Определение производной

Задача о вычислении мгновенной скорости

$s(t) = 4t^2$ - закон движения материальной точки по прямой

s - путь, пройденный за время t ($t \geq 0$)

Вычислим $v_{ср}$ - среднюю скорость точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$

$s(2) = 4 \cdot 2^2 = 16$; $s(5) = 4 \cdot 5^2 = 100$;

$s(5) - s(2) = 100 - 16 = 84$; $t_2 - t_1 = 5 - 2$.

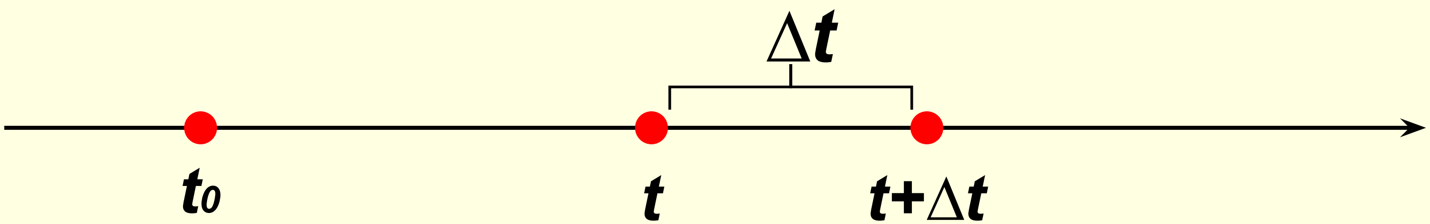
$$v_{ср} = \frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{84}{3} = 28.$$

- Пусть точка движется вдоль прямой по закону S(t).

Тогда за промежуток времени t точка проходит расстояние S(t).

Пусть Δt – малый промежуток времени. Путь, пройденный за время $t+\Delta t$, равен $S(t+\Delta t)$.

Тогда средняя скорость



$$v_{ср.} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Задача о вычислении мгновенной скорости

$s(t) = 4t^2$ **Вычислим** $v_{ср}$

за промежуток времени от t ***до*** $t + \Delta t$

$s(t) = 4t^2$; $s(t + \Delta t) = 4(t + \Delta t)^2$;

$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ – ***путь, пройденный точкой за промежуток времени от*** t ***до*** $t + \Delta t$

$\Delta s = 4(t + \Delta t)^2 - 4t^2 = (8t + 4\Delta t)\Delta t$;

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(8t + 4\Delta t)\Delta t}{\Delta t} = 8t + 4\Delta t.$$

Общий случай:

точка движется по прямой по закону $s(t) = f(t)$

Тогда её **мгновенной скоростью v** в момент времени t называют **предел** (если он существует), к которому стремится её средняя скорость на промежутке времени $[t; t + \Delta t]$ при $\Delta t \to 0$:

