 = 0,761$$

Или $V = 30$, $k = |14,9 - 30| : 100 = 15,1 : 100 = 0,151$

$$p_1 = 1 - 0,151 = 0,849$$

$$p_2 = 0.9 - 0,151 = 0,749$$

$$p_3 = 0.85 - 0,151 = 0,699$$

Вопросы к теме

1. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
2. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
3. Сформулируйте теорему о вероятности суммы совместных событий.
4. При каком условии вероятность суммы двух случайных событий равна сумме вероятностей этих событий?
5. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
6. Сформулируйте теорему о вероятности произведения независимых событий.
7. При каком условии вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятностей этих событий?

Домашнее задание

■ Задача

В первой урне K белых и L черных шаров, а во второй урне M белых и N черных шаров. Из первой урны вынимают случайным образом P шаров, а из второй - Q шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров:

- а) все шары одного цвета;*
- б) только три белых шара;*
- в) хотя бы один белый шар.*

параметры по вариантам на доске

- Конспект § 3.2 до задачи 3.8 стр. 45

