Математический анализ
2 семестр
Занятие №7

Вычисление площадей и объемов при помощи определенных интегралов

Занятие 7. Вычисление площадей

Площадь фигуры ограниченной функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$
в декартовых координатах определяется формулой:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx\,,$$

где a и b, определяются либо существом задачи,
либо являются точками пересечения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Найти площади, ограниченные кривыми
в декартовых координатах. Изобразить графики функций.

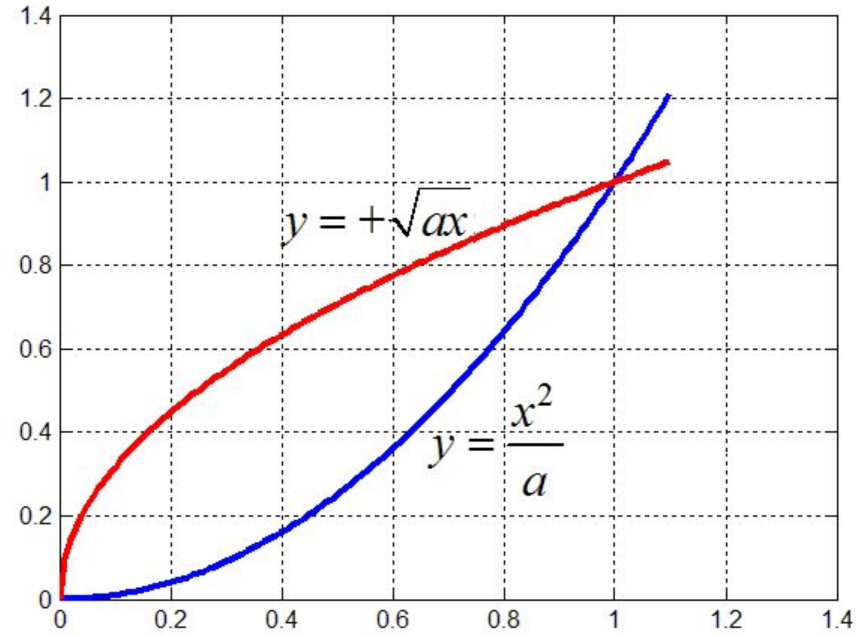
Занятие 7. Вычисление площадей

Учебный пример:

$$ax = y^2; \qquad ay = x^2;$$

$$y = \pm\sqrt{ax}; \qquad y = \frac{x^2}{a};$$

$$\sqrt{ax} = \frac{x^2}{a}; \qquad x = 0; \;\; x = a;$$



$$S = \int_0^a \left| \sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right| dx = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \sqrt{a}\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a - \frac{x^3}{3a}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{a}\cdot a^{3/2} - \frac{a^2}{3} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)a^2 = \frac{a^2}{3}$$

Занятие 7. Вычисление площадей

Найти площади, ограниченные кривыми
в декартовых координатах. Изобразить графики функций.

1. $y = x^2; \qquad x + y = 2$

2. $y = 2x - x^2; \quad x + y = 0$

3. $y = x^2; \qquad y = x^3 / 3$

4. $y = 6 - x^2; \quad y = x^2 / 2$

5. $y^2 = 2x + 1; \quad x - y = 1$

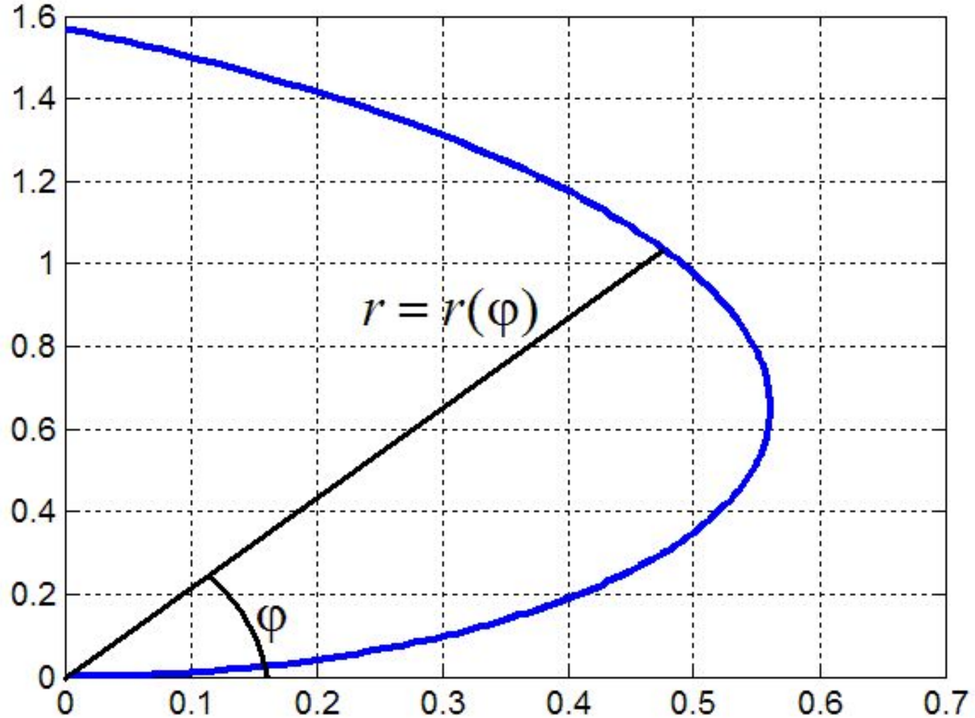
6. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}; \quad y = \dfrac{x^2}{2}$