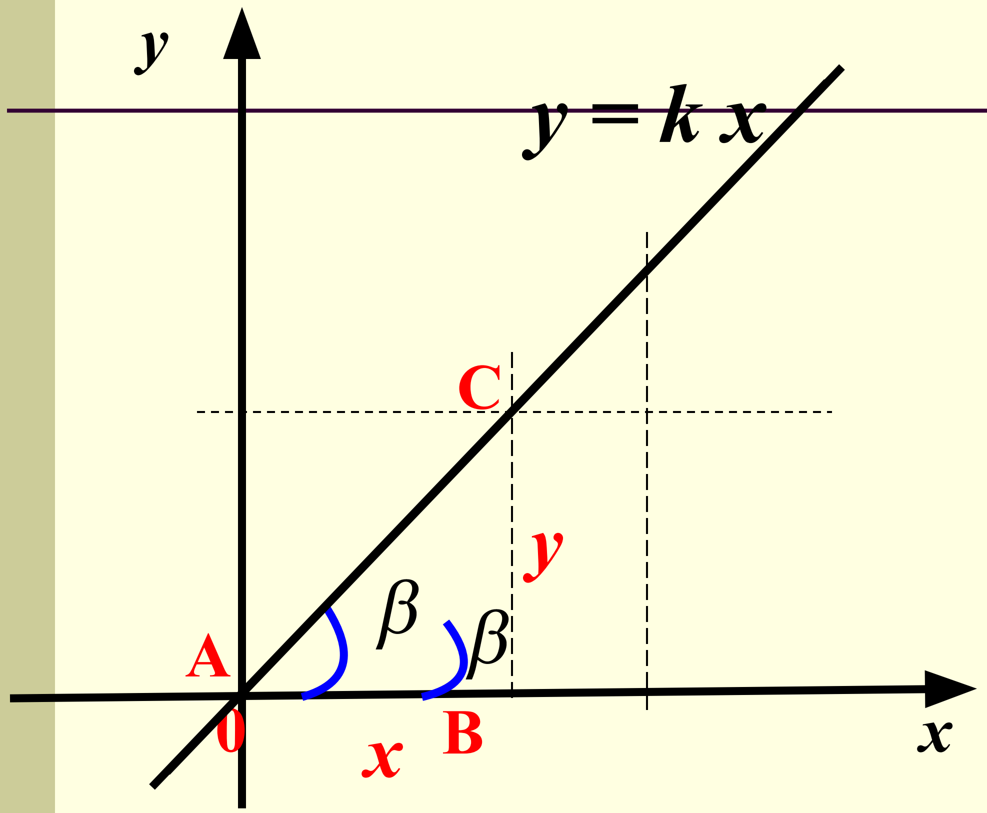
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Величина Δt – приращение времени

Величина $\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ - приращение пути

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Повторение: вычисление тангенса угла наклона прямой к оси Ох



