Пример

Зададим отношение
«xi – победитель xj» в шахматном турнире из пяти игроков x1, x2, x3, x4, x5, турнир игрался в один круг.

1 способо

i-ая строка соответствует элементу x_i,

j-ый столбец элементу x_j,

на их пересечении ставится 1, если отношение $x_i A x_j$ выполнено,

0, если нет.

Так, единица, стоящая на пересечении 4ой строки и 1го столбца, соответствует тому, что игрок x4 выиграл у игрока x1, т.е. <x4Ax1>.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	0	0
x_2	0	0	1	1	1
x_3	0	0	0	0	0
x_4	1	0	0	0	0
x_5	0	0	1	0	0

На множестве М отношение
«xi – победитель yj» задано матрицей

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если\_выполнено } x_i A x_j \\ 0, \textit{если\_не\_выполнено } x_i A x_j \end{cases}$$

Если $a_{ij} \equiv 0$ $(i, j = \overline{1,n})$, то имеем <u>пустое</u>

<u>отношение</u>, т.е. такое, которое не выполнено

ни для какой пары $x_i x_j$.

Если $a_{ij} \equiv 1$, имеем <u>полное отношение</u>, т.е. отношение, выполненное для всех пар.

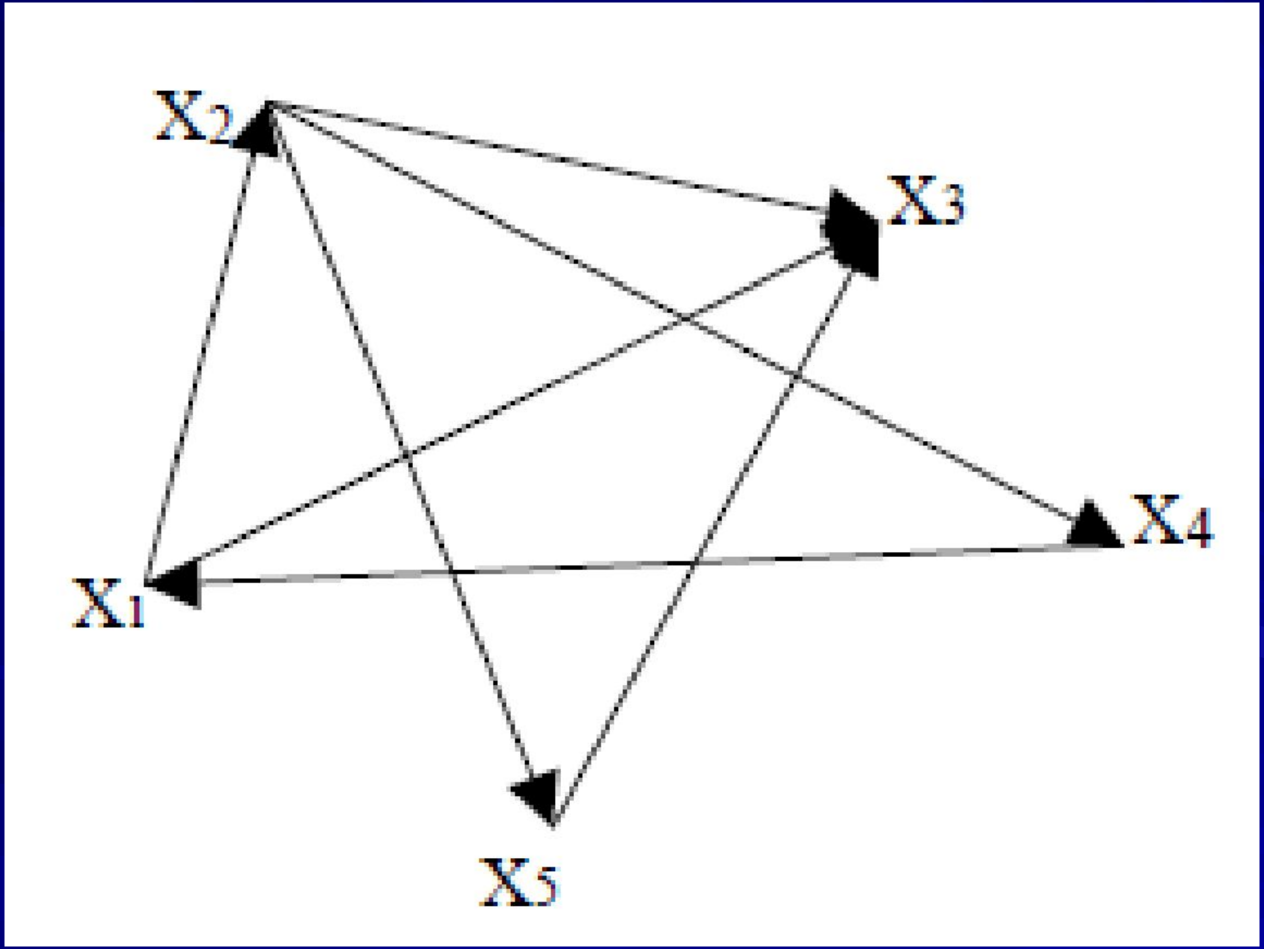
Единичная матрица Е задает <u>диагональное отношение</u>, <u>отношение равенства:</u>

$\langle x_i A x_j \rangle$, если $x_i = x_j$.

2 способ

Элементы множества изобразим точками, проведем стрелку от x_i к x_j, если выполнено $x_i A x_j$, получим фигуру – ориентированный граф.

Точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – вершины графа, направленные линии – ребра графа.


X2
X3
X4
X1
X5

Свойства отношений:

1) Отношение А рефлексивно, если оно выполнено между объектом и им самим, т.е. хАх.

Отношения «быть похожим», «быть знакомым» – рефлексивны. Отношение «быть братом» – нерефлексивно.

2) Если отношение A может выполняться лишь для несовпадающих объектов, то оно антирефлексивно, т.е. из xAy следует, что x≠y.

3) Отношение A называется симметричным, если при выполнении xAy выполнено yAx.

Отношения «быть родственником», «быть похожим на» – симметричны.

4) Отношение А называется антисимметричным, если из двух отношений хАу и уАх хотя бы одно не выполнено. Так, приведенный выше пример: отношение «х – победитель у» – антисимметрично.

Теорема:

если отношение антисимметрично,
то оно антирефлексивно.

5) Отношение называется транзитивным, если при выполнении xAy и yAz выполнено xAz.

Примером является отношение «быть больше (меньше)»:

если $x<y$ и $y<z$, то $x<z$.

Отношение эквивалентности определяется отображением множества X на множество Y и характеризуется разбиением множества X на классы.

Отношение эквивалентности – рефлексивно, симметрично и транзитивно

Отношение A на множестве M называется ***толерантностью***, если оно рефлексивно и симметрично.

Пример: отношение «быть знакомым»

Отношение A на множестве X называется ***отношением порядка***, если оно транзитивно и антирефлексивно.

Пример: отношение $x<y$ на множестве действительных чисел

Множество, на котором задано отношение порядка, называется упорядоченным множеством.

Биективное отображение “f” в упорядоченном множестве X на упорядоченное множество Y называют соответствием подобия или подобным соответствием, если оно сохраняет порядок.

Два упорядоченных множества называются <u>подобными</u>, или имеющими один и тот же порядковый тип, если одно из них можно подобно отобразить на другое.