7. $y = x - x^2\sqrt{x}; \qquad y = 0$

Занятие 7. Кривые в полярных координатах

Площадь сектора, образованного функцией $r = r(\varphi)$, заданной в полярных координатах, в интервале $\alpha \le \varphi \le \beta$ определяется формулой:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$



Занятие 7. Кривые в полярных координатах

Изобразить кривые в указанных пределах
и сосчитать площадь криволинейных секторов,
образованных данными кривыми.

1. *Спираль Архимеда*

   $r = a\varphi; \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

2. $r = \sqrt{2a\varphi}; \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

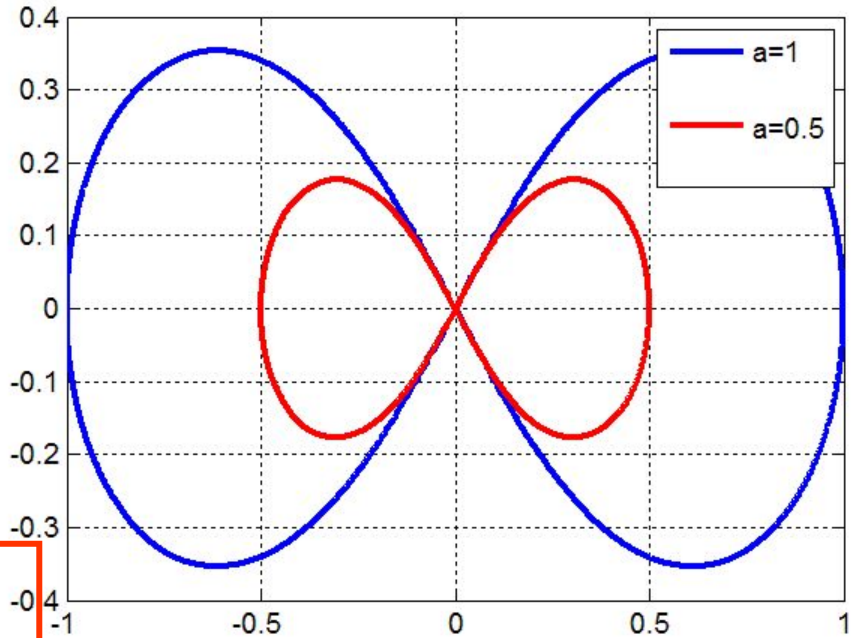
3. $r = ae^{b\varphi}; \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

4. *Кардиоида*

   $r = a(1+\cos\varphi); \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

5. *Лемниската*

   $r^2 = a^2\cos 2\varphi; \qquad -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4};$



Занятие 7. Объем тела вращения

Пусть имеется кривая $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$.
И пусть эта кривая вращается около оси OX. Получающееся тело называется телом вращения. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то объем тела вращения вычисляется по следующей формуле

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx .$$

Изобразить тело вращения, образованного следующими кривыми, и найти его объем.

Занятие 7. Объем тела вращения

Изобразить тело вращения, образованного следующими кривыми, и найти его объем.

1. $y^2 = 2px; \quad 0 \le x \le h;$

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \quad -a \le x \le a;$

3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \quad a \le x \le a + h;$

4. $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1; \quad -h \le x \le h;$

5. $y = 2x - x^2; \quad 0 \le x \le 2;$

Занятие 7. Объем тела вращения

В случае если тело вращения образуется двумя кривыми $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то его объем можно найти по следующей формуле

$$V = \pi \int_a^b \left[f_1^2(x) - f_2^2(x) \right] dx .$$

Необходимо быть внимательным относительно того, какая функция лежит ниже, а какая выше. В зависимости от этого одна фигура будет лежать внутри другой.

Изобразить тело вращения, ограниченное двумя кривыми, и найти его объем.

$$y = x^2; \qquad y = \sqrt{x};$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(1 - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}$$

Занятие 7. Объем тела вращения

Изобразить тело вращения, ограниченное двумя кривыми, и найти его объем.

1. $y = \sqrt{ax}; \qquad y = \dfrac{x^2}{a};$

2. $y = x^2; \qquad y = \dfrac{x^3}{3};$

3. $y = \sqrt{x}; \qquad y = \dfrac{x^3}{32};$

4. $y = \sqrt[4]{x}; \qquad y = x;$

5. $y = 2x - x^2; \qquad y = x;$

6. $y = x^2; \qquad x + y = 2;$

7. $x^2 + y^2 = 8; \qquad y = \dfrac{x^2}{2};$

Спасибо за внимание

Занятие окончено