Урок 5

Практическая работа № 2 «Вычисление вероятностей сложных событий»

Дидактическая цель

- Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

- *Знать:*

– понятия произведения событий и суммы событий;
– формулу вероятности произведения независимых событий
– формулу вероятности суммы несовместных событий

- *Уметь:*

– представлять сложные события через элементарные события с помощью операций над событиями;
– вычислять вероятности сложных событий

Действия над событиями

- **Сумма:**

  A + B выполняется тогда, когда происходит хотя бы одно из этих событий (или A, или B, или оба вместе)

- **Произведение:**

  A · B выполняется тогда, когда происходят оба события (и **A**, и **B**).

Теоремы сложения вероятностей

- *Вероятность суммы событий* **A + B** определяется следующей формулой:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Если события несовместны, то формула упрощается и принимает вид:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Теорема умножения вероятностей

- Если события независимы, то *вероятность произведения событий* **A · B** определяется следующей формулой:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Вопросы к теме

- **1. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?**
  Сумме вероятностей этих событий.
- **2. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?**
  Равна единице.
- **3. Сформулируйте теорему о вероятности суммы совместных событий.**
  $$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$
- **4. При каком условии вероятность суммы двух случайных событий равна сумме вероятностей этих событий?**
  Если события несовместны.

Вопросы к теме

- **5. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?**
  <u>*Равна произведению вероятностей этих событий.*</u>
- **6. Сформулируйте теорему о вероятности произведения независимых событий.**
  $$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$
- **7. При каком условии вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятностей этих событий?**
- <u>*Если события независимые.*</u>

Задача № 1

- *В урне 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется:*
  а) 2 белых шара; б) меньше чем 2 белых шара;
  в) хотя бы один белый шар.

  Дано: ....
  ....
  ....
  ....
  ....

  Найти:

Задача № 1

- *В урне 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется:*
  а) 2 белых шара; б) меньше чем 2 белых шара;
  в) хотя бы один белый шар.
  Дано:
  Всего 11 шаров, из них 5 черных и 6 белых.
  Испытание: случайным образом берут 4 шара.
  Событие А: из 4-х выбранных шаров окажется 2 белых шара.
  Событие В: из 4-х выбранных шаров окажется меньше чем 2 белых шара.
  Событие С: из 4-х выбранных шаров окажется хотя бы один белый шар.
  Найти: *P(A), P(B), P(C)*

Решение:

Решим задачу по формуле классического определения вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Найдем число равновозможных исходов.
Рассмотрим испытание:
всего *11 шаров*, выбирают из них *4 шара*, порядок не важен.
По формуле *сочетаний* из 11 по 4 найдем *n*.
Тогда

$$n = C_{11}^{4} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$$

Решение:

а) Рассмотрим событие *А* - *из 4-х выбранных шаров окажется 2 белых шара.*

Значит, среди вынутых шаров 2 белых и 2 черных, то есть *А = {2 бел. и 2 чер.}*

И белые и черные шары берут одновременно, поэтому число способов выбора белых и черных шаров перемножаем.

событие А - *из 4-х выбранных шаров окажется 2 белых шара*

Пусть m_1 – число способов выбрать 2 белых шара,
Белых шаров 6, берут из них 2, значит

$$m_1 = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

Обозначим m_2 - число способов выбрать 2 черных шара.
Черных шаров 5, берут из них 2, значит

$$m_2 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

тогда $m = m_1 \cdot m_2 = 15 \cdot 10 = 150$

Вероятность события *А* равна: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{150}{330}$

Решение:

б) Событие *B* - *из 4-х выбранных шаров окажется меньше чем 2 белых шара*

Это событие состоит из двух несовместных событий:

B1 - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных.

B2 - среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные.

Так как события *B1* и *B2* несовместны, можно использовать формулу: $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$

B1 - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных

Вероятности событий *B1* и *B2* найдем по формуле классического определения вероятности.

B1 - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных.

