

## **Колебания-2.**

Свободные затухающие колебания, их характеристики.

Коэффициент затухания.

Логарифмический декремент.

Энергия гармонического осциллятора. Добротность.

Вынужденные колебания, явление резонанса.

- Рассмотрим свободные (собственные) затухающие колебания. Система выведена из положения равновесия внешними силами и предоставлена самой себе. Она будет находиться только под действием квазиупругой силы и силы сопротивления среды.
- При малых скоростях  $F_{\text{сопр}} \sim v$ :

$$f_r = -rv = -r\dot{x}$$

- где  $r$  - коэффициент сопротивления.

- Второй закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- где обозначены:  $2\beta = \frac{r}{m}$        $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
- $\omega_0$  - частота, с которой совершались бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т.е. при  $r = 0$  - это собственная частота колебаний системы.
- Гармонический осциллятор - размах колебаний (определяемый амплитудой) остаётся постоянным. При наличии сопротивления среды - размах колебаний уменьшается. Значит решение имеет вид:

$$x = a(t) \cos(\omega t + \alpha)$$

- где  $a(t)$  - некоторая функция времени.

- Продифференцировав по времени получим:

$$\dot{x} = \dot{a} \cos(\omega t + \alpha) - a\omega \sin(\omega t + \alpha),$$

$$\ddot{x} = \ddot{a} \cos(\omega t + \alpha) - 2\dot{a}\omega \sin(\omega t + \alpha) - a\omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

$$[\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a] \cos(\omega t + \alpha) - 2\omega[\dot{a} + \beta a] \sin(\omega t + \alpha) = 0$$

- Учитывая,  $\sin(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha)$

- Получим:

$$\dot{a} + \beta a = 0$$

$$\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0 \rightarrow \frac{da}{dt} = -\beta a \rightarrow \frac{da}{a} = -\beta dt$$

- Проинтегрировав:

$$\ln a = -\beta t + \ln a_0 \rightarrow a = a_0 e^{-\beta t} \rightarrow \begin{aligned} \dot{a} &= -\beta a \\ \ddot{a} &= \beta^2 a \end{aligned}$$

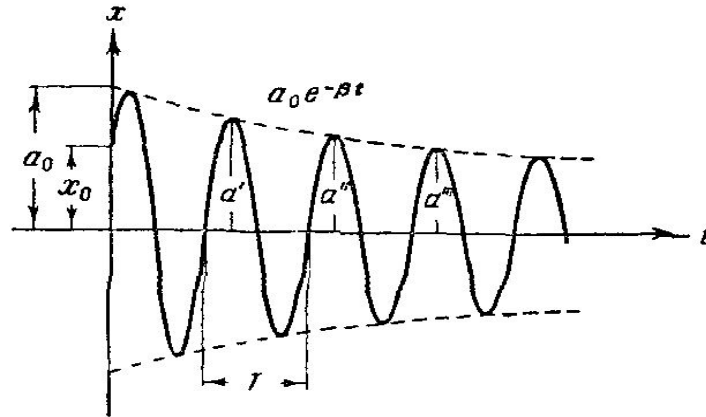
- Получим:  $\beta^2 a - 2\beta^2 a + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ .

- $\omega$  вещественна, если  $\omega_0^2 > \beta^2$ , решение уравнения имеет

вид:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

- График функции решения уравнения  $x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$  имеет вид:



- Амплитуда меняется по гармоническому закону:  $a = a_0 e^{-\beta t}$
- Скорость затухания колебаний определяется коэффициентом затухания  $-\beta = r/2m$
- Период затухающих колебаний:  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$
- С ростом коэффициента затухания период колебаний увеличивается.
- $\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}$  - декремент затухания
- $\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T$  - логарифмический декремент затухания

- Логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний, совершаемых за то время, за которое амплитуда уменьшается в  $e$  раз.
- Для характеристики колебательной системы используется также величина добротность:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$$

- Добротность пропорциональная числу колебаний  $N_e$ , совершаемых системой за время  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.
- Если колеблющаяся система сама управляет внешним воздействием, обеспечивая согласованность сообщаемых ей толчков со своим движением. Такая система называется автоколебательной, а совершаемые ею незатухающие колебания – автоколебаниями.

