Лекция по теме:

Волновые свойства частиц

Волны де Бройля

Как было показано в прошлой лекции, тепловое излучение, внешний фотоэффект, давление света, эффект Комптона легко объяснить, если электромагнитное излучение (т. е. волны) рассматривать как поток частиц – квантов, энергия и импульс которых соответственно равны

$$\varepsilon = \hbar\omega, \qquad (16.1)$$

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \qquad (16.2)$$

Но тогда не верно ли обратное утверждение: нельзя ли движущиеся частицы вещества рассматривать как некоторые волны с вытекающими из (16.1), (16.2) значениями частоты и длины волны, равными

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\hbar}, \qquad (16.3)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}, \qquad (16.4)$$

где m – масса частицы, а v – ее скорость?

Волны де Бройля

- По-видимому, подобные мысли возникали в голове у молодого французского физика Луи де Бройля, когда он в 1924 г. выступил с «безумной» на взгляд своих старших коллег идеей, что все движущиеся частицы являются *волнами*. Однако де Бройль подтвердил свою идею расчетами, из которых следовало, что волновые свойства становятся заметными только у частиц атомного и субатомного масштаба – так называемых *микрочастиц*.

Волны де Бройля

- Действительно, для пылинки массой m = 10^{-6} кг при скорости движения v = 1 м/с ***дебройлевская длина волны***, вычисленная по формуле (16.4), равна $\lambda \approx 6{,}6 \cdot 10^{-28}$ м , что меньше размеров любого известного физического объекта и, следовательно, не может быть измерено при помощи каких-либо инструментов. Однако для электрона m =($9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг) при той же скорости движения получается значение λ = 0,72мм. Эта величина может быть легко измерена.

Волны де Бройля

Наличие волновых свойств у электронов было блестяще подтверждено в 1927 г. американскими физиками К. Дэвиссоном и Л. Джермером путем наблюдения их дифракции на кристаллической решетке твердого тела (кристалла никеля). Позднее волновые свойства были обнаружены и у других микрочастиц.

Клинтон Дэвиссон

Лестер Джермер

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

- Волновые свойства микрочастиц проявляются в том, что для них невозможно указать точные значения координаты и импульса, так как волну нельзя локализовать в какой-то одной точке пространства. В виде физического принципа это положение было сформулировано в 1927 г. немецким физиком В. Гейзенбергом: **Независимо от точности измерительных приборов, принципиально невозможно одновременно измерить значения двух сопряженных динамических параметров микрочастицы, например, ее координаты и импульса.**

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Математически это записывается в виде так называемого **соотношения неопределенностей**:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar, \qquad (16.5)$$

где Δx и Δp – соответственно неопределенности (т. е. погрешности) измерения координаты и импульса частицы. Из (16.5) следует, что чем точнее мы знаем значение одного из двух сопряженных динамических параметров частицы, тем с большей погрешностью можем определить значение другого параметра.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Рис. 16.1 поясняет природу соотношения неопределенностей Гейзенберга. Частица с импульсом p и длиной волны де Бройля $\lambda = 2\pi\hbar / p$ дифрагирует на щели шириной a =Δx .

