



Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

*Справочный материал к практике 12 по
дисциплине «Математика» для студентов
направления подготовки
09.03.02 «Информационные системы и
технологии»*

Частные производные. Полный дифференциал функции

*Составитель:
ст. преподаватель кафедры «Физико-
математические науки» Черемухин А. Д.*

Таблица производных и примеры нахождения производных функции одной переменной

1. $y = c$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$
3. $y = x^\mu$	$y' = \mu x^{\mu-1}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
5. $y = \log_a x$	$y' = \frac{\log_a e}{x}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
6. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
7. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
8. $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\operatorname{csc}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $y = \operatorname{arctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

$$y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v' \quad y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y = u(v(x)) \Rightarrow y' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Примеры нахождения производных

$$1. y = x^5 + \frac{3}{x} + \sqrt[7]{x} \Rightarrow y' = (x^5)' + (3 \cdot x^{-1})' + \left(x^{\frac{1}{7}}\right)' = 5x^4 - 3 \cdot x^{-2} + \frac{1}{7} \cdot x^{-\frac{6}{7}} = 5x^4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

$$3. y = \frac{\sin(x) + x^2}{\operatorname{tg}(x)} \Rightarrow y' = \frac{(\sin(x) + x^2)' \cdot \operatorname{tg}(x) - (\sin(x) + x^2) \cdot (\operatorname{tg}(x))'}{(\operatorname{tg}(x))^2} = \frac{(\cos(x) + 2x) \cdot \operatorname{tg}(x) - \frac{(\sin(x) + x^2)}{\cos^2(x)}}{(\operatorname{tg}(x))^2}$$

$$2. y = \ln(x) \cdot 3^x \Rightarrow y' = (\ln(x))' \cdot 3^x + (\ln(x)) \cdot (3^x)' = \frac{3^x}{x} + \ln(x) \cdot 3^x \cdot \ln(3)$$

$$4. y = \arcsin(\cos(x)) \Rightarrow y' = (\arcsin(\cos(x)))' = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} \cdot (\cos(x))' = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

$$5. y = \ln(x^3 + \ln(x)) \Rightarrow y' = (\ln(x^3 + \ln(x)))' = \frac{1}{x^3 + \ln(x)} \cdot (x^3 + \ln(x))' = \frac{3 \cdot x^2 + \frac{1}{x}}{x^3 + \ln(x)}$$



Пример 1. Найдите частные производные функции

$$z = 43 \cos(x) - 15 \ln(y) + 59 \arcsin(x) 16^y + \frac{1}{19} \frac{x^{\frac{57}{145}}}{\arcsin(y)} + \frac{5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}}{7x - 66y}$$

Исследуемая функция представляет собой сумму

5 других разных функций – распишем как производную суммы

$$1. z' = (43 \cos(x))' - (15 \ln(y))' + (59 \arcsin(x) 16^y)' + \left(\frac{1}{19} \frac{x^{\frac{57}{145}}}{\arcsin(y)} \right)' + \left(\frac{5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}}{7x - 66y} \right)'$$

В функции 2 переменных – x и y, значит, будет существовать 2 частных производных первого порядка

Возьмем производную по x, считая y и все функции чисто по y числами (а числа можно вынести за знак производной)

Кроме того, распишем все правила – в 5-м примере x и y есть и в числителе, и знаменателе, поэтому распишем по правилу производной от частного

$$z'_x = (43 \cos(x))' - (15 \ln(y))' + 16^y \cdot (59 \arcsin(x))' + \frac{1}{19 \cdot \arcsin(y)} \cdot \left(x^{\frac{57}{145}} \right)' + \frac{\left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}} \right)' \cdot (7x - 66y) - \left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}} \right) \cdot (7x - 66y)'}{(7x - 66y)^2}$$

$$z'_x = (43 \cos(x))' - (15 \ln(y))' + 16^y \cdot (59 \arcsin(x))' + \frac{1}{19 \cdot \arcsin(y)} \cdot \left(x^{\frac{57}{145}}\right)' + \frac{\left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}\right)' \cdot (7x - 66y) - \left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}\right) \cdot (7x - 66y)'}{(7x - 66y)^2}$$

Распишем производные от всех слагаемых

$$(43 \cos(x))' = 43 \cdot (-\sin(x))$$

$$(15 \ln(y))' \rightarrow (\text{х в записи нет}) \rightarrow 0$$

$$(59 \arcsin(x))' = \frac{59}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(x^{\frac{57}{145}}\right)' = \frac{57}{145} \cdot x^{\frac{57}{145}-1} = \frac{57}{145} \cdot x^{\frac{-88}{145}}$$

$$\left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}\right)' = (5\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{y^{15}}\right)' = \frac{5 \cdot 1}{2\sqrt{x}}$$

$$(7x - 66y)' = (7x)' - (66y)' = 7$$

Следовательно,

$$z'_x = -43 \cdot \sin(x) + \frac{59 \cdot 16^y}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{57}{145} \cdot x^{\frac{-88}{145}}}{19 \cdot \arcsin(y)} + \frac{\frac{5 \cdot 1}{2\sqrt{x}} \cdot (7x - 66y) - \left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}\right) \cdot 7}{(7x - 66y)^2}$$

