Колебания-2.

Свободные затухающие колебания, их характеристики. Коэффициент затухания. Логарифмический декремент. Энергия гармонического осциллятора. Добротность. Вынужденные колебания, явление резонанса.

- Рассмотрим свободные (собственные) затухающие колебания. Система выведена из положения равновесия внешними силами и предоставлена самой себе. Она будет находится только под действием квазиупругой силы и силы сопротивления среды.
- При малых скоростях Fсопр ~ v:

$$f_r = -rv = -r\dot{x}$$

- где r - коэффициент сопротивления.
- Второй закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad \blacktriangleright \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- где обозначены: $2\beta = \frac{r}{m}$ $\qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$
- w_0- частота, с которой совершались бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т.е. при r = 0- это собственная частота колебаний системы.
- Гармонический осциллятор - размах колебаний (определяемый амплитудой) остаётся постоянным. При наличии сопротивления среды- размах колебаний уменьшается. Значит решение имеет вид:

$$x = a(t)\cos(\omega t + \alpha)$$

- где *a(t)* – некоторая функция времени.

- Продифференцировав по времени получим:

$$\dot{x} = \dot{a}\cos(\omega t + \alpha) - a\omega\sin(\omega t + \alpha),$$

$$\ddot{x} = \ddot{a}\cos(\omega t + \alpha) - 2\dot{a}\omega\sin(\omega t + \alpha) - a\omega^2\cos(\omega t + \alpha).$$

➤

$$\left[\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) a\right]\cos(\omega t + \alpha) - 2\omega\left[\dot{a} + \beta a\right]\sin(\omega t + \alpha) = 0$$

- Учитывая, $\sin(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha)$
- Получим:

$$\dot{a} + \beta a = 0$$
$$\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) a = 0.$$

➤ $\frac{da}{dt} = -\beta a$ ➤ $\frac{da}{a} = -\beta\, dt$

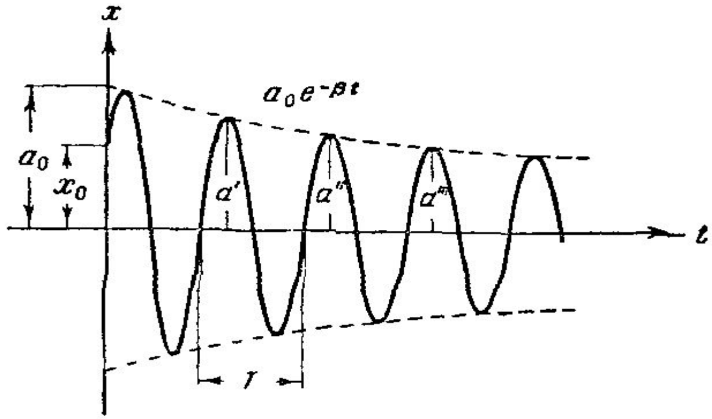
- Проинтегрировав:

$\ln a = -\beta t + \ln a_0$ ➤ $a = a_0 e^{-\beta t}$ ➤ $\dot{a} = -\beta a$, $\ddot{a} = \beta^2 a$

- Получим: $\beta^2 a - 2\beta^2 a + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) a = 0$ ➤ $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$.
- *w* вещественна, если $w_0^2 > \beta^2$, решение уравнения имеет вид:

$$x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

- График функции решения уравнения $x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$ имеет вид:



- Амплитуда меняется по гармоническому закону: $a = a_0 e^{-\beta t}$
- Скорость затухания колебаний определяется коэффициентом затухания – $\beta = r/2m$
- Период затухающих колебаний: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$
- С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается.
- $\dfrac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}$ - <u>декремент затухания</u>
- $\lambda = \ln\dfrac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T$ - <u>логарифмический декремент</u> затухания

- Логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в е раз.
- Для характеристики колебательной системы используется также величина добротность:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$$

- Добротность пропорциональная числу колебаний N_e , совершаемых системой за время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в е раз.
- Если колеблющаяся система сама управляет внешним воздействием, обеспечивая согласованность сообщаемых ей толчков со своим движением. Такая система называется автоколебательной, а совершаемые ею незатухающие колебания – автоколебаниями.