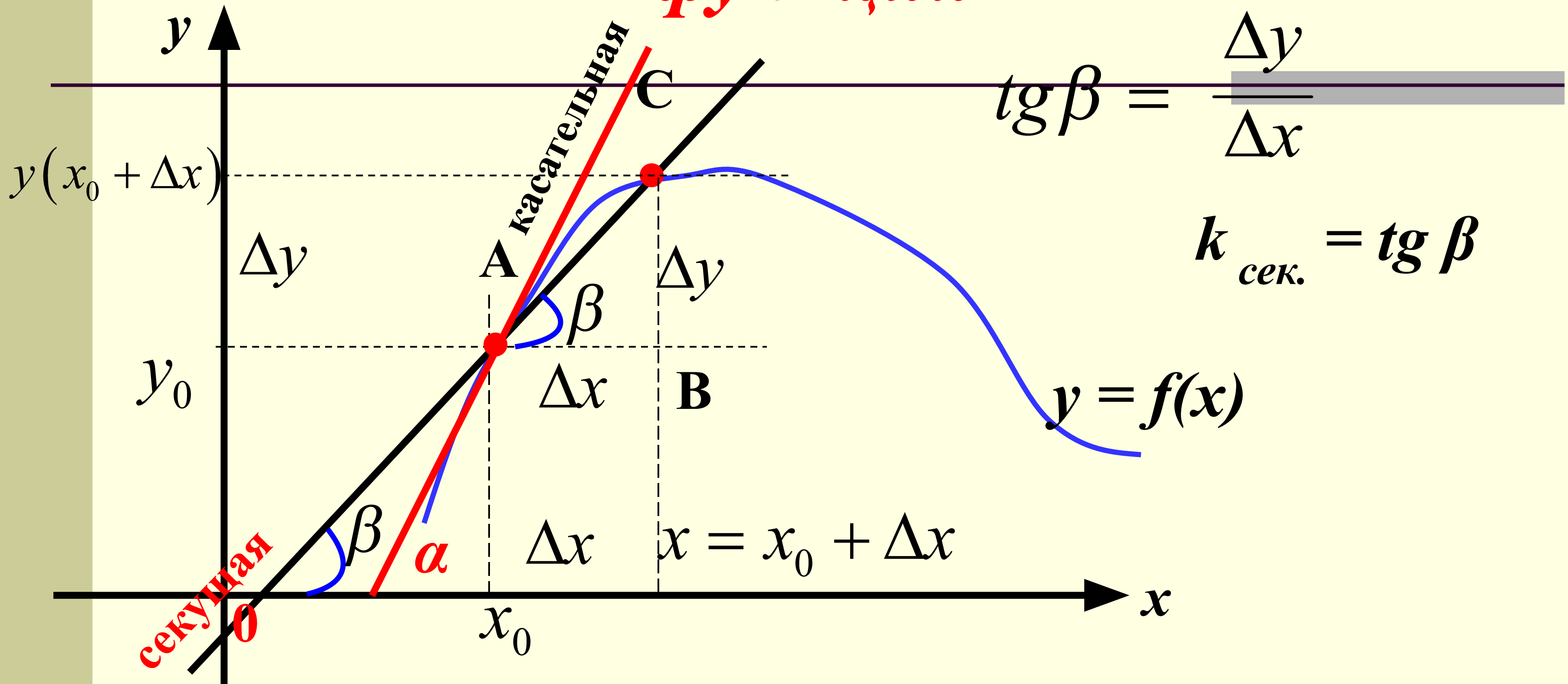
$$k = \frac{y}{x}$$

$$tg\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{y}{x}$$

$$tg\beta = k$$

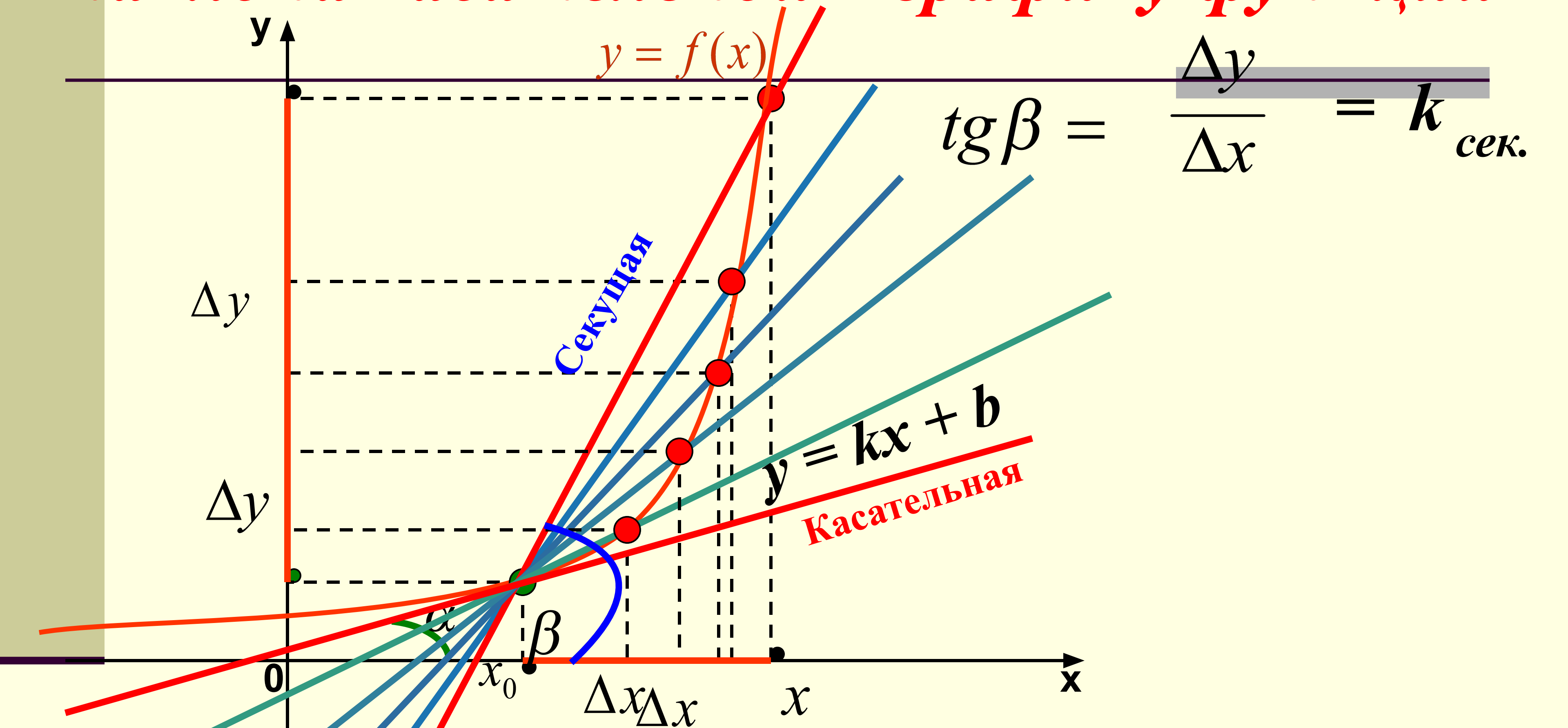
Очевидно – при параллельном переносе прямой, тангенс угла наклона остаётся равен угловому коэффициенту прямой