# Вынужденные колебания, явление резонанса.

- Вынужденными колебаниями называют колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы-вынуждающей силы.
- Пусть вынуждающая сила изменяется по закону:
- В системе ещё действуют квазиупругая сила  $F = F_0 \cos \omega t$  сопротивления среды, пропорциональная скорости  $v$ :
- $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$   $\rightarrow$   $m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$   
собственная частота колебаний системы.
- Общее решение складывается из суммы:
  - Общего решения однородного дифференциального уравнения:
  - где  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ,  $x_0 = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha')$  постоянные.
  - Частного решения неоднородного уравнения:

$$x = a \cos(\omega t - \varphi)$$

$$x = a \cos(\omega t - \varphi) \blacktriangleright$$

$$\bullet \quad 2\beta\dot{x} = -2\beta\omega a \sin(\omega t - \varphi) = 2\beta\omega a \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$\bullet \quad \ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi) \quad (2)$$

$$\bullet \quad \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi) \quad (3)$$

- Колебание  $f_0 \cos \omega t$ - является суммой трёх гармонических колебаний: (1)(2)(3)

- При этом амплитуда  $a$  удовлетворяет равенство:

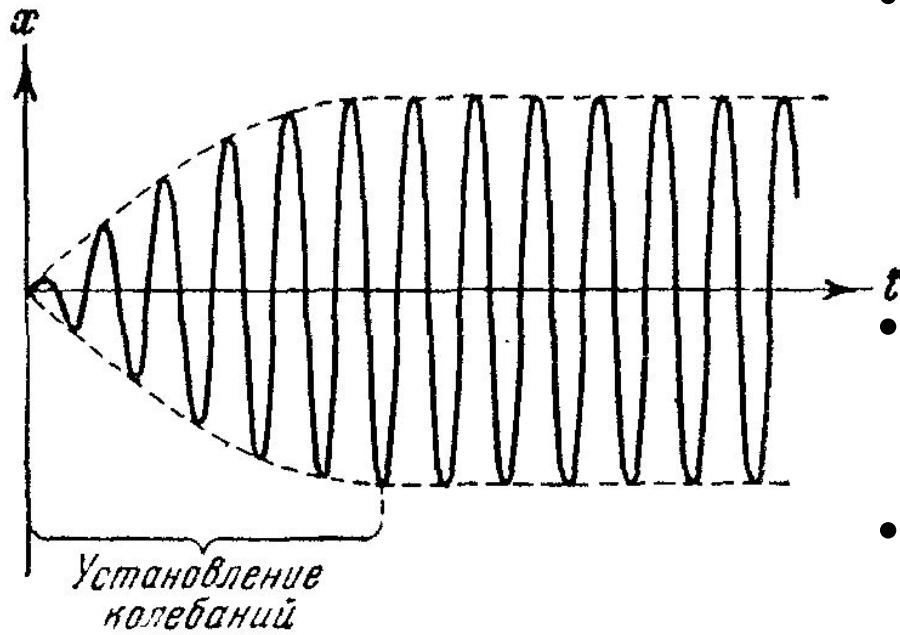
$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2 \blacktriangleright a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Частное решение однородного уравнения:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

- За установление колебаний отвечает общее решение установления колебаний.



- Из-за экспоненциального множителя с ростом  $t$  больший вклад оказывает только частное решение неоднородного уравнения
  - Гармонические колебания происходят с частой вынуждающей силы.
  - Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы.
- 
- Из-за экспоненциального множителя с ростом  $t$  больший вклад оказывает только частное решение неоднородного уравнения
  - Гармонические колебания происходят с частой вынуждающей силы.
  - Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы.



- Амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы, и как следствие: колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при определённой частоте, называемой
- . Явление – резонанс.

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0 \rightarrow \begin{matrix} \omega = 0 \\ \omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

- Резонансные кривые - зависимость амплитуды вынуждающих колебаний от частоты вынуждающей силы при разных  $\beta$