Берут шары разного цвета, поэтому найдем:

m_1 – число способов выбрать 1 белый шар, и

m_2 – число способов выбрать 3 черных шара.

Тогда $m = m_1 \cdot m_2$

В1 - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных

- m_1 – число способов выбрать 1 белый шар

Белых шаров 6, берут из них 1, значит:

$$m_1 = C_6^1 = 6$$

- m_2 - число способов выбрать 3 черных шара.

Черных шаров 5, берут из них 3, значит:

$$m_2 = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

- Значит $m = m_1 \cdot m_2 = 6 \cdot 10 = 60$

B2 - среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные

- Найдем вероятность события *B1:* $P(B_1) = \dfrac{60}{330}$
- *B2* - среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные.

Черных шаров 5, берут из них 4, значит

$$m = C_5^4 = C_5^1 = 5$$

- Найдем вероятность события *B2:* $P(B_2) = \dfrac{5}{330}$
- Вероятность события *B:* $P(B) = \dfrac{60}{330} + \dfrac{5}{330} = \dfrac{65}{330}$

в) *C – среди вынутых шаров хотя бы один белый*.

- Здесь событие *C* определяется словами *"хотя бы один"* и прямое решение приводит обычно к сложным вычислениям.
- Этому событию удовлетворяют следующие сочетания шаров: 1 белый и 3 черных (C_1), 2 белых и 2 черных (C_2), 3 белых и 1 черный (C_3), 4 белых (C_4).
- Имеем: $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.
- Для вычисления вероятности события *C* необходимо найти вероятности четырёх событий C_1, C_2, C_3, C_4.

С – среди вынутых шаров хотя бы один белый

- Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем вычислить вероятность искомого события. Противоположным событию *С* является событие $\overline{C}$ - *среди вынутых шаров нет ни одного белого*,

$\overline{C}$ = {4 черных} = B2 $P(\overline{C}) = P(B_2) = \dfrac{5}{330}$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 5/330 = 325/330$$

Ответ: P(A)=150/330, P(B)=65/330, P(C)=325/330.

Задача № 2

- *Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени **Т** безотказно соответственно с вероятностями 0,851, 0,751 и 0,701. Найти вероятность того, что за время **Т** выйдет из строя: а) только один элемент; б) хотя бы один элемент.*
  Дано: ……………………………………………………
  ……………………………………………………………
  ……………………………………………………………
  ……………………………………………………………
  ……………………………………………………………
- ***Найти:*** ……………………………………………………

Задача № 2

- **Дано:**

 p_1 = 0.851 - вероятность работы 1 элемента
 p_2 = 0.751 - вероятность работы 2 элемента
 p_3 = 0.701 - вероятность работы 3 элемента
 Испытание: работа устройства состоящего из 3-х элементов.
 Событие А: за время Т выйдет из строя только один элемент.
 Событие В: за время Т выйдет из строя хотя бы один элемент.

- ***Найти:*** P(A), P(B).

Решение:

- Дано сложное испытание – работа устройства, состоявшего из 3-х элементов.
- Введем элементарные события:

*B*i – i-ый элемент не выходит из строя;

$\overline{B}_i$ – i-ый элемент выходит из строя.

а) Событие *А* – *за время Т выходит из строя только один элемент*. Событие А происходит тогда, когда выходит из строя либо только 1-й, либо только 2-й, либо только 3-й элемент.

А = {НРР, РНР, РРН}

Bi – i-ый элемент не выходит из строя

- Выразим А, через элементарные события:

$$A = \overline{B}_1 \cdot B_2 \cdot B_3 + B_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot B_3 + B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B}_3$$

- Определим вероятности элементарных событий.
- Вероятности элементарных событий *Bi* вычислять не надо, так как эти вероятности заданы по условию.

