



Математический анализ
2 семестр
Занятие №7

Вычисление площадей и
объемов при помощи
определенных интегралов

Занятие 7. Вычисление площадей

Площадь фигуры ограниченной функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в декартовых координатах определяется формулой:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx,$$

где a и b , определяются либо существом задачи, либо являются точками пересечения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Найти площади, ограниченные кривыми в декартовых координатах. Изобразить графики функций.

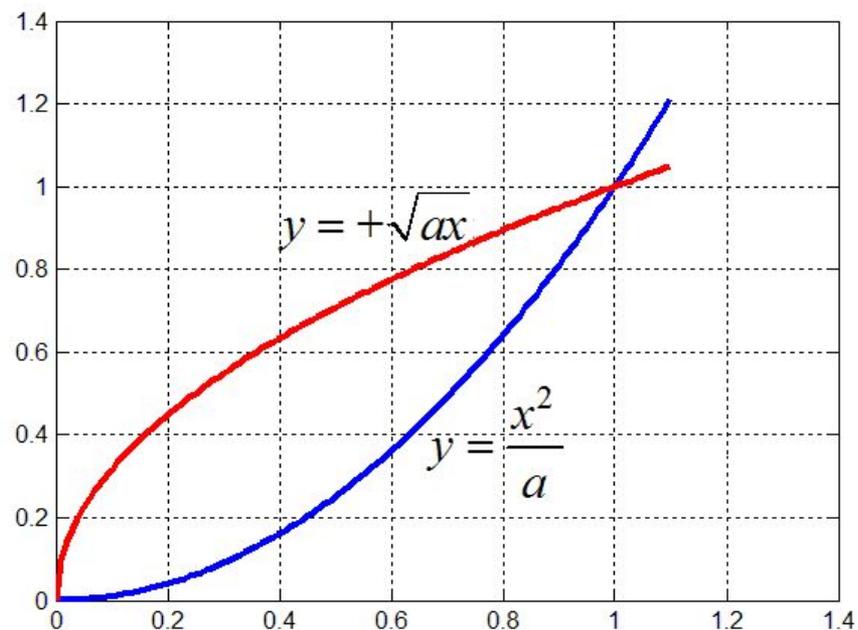
Занятие 7. Вычисление площадей

Учебный пример:

$$ax = y^2; \quad ay = x^2;$$

$$y = \pm\sqrt{ax}; \quad y = \frac{x^2}{a};$$

$$\sqrt{ax} = \frac{x^2}{a}; \quad x = 0; \quad x = a;$$



$$S = \int_0^a \left| \sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right| dx = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \sqrt{a} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^a - \frac{x^3}{3a} \Big|_0^a =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{a} \cdot a^{3/2} - \frac{a^2}{3} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) a^2 = \frac{a^2}{3}$$

Занятие 7. Вычисление площадей

Найти площади, ограниченные кривыми в декартовых координатах. Изобразить графики функций.

