Княгининский университет

Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

Справочный материал к практике 12 по дисциплине «Математика» для студентов направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Частные производные.
Полный дифференциал функции

Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-математические науки» Черемухин А. Д.

Таблица производных и примеры нахождения производных функции одной переменной

1. $y=c$	$y'=0$
2. $y=x$	$y'=1$
3. $y=x^{\mu}$	$y'=\mu x^{\mu-1}$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
5. $y=\log_a x$	$y'=\frac{\log_a e}{x}$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
6. $y=\sin x$	$y'=\cos x$
7. $y=\cos x$	$y'=-\sin x$
8. $y=\mathrm{tg}\, x$	$y'=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
9. $y=\mathrm{ctg}\, x$	$y'=-\csc^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $y=\mathrm{arctg}\, x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
13. $y=\mathrm{arcctg}\, x$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$

$$y=u\pm v\Rightarrow y'=u'\pm v' \quad y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'\cdot v+u\cdot v' \quad y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$y=u(v(x))\Rightarrow y'=u'(v(x))\cdot v'(x)$$

Примеры нахождения производных

$$1.\ y=x^5+\frac{3}{x}+\sqrt[7]{x}\Rightarrow y'=(x^5)'+(3\cdot x^{-1})'+\left(x^{\frac{1}{7}}\right)'=5x^4-3\cdot x^{-2}+\frac{1}{7}\cdot x^{-\frac{6}{7}}=5x^4-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

$$3.\ y=\frac{\sin(x)+x^2}{tg(x)}\Rightarrow y'=\frac{(\sin(x)+x^2)'\cdot tg(x)-(\sin(x)+x^2)\cdot(tg(x))'}{(tg(x))^2}=\frac{(\cos(x)+2x)\cdot tg(x)-\dfrac{(\sin(x)+x^2)}{\cos^2(x)}}{(tg(x))^2}$$

$$2.\ y=\ln(x)\cdot 3^x\Rightarrow y=(\ln(x)'\cdot 3^x)+(\ln(x)\cdot(3^x)')=\frac{3^x}{x}+\ln(x)\cdot 3^x\cdot\ln(3)$$

$$4.\ y=\arcsin(\cos(x))\Rightarrow y'=(\arcsin(\cos(x)))'=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(\cos(x))'=\frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

$$5.\ y=\ln(x^3+\ln(x))\Rightarrow y'=(\ln(x^3+\ln(x)))'=\frac{1}{x^3+\ln(x)}\cdot(x^3+\ln(x))'=\frac{3\cdot x^2+\frac{1}{x}}{x^3+\ln(x)}$$

Пример 1. Найдите частные производные функции $z = 43\cos(x) - 15\ln(y) + 59\arcsin(x)\,16^{y} + \frac{1}{19}\,\frac{x^{\frac{57}{145}}}{\arcsin(y)} + \frac{5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}}{7x - 66y}$

Исследуемая функция представляет собой сумму
5 других разных функций – распишем как производную суммы

$$1.\ z' = (43\cos(x))' - (15\ln(y))' + (59\arcsin(x)\,16^{y})' + \left(\frac{1}{19}\,\frac{x^{\frac{57}{145}}}{\arcsin(y)}\right)' + \left(\frac{5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}}{7x - 66y}\right)'$$

<u>В функции 2 переменных – x и y, значит, будет существовать 2 частных производных первого порядка</u>

Возьмем производную по x, считая y и все функции чисто по y числами (а числа можно вынести за знак производной)
Кроме того, распишем все правила – в 5-м примере x и y есть и в числителе, и знаменателе, поэтому распишем по правилу производной от частного

$$z'_x = (43\cos(x))' - (15\ln(y))' + 16^{y}\cdot(59\arcsin(x))' + \frac{1}{19\cdot\arcsin(y)}\cdot\left(x^{\frac{57}{145}}\right)' + \frac{\left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}\right)'\cdot(7x - 66y) - \left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}\right)\cdot(7x - 66y)'}{(7x - 66y)^{2}}$$

$$z'_x = (43\cos(x))' - (15\ln(y))' + 16^y\cdot(59\arcsin(x))' + \frac{1}{19\cdot\arcsin(y)}\cdot\left(x^{\frac{57}{145}}\right)' + \frac{\left(5\sqrt{x}+\frac{1}{y^{15}}\right)'\cdot(7x-66y) - \left(5\sqrt{x}+\frac{1}{y^{15}}\right)\cdot(7x-66y)'}{(7x-66y)^2}$$

Распишем производные от всех слагаемых

$$(43\cos(x))' = 43\cdot(-\sin(x))$$

$$(15\ln(y))' \to (x \text{ в записи нет}) \to 0$$

$$(59\arcsin(x))' = \frac{59}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(x^{\frac{57}{145}}\right)' = \frac{57}{145}\cdot x^{\frac{57}{145}-1} = \frac{57}{145}\cdot x^{\frac{-88}{145}}$$

$$\left(5\sqrt{x}+\frac{1}{y^{15}}\right)' = (5\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{y^{15}}\right)' = \frac{5\cdot 1}{2\sqrt{x}}$$

$$(7x-66y)' = (7x)' - (66y)' = 7$$

Следовательно,

$$z'_x = -43\cdot\sin(x) + \frac{59\cdot 16^y}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{57}{145}\cdot x^{\frac{-88}{145}}}{19\cdot\arcsin(y)} + \frac{\frac{5\cdot 1}{2\sqrt{x}}\cdot(7x-66y) - \left(5\sqrt{x}+\frac{1}{y^{15}}\right)\cdot 7}{(7x-66y)^2}$$