Дадим определение <u>касательной</u> к графику функции



Касательной к графику функции *f(x)* в точке *A(x; f (x))* называется прямая, представляющая предельное положение секущей АС, (если оно существует) когда точка С стремится к точке А.

Задача о вычислении тангенса угла наклона касательной к графику функции



$$k_{кас.} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{сек.} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\beta = tg\,\alpha$$

Задача о вычислении мгновенной скорости

Задача о вычислении тангенса угла наклона касательной к графику функции

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

$$tg\,\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_{кас.}$$

В каждой из задач надо было найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю

Историческая справка

Тайны планетных орбит.

Древнегреческие учёные умели решать немногие задачи кинематики – рассчитать либо равномерное прямолинейное движение, либо равномерное вращение вокруг оси.

А планеты на небосводе двигались по самым замысловатым кривым . Свести эти движения планет к простым древним учёным не удавалось.

Лишь в 17 веке немецкому учёному Иоганну Кеплеру удалось сформулировать законы движения планет. Оказалось, что планеты движутся по эллипсам, и притом неравномерно. Объяснить, почему это так, Кеплер не смог.

В конце 17 века Исаак Ньютон открыл законы динамики, сформулировал закон всемирного тяготения и развил математические методы, позволявшие сводить неравномерное к равномерному, неоднородное к однородному, криволинейное к прямолинейному.

В основе лежала простая идея – движение любого тела за малый промежуток времени можно приближённо рассматривать как прямолинейное и равномерное.

Одновременно с Ньютоном немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц изучал, как проводить касательные к произвольным кривым.

Он также развил новое исчисление, которое оказалось по сути дела тождественным построенному Ньютоном. Обозначения, введённые Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранились и по сей день.

Новая математика Ньютона и Лейбница состояла из двух больших частей – дифференциального и интегрального исчислений.