1. $y = x^2$; $x + y = 2$

5. $y^2 = 2x + 1$; $x - y = 1$

2. $y = 2x - x^2$; $x + y = 0$

6. $y = \frac{1}{1+x^2}$; $y = \frac{x^2}{2}$

3. $y = x^2$; $y = x^3 / 3$

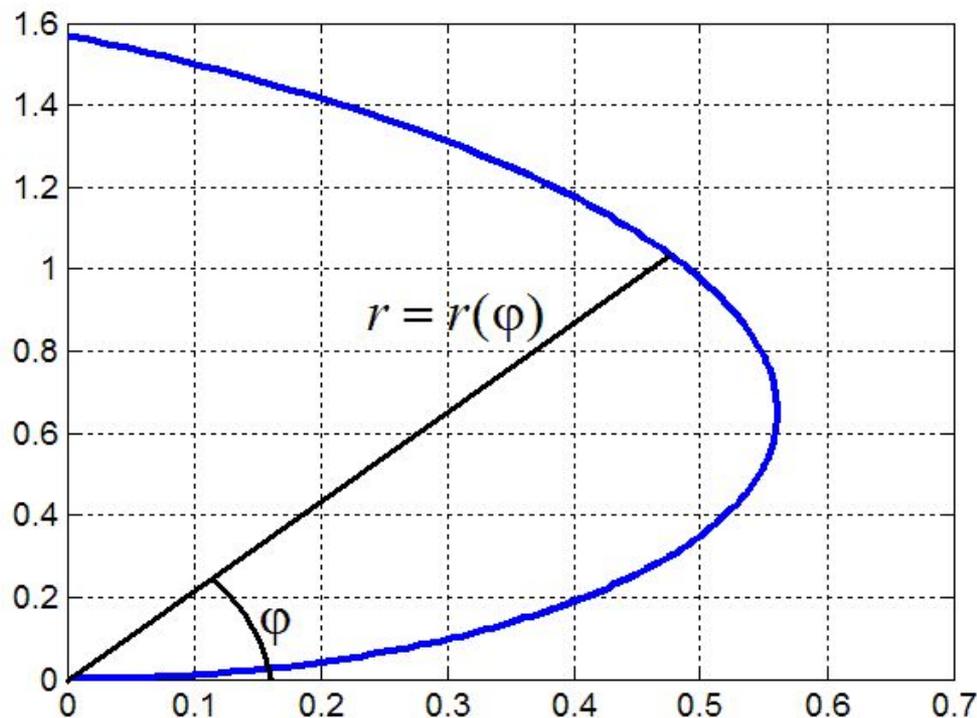
7. $y = x - x^2 \sqrt{x}$; $y = 0$

4. $y = 6 - x^2$; $y = x^2 / 2$

Занятие 7. Кривые в полярных координатах

Площадь сектора, образованного функцией $r = r(\varphi)$, заданной в полярных координатах, в интервале $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ определяется формулой:

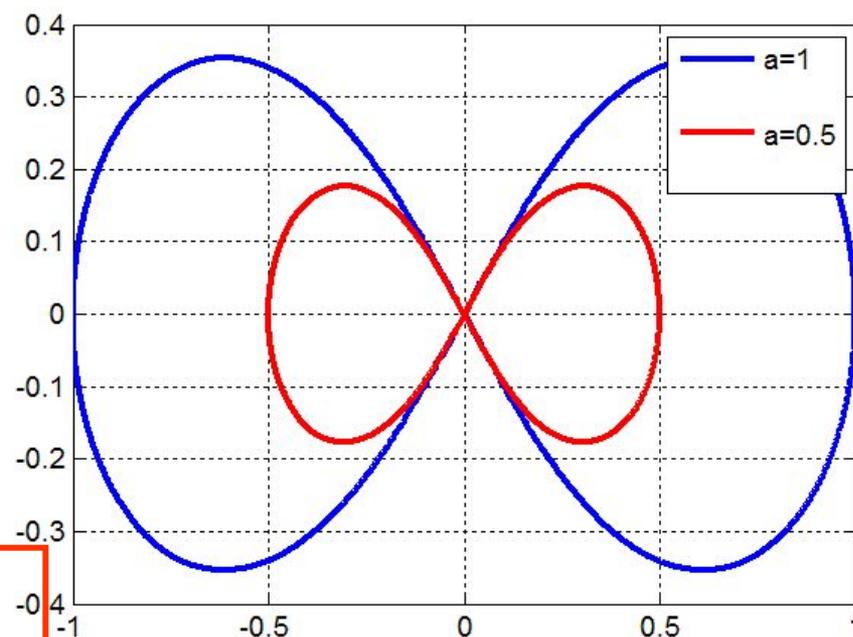
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$



Занятие 7. Кривые в полярных координатах

Изобразить кривые в указанных пределах и сосчитать площадь криволинейных секторов, образованных данными кривыми.