Аналогично возьмем производные по y

$$1.\ z' = (43\cos(x))' - (15\ln(y))' + \left(59\arcsin(x)\,16^{y}\right)' + \left(\frac{1}{19}\,\frac{x^{\frac{57}{145}}}{\arcsin(y)}\right)' + \left(\frac{5\sqrt{x}+\frac{1}{y^{15}}}{7x-66y}\right)'$$

$$z'_y = (43\cos(x))' - (15\ln(y))' + 59\arcsin(x)\cdot\left(16^{y}\right)' + x^{\frac{57}{145}}\cdot\left(\frac{1}{19\cdot\arcsin(y)}\right)' + \frac{\left(5\sqrt{x}+\frac{1}{y^{15}}\right)'\cdot(7x-66y) - \left(5\sqrt{x}+\frac{1}{y^{15}}\right)\cdot(7x-66y)'}{(7x-66y)^{2}}$$

$$(43\cos(x))' \rightarrow (y\ \text{в записи нет}) \rightarrow 0$$

$$(15\ln(y))' = \frac{15\cdot 1}{y}$$

$$\left(16^{y}\right)' = 16^{y}\cdot\ln(16)$$

$$\left(\frac{1}{19\cdot\arcsin(y)}\right)' = \frac{1}{19}\cdot\left(\arcsin(y)^{-1}\right)' = \frac{1}{19}\cdot(-1)\cdot\left(\arcsin(y)^{-2}\right)\cdot\arcsin(y)' = \frac{1}{19\cdot\arcsin^{2}(y)\cdot\sqrt{1-y^{2}}}$$

Следовательно,

$$\left(5\sqrt{x}+\frac{1}{y^{15}}\right)' = \left(5\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{y^{15}}\right)' = -\frac{15}{y^{16}}$$

$$(7x-66y)' = (7x)' - (66y)' = -66$$

$$z'_y = -\frac{15}{y} + 59\arcsin(x)\cdot 16^{y}\cdot\ln(16) + \frac{x^{\frac{57}{145}}}{19\cdot\arcsin^{2}(y)\cdot\sqrt{1-y^{2}}} + \frac{-\frac{15}{y^{16}}\cdot(7x-66y) + \left(5\sqrt{x}+\frac{1}{y^{15}}\right)\cdot 66}{(7x-66y)^{2}}$$

Пример 2. Найдите частные производные функции $\operatorname{tg}(88x+8y+15xy^3)+\left(88x^2+\frac{10}{y}\right)^{564}$

Частные производные от сложных функций берутся по тем же правилам, что и производные сложных функций, и частные производные; но необходимо помнить, что если функция является сложной только по одной переменной, то производная по другой переменной будет равна 0

$$z'_x=\frac{1}{\cos^2(88x+8y+15xy^3)}\cdot(88x+8y+15xy^3)'+564\cdot\left(88x^2+\frac{10}{y}\right)^{563}\cdot\left(88x^2+\frac{10}{y}\right)'=\frac{88+15y^3}{\cos^2(88x+8y+15xy^3)}+564\cdot\left(88x^2+\frac{10}{y}\right)^{563}\cdot 176\cdot x$$

$$z'_y=\frac{1}{\cos^2(88x+8y+15xy^3)}\cdot(88x+8y+15xy^3)'+564\cdot\left(88x^2+\frac{10}{y}\right)^{563}\cdot\left(88x^2+\frac{10}{y}\right)'=\frac{8+45xy^2}{\cos^2(88x+8y+15xy^3)}-\frac{564\cdot\left(88x^2+\frac{10}{y}\right)^{563}\cdot 10}{y^2}$$

Понятие полного дифференциала и его нахождение

Полный дифференциал функции описывается выражением $df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0)\, dz$

Пример 3. Найдите полный дифференциал функции $z = 76\,x^{40}y^3 + 28\,x^{10}y^{81} + \dfrac{x^{41}}{y^{43}}$

$$z = 76\,x^{40}y^3 + 28\,x^{10}y^{81} + \frac{x^{41}}{y^{43}}$$

$$dz = z'_x \cdot dz + z'_y \cdot dy$$

$$z'_x = \left(76\,x^{40}y^3 + 28\,x^{10}y^{81} + \frac{x^{41}}{y^{43}}\right)' = \left(76\,x^{40}y^3\right)' + \left(28\,x^{10}y^{81}\right)' + \left(\frac{x^{41}}{y^{43}}\right)' = 3040\,x^{39}y^3 + 280\,x^9y^{81} + \frac{41\,x^{40}}{y^{43}}$$

$$z'_y = \left(76\,x^{40}y^3 + 28\,x^{10}y^{81} + \frac{x^{41}}{y^{43}}\right)' = \left(76\,x^{40}y^3\right)' + \left(28\,x^{10}y^{81}\right)' + \left(\frac{x^{41}}{y^{43}}\right)' = 228\,x^{40}y^2 + 2268\,x^{10}y^{80} - 43 \cdot \frac{x^{41}}{y^{44}}$$

$$dz = z'_x \cdot dz + z'_y \cdot dy = \left(3040\,x^{39}y^3 + 280\,x^9y^{81} + \frac{41\,x^{40}}{y^{43}}\right)dx + \left(228\,x^{40}y^2 + 2268\,x^{10}y^{80} - 43 \cdot \frac{x^{41}}{y^{44}}\right)dy$$