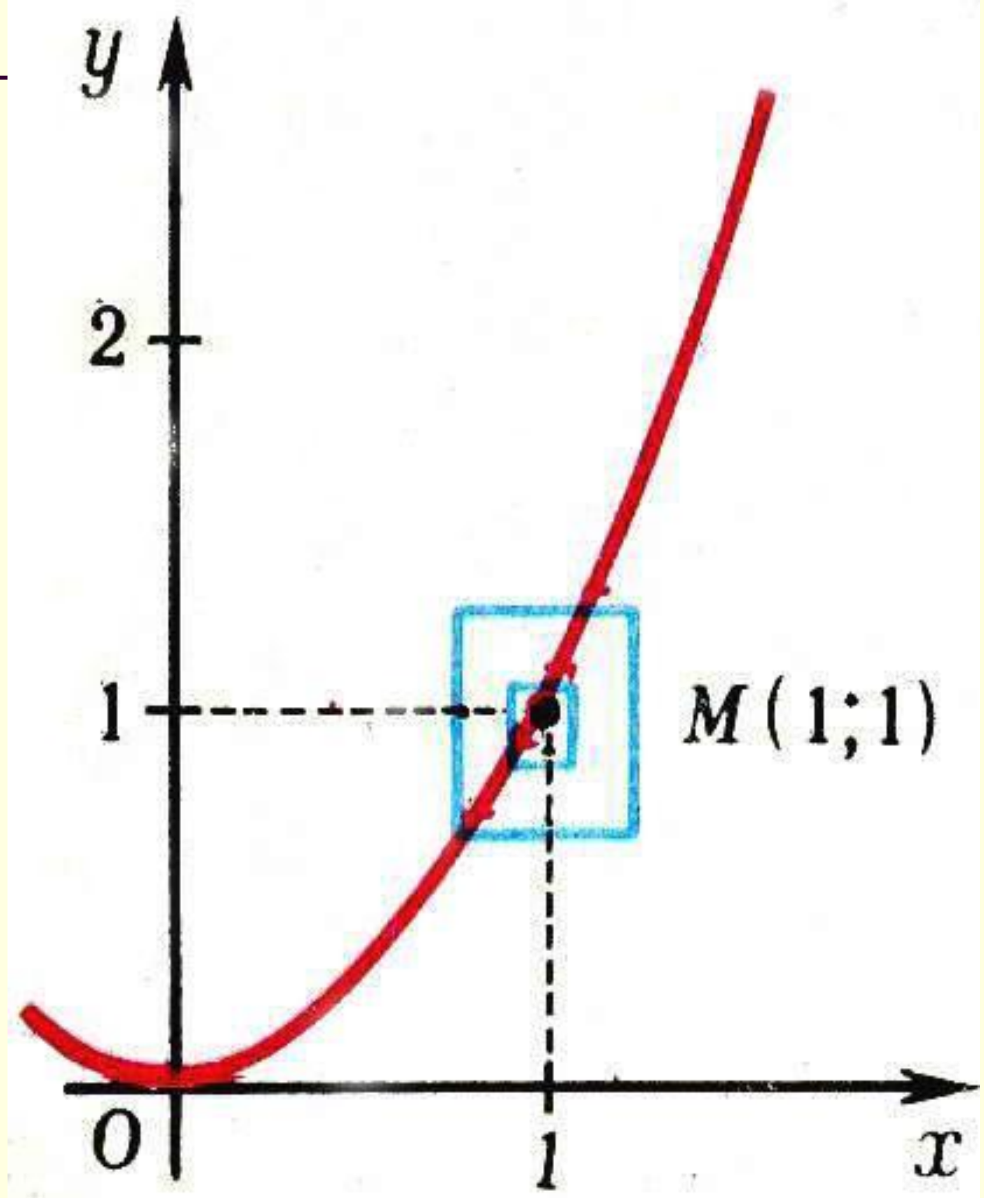
В первом из них говорилось, как, изучая малую часть явления, сводить неравномерное к равномерному.

Во второй – как из малых равномерных частей конструировать сложное неравномерное явление.