$P(B_1) = p_1 = 0.851$, $P(B_2) = p_2 = 0.751$, $P(B_3) = p_3 = 0.701$

$P(B_1) = 0.851$, $P(B_2) = 0.751$, $P(B_3) = 0.701$

- *Bi* и $\overline{B}_i$ - противоположные события.
- Сумма вероятностей этих событий равна 1.

$$P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) = 1 - 0.851 = 0.149$$

$$P(\overline{B}_2) = 1 - P(B_2) = 1 - 0.751 = 0.249$$

$$P(\overline{B}_3) = 1 - P(B_3) = 1 - 0.701 = 0.299$$

Решение:

- Учитывая независимость элементов устройства, несовместимость событий применим теоремы сложения и умножения вероятностей:

$$P(A) = P(\overline{B_1}) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) + P(B_1) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(B_3) +$$
$$+ P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B_3})$$

- Вычислим вероятность события A.

$$P(A) = 0.149 \cdot 0.751 \cdot 0.701 + 0.851 \cdot 0.249 \cdot 0.701 +$$
$$+ 0.851 \cdot 0.751 \cdot 0.299 = 0.418$$

б) *В – за время Т выходит из строя хотя бы один элемент.*

Событие определяется словами "хотя бы один", значит, используем противоположное событие $\overline{B}$ - *за время* ***Т*** *все элементы работают безотказно.* $\overline{B} = \{PPP\} = B_1 B_2 B_3$

Найдем вероятность события $\overline{B}$

$$P(\overline{B}) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) = 0.851 \cdot 0.751 \cdot 0.701 = 0.448$$

Вероятность события *В*: $P(B) = 1 - 0.448 = 0.552$

- ***Ответ:*** *Р(А) = 0.418, Р(В) = 0.552*

Выполнение индивидуального задания в 34 вариантах

Практическая работа № 2 по теме «Вычисление вероятностей сложных событий»

Обязательная часть

Задача № 1

Задача № 2

Вопросы к теме

Дополнительное задание

Задача № 3

Индивидуальное задание № 2
Вычисление параметров

Значения параметров вычислить по следующим формулам:

$k = |14,9 - V\ | : 100$ *, где V – номер варианта*

$p_1 = 1 - k$ *,* $p_2 = 0.9 - k$ *,* $p_3 = 0.85 - k$

Вычисление параметров

*V = ….., * $k = |14,9 - \square\ | : 100 =$ ……………

$p_1 = 1 -$ …… = ……….

$p_2 = 0.9 -$ …… = …….

$p_3 = 0.85 -$ …… = …….

Индивидуальное задание № 2

Вычисление параметров

Например: $k = |14{,}9 - V\,| : 100$

V = 6 *– номер варианта, тогда*

$k = |14{,}9 - 6\,| : 100 = 8{,}9 : 100 = 0{,}089$

$p_1 = 1 - k = 1 – 0{,}089 = 0{,}911,$

$p_2 = 0.9 - k = 0{,}9 – 0{,}089 = 0{,}811,$

$p_3 = 0.85 – k = 0{,}85 – 0{,}089 = 0{,}761$

Или V = 30, $k = |14{,}9 - 30\,| : 100 = 15{,}1 : 100 = 0{,}151$

$p_1 = 1 – 0{,}151 = 0{,}849$

$p_2 = 0.9 – 0{,}151 = 0{,}749$

$p_3 = 0.85 – 0{,}151 = 0{,}699$

Вопросы к теме

1. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
2. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
3. Сформулируйте теорему о вероятности суммы совместных событий.
4. При каком условии вероятность суммы двух случайных событий равна сумме вероятностей этих событий?
5. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
6. Сформулируйте теорему о вероятности произведения независимых событий.
7. При каком условии вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятностей этих событий?

Домашнее задание

- *Задача*
  В первой урне K белых и L черных шаров, а во второй урне M белых и N черных шаров. Из первой урны вынимают случайным образом P шаров, а из второй - Q шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров:
  а) все шары одного цвета;
  б) только три белых шара;
  в) хотя бы один белый шар.

параметры по вариантам на доске

- *Конспект § 3.2 до задачи 3.8 стр. 45*