Аналогично возьмем производные по y

$$1. z' = (43 \cos(x))' - (15 \ln(y))' + (59 \arcsin(x) 16^y)' + \left(\frac{1}{19} \frac{x^{\frac{57}{145}}}{\arcsin(y)} \right)' + \left(\frac{5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}}}{7x - 66y} \right),$$

$$z'_y = (43 \cos(x))' - (15 \ln(y))' + 59 \arcsin(x) \cdot (16^y)' + x^{\frac{57}{145}} \cdot \left(\frac{1}{19 \cdot \arcsin(y)} \right)' + \frac{\left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}} \right)' \cdot (7x - 66y) - \left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}} \right) \cdot (7x - 66y)'}{(7x - 66y)^2}$$

$$(43 \cos(x))' \rightarrow (y \text{ в записи нет}) \rightarrow 0$$

$$(15 \ln(y))' = \frac{15 \cdot 1}{y}$$

$$(16^y)' = 16^y \cdot \ln(16)$$

$$\left(\frac{1}{19 \cdot \arcsin(y)} \right)' = \frac{1}{19} \cdot (\arcsin(y)^{-1})' = \frac{1}{19} \cdot (-1) \cdot (\arcsin(y)^{-2}) \cdot \arcsin(y)' = \frac{1}{19 \cdot \arcsin^2(y) \cdot \sqrt{1-y^2}}$$

Следовательно,

$$\left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}} \right)' = (5\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{y^{15}} \right)' = -\frac{15}{y^{16}}$$

$$(7x - 66y)' = (7x)' - (66y)' = -66$$

$$z'_y = -\frac{15}{y} + 59 \arcsin(x) \cdot 16^y \cdot \ln(16) + \frac{x^{\frac{57}{145}}}{19 \cdot \arcsin^2(y) \cdot \sqrt{1-y^2}} + \frac{-\frac{15}{y^{16}} \cdot (7x - 66y) + \left(5\sqrt{x} + \frac{1}{y^{15}} \right) \cdot 66}{(7x - 66y)^2}$$

Пример 2. Найдите частные производные функции $\operatorname{tg}(88x + 8y + 15xy^3) + \left(88x^2 + \frac{10}{y}\right)^{564}$

Частные производные от сложных функций берутся по тем же правилам, что и производные сложных функций, и частные производные; но необходимо помнить, что если функция является сложной только по одной переменной, то производная по другой переменной будет равна 0

$$z'_x = \frac{1}{\cos^2(88x + 8y + 15xy^3)} \cdot (88x + 8y + 15xy^3)' + 564 \cdot \left(88x^2 + \frac{10}{y}\right)^{563} \cdot \left(88x^2 + \frac{10}{y}\right)' = \frac{88 + 15y^3}{\cos^2(88x + 8y + 15xy^3)} + 564 \cdot \left(88x^2 + \frac{10}{y}\right)^{563} \cdot 176 \cdot x$$

$$z'_y = \frac{1}{\cos^2(88x + 8y + 15xy^3)} \cdot (88x + 8y + 15xy^3)' + 564 \cdot \left(88x^2 + \frac{10}{y}\right)^{563} \cdot \left(88x^2 + \frac{10}{y}\right)' = \frac{8 + 45xy^2}{\cos^2(88x + 8y + 15xy^3)} - \frac{564 \cdot \left(88x^2 + \frac{10}{y}\right)^{563} \cdot 10}{y^2}$$

Полный дифференциал функции описывается выражением $df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0) dz$

Пример 3. Найдите полный дифференциал функции $z = 76x^{40}y^3 + 28x^{10}y^{81} + \frac{x^{41}}{y^{43}}$

$$z = 76x^{40}y^3 + 28x^{10}y^{81} + \frac{x^{41}}{y^{43}}$$

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$$

$$z'_x = \left(76x^{40}y^3 + 28x^{10}y^{81} + \frac{x^{41}}{y^{43}} \right)' = (76x^{40}y^3)' + (28x^{10}y^{81})' + \left(\frac{x^{41}}{y^{43}} \right)' = 3040x^{39}y^3 + 280x^9y^{81} + \frac{41x^{40}}{y^{43}}$$

$$z'_y = \left(76x^{40}y^3 + 28x^{10}y^{81} + \frac{x^{41}}{y^{43}} \right)' = (76x^{40}y^3)' + (28x^{10}y^{81})' + \left(\frac{x^{41}}{y^{43}} \right)' = 228x^{40}y^2 + 2268x^{10}y^{80} - 43 \cdot \frac{x^{41}}{y^{44}}$$

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy = \left(3040x^{39}y^3 + 280x^9y^{81} + \frac{41x^{40}}{y^{43}} \right) dx + \left(228x^{40}y^2 + 2268x^{10}y^{80} - 43 \cdot \frac{x^{41}}{y^{44}} \right) dy$$