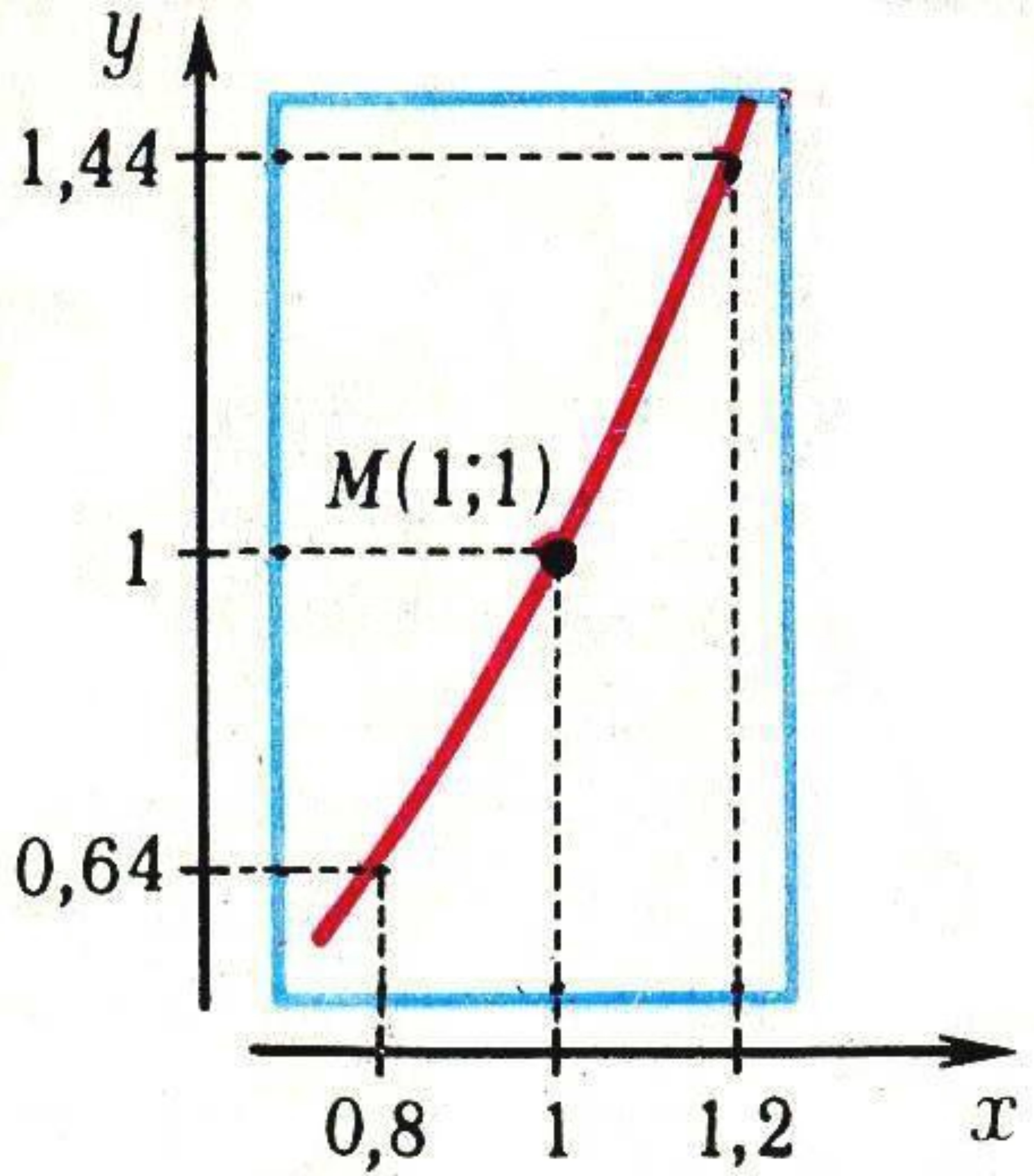
Итак, идём по стопам Ньютона и Лейбница!

Рассмотрим график функции $y = x^2$ *вблизи точки М(1;1),*

изображённый в разных масштабах.