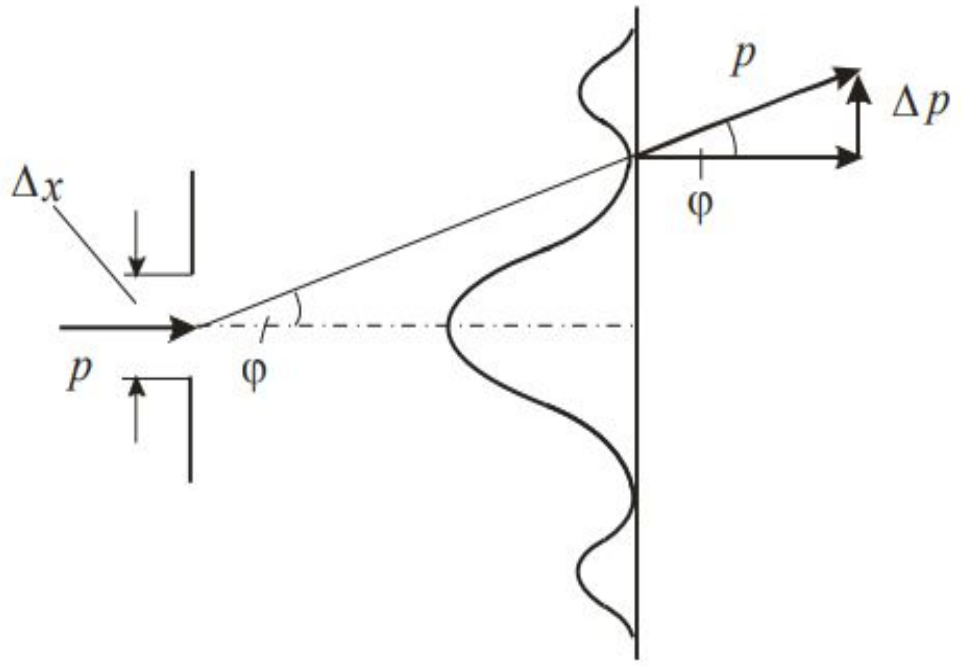


Рис. 16.1. К объяснению соотношения неопределенностей Гейзенберга

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \qquad (16.10)$$

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 1. \qquad (16.9)$$

Поскольку при дифракции на щели вся дифракционная картина практически сосредоточена в центральном максимуме и ограничена первыми минимумами, то, используя условие минимумов дифракции, можно записать

$$a \sin\varphi = m\lambda, \qquad (16.6)$$

где $a = \Delta x$, $\sin\varphi = \Delta p / p$, $m = 1$, $\lambda = 2\pi\hbar / p$.

Из (16. 6) следует, что

$$\Delta x \cdot \Delta p = 2\pi\hbar. \qquad (16.7)$$

Выражение (16.6) подтверждает формулу (16.5). Существуют и другие формы записи соотношения неопределенностей. Так, подставляя в (16.7) $\Delta p = \hbar\Delta k$, где $k = 2\pi / \lambda$ – волновое число, получаем

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 1. \qquad (16.8)$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Подставляя в (16.8) $\Delta k = \Delta\omega / v$, $\Delta x / v = \Delta t$, где v – скорость волны (частицы), приходим к выражению

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 1. \qquad (16.9)$$

Используя (16.3), можем записать, что $\Delta\omega = \Delta E / \hbar$ и получить еще одно выражение для соотношения неопределенностей:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \qquad (16.10)$$

Из выражения (16.10) следует, что чем больше энергия состояния, в котором находится микрочастица, чем короче время ее жизни в этом состоянии.

Уравнение Шредингера

- Как мы выяснили ранее, любая движущаяся микрочастица обладает волновыми свойствами, иначе говоря, является волной де Бройля. В простейшем случае уравнение такой волны можно представить в виде уравнения плоской бегущей волны (см. лекцию 10), записав его в комплексной форме:

$$\Psi(\vec{r},t) = A\mathrm{e}^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \qquad (16.11)$$

Обратите внимание: согласно известной из математики формуле Эйлера, $\mathrm{e}^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) - i\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$. Таким образом, действительная часть выражения (16.10), а именно она имеется в виду, может быть записана в виде привычного нам уравнения плоской бегущей волны в форме, похожей на (10.1): $\Psi(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$.

Уравнение Шредингера

Используя выражения (16.1) и (16.2), можно переписать (16.11) в следующем виде:

$$\Psi(\vec{r},t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})}, \qquad (16.12)$$

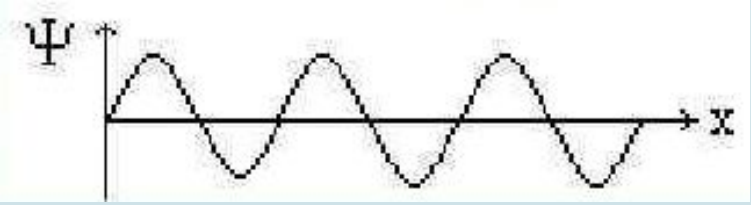
Для стационарных силовых полей, в которых движется микрочастица, в уравнении (16.12) можно разделить пространственную и временную части:

$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}. \qquad (16.13)$$

Функцию $\Psi(\vec{r},t)$, описывающую состояние микрочастицы (она же волна де Бройля) в точке пространства с радиус-вектором $\vec{r}$ в момент времени t , называют *волновой функцией*. Функцию $\psi(\vec{r})$ называют *волновой функцией для стационарных состояний* частицы.