Вынужденные колебания, явление резонанса.

- Вынужденными колебаниями называют колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы-вынуждающей силы.
- Пусть вынуждающая сила изменяется по закону: $f = F_0 \cos \omega t$
- В системе ещё действуют квазиупругая сил… сопротивления среды, пропорциональная скорости v:
- $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$ … $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$ собственная частота колебаний системы.
- Общее решение складывается из суммы:
  - Общего решения однородного дифференциального уравнения:
  - где $w' = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$, $x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha')$ …стоянные.
  - Частного решения неоднородного уравнения:

$$x = a \cos(\omega t - \varphi)$$

$$x = a\cos(\omega t - \varphi) \blacktriangleright$$

- $$2\beta\dot{x} = -2\beta\omega a\sin(\omega t - \varphi) = 2\beta\omega a\cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$
- $$\ddot{x} = -\omega^2 a\cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a\cos(\omega t - \varphi + \pi) \qquad (2)$$
- $$\omega_0^2 x = \omega_0^2 a\cos(\omega t - \varphi) \qquad (3)$$

- Колебание $f_0$coswt- является суммой трёх гармонических колебаний: (1)(2)(3)
- При этом амплитуда *a* удовлетворяет равенство:

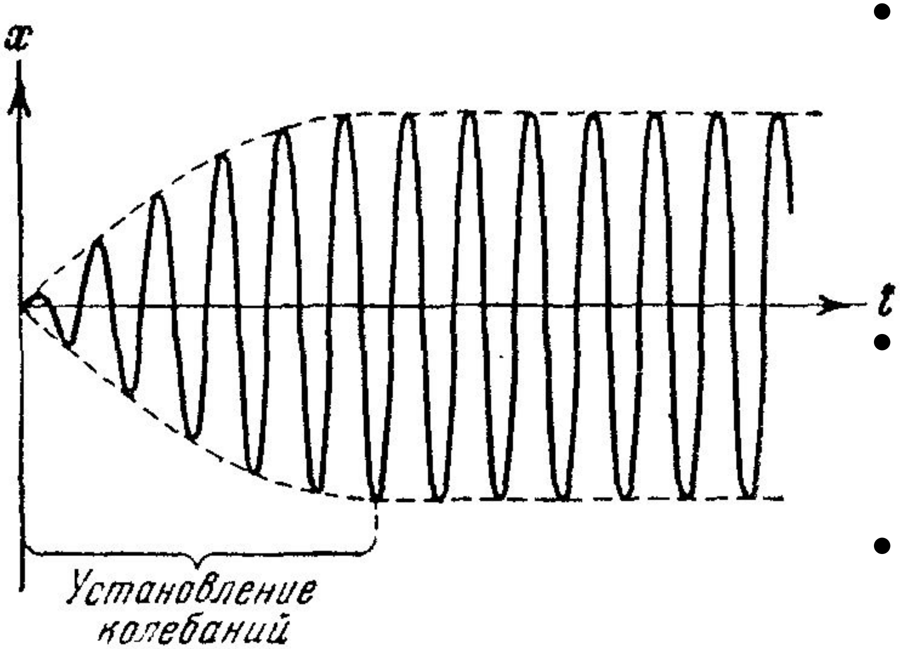
$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2\omega^2 a^2 = f_0^2 \blacktriangleright \quad a = \frac{f_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Частное решение однородного уравнения:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

- За установление колебании отвечает общее решение установления колебаний.



- Из-за экспоненциального множителя с ростом t больший вклад оказывает только частное решение неоднородного уравнения
- Гармонические колебания происходят с частой вынуждающей силы.
- Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы.

- Из-за экспоненциального множителя с ростом t больший вклад оказывает только частное решение неоднородного уравнения
- Гармонические колебания происходят с частой вынуждающей силы.
- Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы.

- Амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы, и как следствие: колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при определённой частоте, называемой
- . Явление – резонанс.

$$-4\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\omega+8\beta^2\omega=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\omega &= 0\\ \omega &= \pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

$$a_{рез}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

- Резонансные кривые- зависимость амплитуды вынуждающих колебаний от частоты вынуждающей силы при разных β