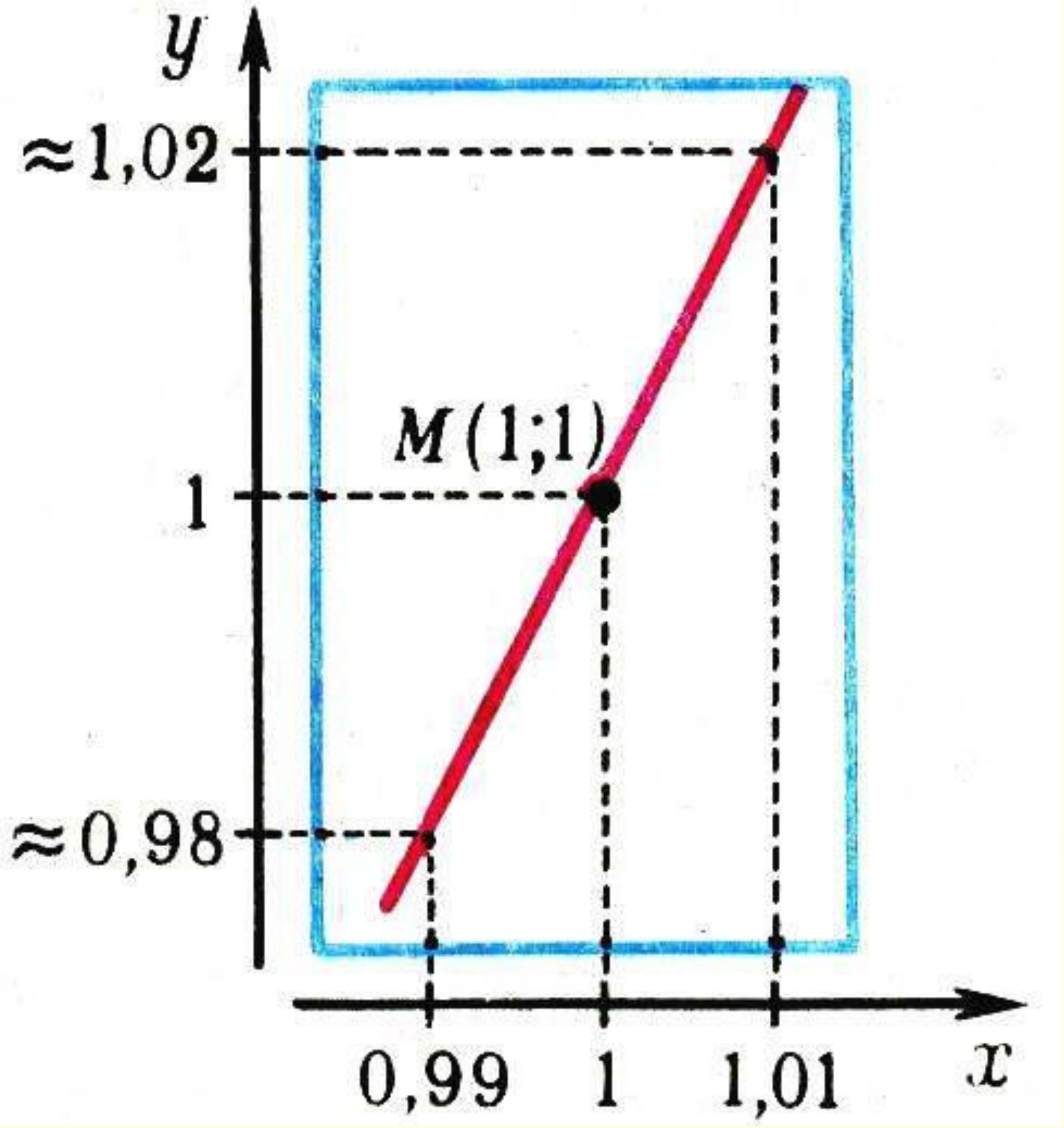


Как изменилась конфигурация графика?



Определите радиус окрестности точки x = 1

Как изменилась конфигурация графика?