Уравнение Шредингера

- Мы видим, что волновая функция играет роль смещения в волнах де Бройля, правда, пока не знаем, что же именно в них смещается? Волна – это процесс распространения колебаний. Что колеблется в волне де Бройля микрочастицы, мы также пока не представляем, ведь частица летит, на наш взгляд, прямолинейно и равномерно. К обсуждению физической природы волн де Бройля мы вернемся несколько позже, а пока займемся их математическим описанием



Уравнение Шредингера

Волновое уравнение, которому удовлетворяет волновая функция (16.12), было найдено австрийским физиком Э. Шрёдингером (именно так, ближе к немецкому оригиналу, произносится его фамилия) в 1926 г.:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \qquad (16.14)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– оператор Лапласа, а U – потенциальная функция, равная взятому с обратным знаком потенциалу силового поля, в котором движется частица.

Уравнение (16.14) называется **временным уравнением Шредингера**. Представив волновую функцию Ψ в виде (16.13), легко получить **стационарное уравнение Шредингера**, описывающее не зависящие от времени состояния частицы:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \qquad (16.15)$$

где E – полная энергия частицы.

Уравнение Шредингера

Уравнение Шредингера играет для микрочастиц ту же роль, что и второй закон Ньютона для макрочастиц. Законы Ньютона для микрочастиц не применимы. Это следует из соотношения неопределенностей Гейзенберга. Мы не можем одновременно указать для микрочастицы значения ее координаты и импульса, следовательно, не можем говорить о траектории движения и применять законы классической механики.

Уравнение Шредингера

Как предложил считать в 1926 г. немецкий физик-теоретик М. Борн, вероятность $dP(\vec{r},t)$ обнаружения частицы в некотором объеме dV пропорциональна величине этого объема и интенсивности I дебройлевской волны частицы, которая, в свою очередь, пропорциональна квадрату амплитуды этой волны

$$dP(\vec{r},t) \propto IdV;\ I \propto A^2 = \Psi\Psi^* = |\Psi|^2. \qquad (16.16)$$

Отсюда следует, что квадрат модуля волновой функции частицы равен плотности вероятности ее обнаружения в данной точке пространства в данный момент времени:

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2 = \frac{dP(\vec{r},t)}{dV} = w(\vec{r},t). \qquad (16.17)$$

Уравнение Шредингера

- Вероятность обнаружить частицу во всем объеме V ее возможной локализации, естественно, равна единице:

$$\int_V w(\vec{r},t)\,dV = 1.$$

Следовательно,

$$\int_V |\Psi|^2\,dV = 1. \qquad (16.18)$$

Выражение (16.18) называется *условием нормировки* волновой функции. Из структуры уравнения Шредингера и вышеприведенных рассуждений ясно, что волновая функция должна обладать следующими свойствами: – однозначность, – непрерывность, – непрерывная диффренцируемость (гладкость), – нормируемость.

Уравнение Шредингера

- Таким образом, относительно природы волн де Бройля и описывающей их волновой функции можно сделать вывод, что это *волны вероятности*: в них колеблется вероятность обнаружения микрочастицы в рассматриваемом месте.
- **Обратите внимание:** как и законы Ньютона, уравнение Шредингера ниоткуда не выводится. Оно просто подобрано таким образом, чтобы ему удовлетворяло уравнение бегущей волны де Бройля. Поскольку существование волн де Бройля подтверждается опытным путем, то уравнение Шредингера, таким образом, не противоречит опыту и может быть постулировано как основополагающее уравнение квантовой механики.

Спасибо за внимание!