1. *Спираль Архимеда*
 $r = a\varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$
2. $r = \sqrt{2a\varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$
3. $r = ae^{b\varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$
4. *Кардиоида*
 $r = a(1 + \cos \varphi); \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
5. *Лемниската*
 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi; \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4};$



Занятие 7. Объем тела вращения

Пусть имеется кривая $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$. И пусть эта кривая вращается около оси OX . Получающееся тело называется телом вращения. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то объем тела вращения вычисляется по следующей формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx .$$

Изобразить тело вращения, образованного следующими кривыми, и найти его объем.

Занятие 7. Объем тела вращения

Изобразить тело вращения, образованного следующими кривыми, и найти его объем.

1. $y^2 = 2px; \quad 0 \leq x \leq h;$
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad -a \leq x \leq a;$
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a \leq x \leq a + h;$
4. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1; \quad -h \leq x \leq h;$
5. $y = 2x - x^2; \quad 0 \leq x \leq 2;$

Занятие 7. Объем тела вращения

В случае если тело вращения образуется двумя кривыми $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то его объем можно найти по следующей формуле

$$V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$$

Необходимо быть внимательным относительно того, какая функция лежит ниже, а какая выше. В зависимости от этого одна фигура будет лежать внутри другой.

Изобразить тело вращения, ограниченное двумя кривыми, и найти его объем.

$$y = x^2; \quad y = \sqrt{x};$$

$$V = \pi \int_0^1 (1 - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}$$

Занятие 7. Объем тела вращения

Изобразить тело вращения, ограниченное двумя кривыми, и найти его объем.

1. $y = \sqrt{ax}; \quad y = \frac{x^2}{a};$

2. $y = x^2; \quad y = \frac{x^3}{3};$

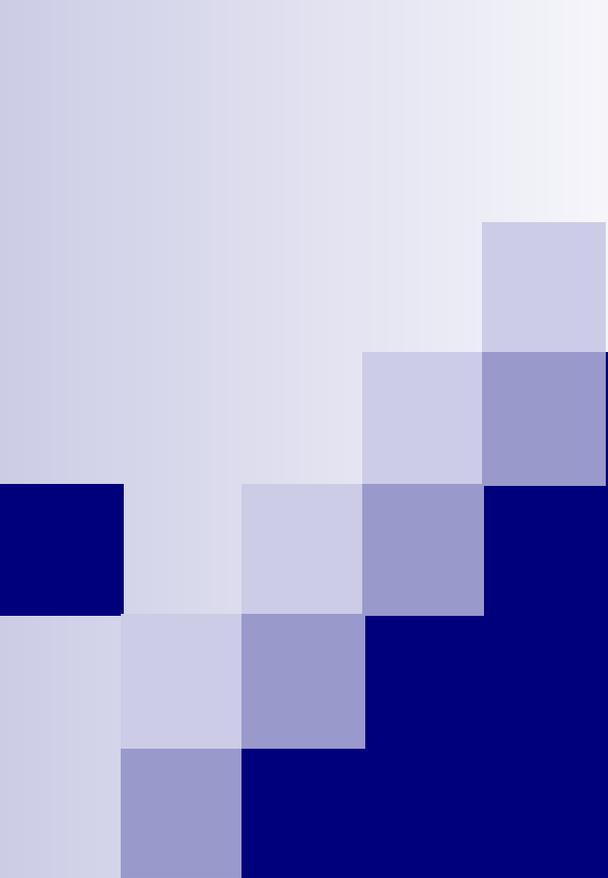
3. $y = \sqrt{x}; \quad y = \frac{x^3}{32};$

4. $y = \sqrt[4]{x}; \quad y = x;$

5. $y = 2x - x^2; \quad y = x;$

6. $y = x^2; \quad x + y = 2;$

7. $x^2 + y^2 = 8; \quad y = \frac{x^2}{2};$



Спасибо за
внимание

Занятие окончено