Основные выводы

1. *Чем крупнее масштаб, тем меньше график функции будет отличаться от некоторой прямой, проходящей через точку М(1;1).*

2. *То же самое будет происходить с графиком функции вблизи любой другой точки.*

3. *Этим свойством обладают и многие другие кривые: окружность, гипербола, синусоида и т. д.*

Такое свойство функций называют «линейность в малом»

- Очевидно, если $\Delta t \longrightarrow 0$, то $V_{ср.} \longrightarrow V_{мгн.}$

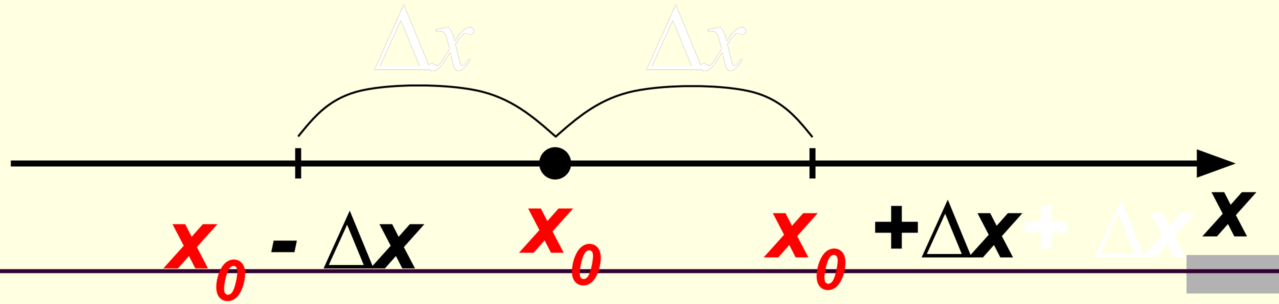
Значит,

$$v_{мгн.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

или $$\boxed{v_{мгн.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t},}$$

где Δt – приращение времени

ΔS - приращение пути.



Изменим x_0 на величину Δx.

Δx - называется приращением аргумента.

x – новое значение аргумента

Величина $y(x) - y(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 и обозначается $\Delta y(x_0)$.

$$\Delta y\left(x_0\right) = y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)$$

Таким образом, чтобы вычислить приращение функции f(x) при переходе от точки x_0 к точке $x = x_0 + \Delta x$, нужно:

1. найти значение функции $f(x_0)$;

2. найти значение функции $f(x_0 + \Delta x)$

3. найти разность $f(x_0 + \Delta x) – f(x_0)$

В математике операция нахождения предела отношения приращения функции Δ f к приращению аргумента Δ x , при условии, что приращение Δ x → 0 называется -

дифференцирование функции

Результат выполнения называют производной и обозначают: $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Определение производной

Производной функции в точке х называется <u>предел отношения приращения функции</u> в этой точке (Δf) <u>к соответствующему приращению аргумента</u> (Δx), когда <u>приращение аргумента стремится к нулю</u>

Определение производной

Производной функции $f(x)$ в точке x_0

называется ***число****, к которому стремится*

отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0.$

Чтобы найти производную функции в точке, надо:

1. найти приращение функции в точке X_0 ;
2. найти отношение приращения функции к приращению аргумента;
3. вычислить предел полученного отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Пример нахождения производной

Дано: $f(x) = x^2 + 1.$

Решение

Нати $f'(x).$

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad f(x_0) = {}_0^{2} + 1$$

$$f(x_0 + \Delta x) = ({}_0 + \Delta\ )^2 + 1 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1$$

$$\Delta f(x) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - \left(x_0^2 + 1\right) =$$

$$= \cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \cancel{+1} - \cancel{x_0^2} \cancel{-1} = \Delta x\left(2\ {}_0x + \Delta\ \right)$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\left(2\ {}_0x + \Delta\ \right)}{\cancel{\Delta x}} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\text{Если } \Delta x \to 0, \text{ то } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$$

Значит, $f'(x) = 2x.$

Механический смысл производной

$$v_{мг.}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Механический смысл производной состоит в том, что производная пути по времени равна мгновенной скорости в момент времени t_0:

$$S'(t) = V_{мг}(t)$$

Геометрический смысл производной.

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

$$f'\left(x_0\right) = tg\alpha = k$$